

# Berechnung der Gezeiteneffekte für einen Low Earth Orbiter

Manuel Schilling

2011



Institut für Erdmessung



Dieser Bericht ist eine überarbeitete Version einer Masterarbeit, die im Jahr 2011 am Institut für Erdmessung eingereicht wurde.

Manuel Schilling

# Berechnung der Gezeiteneffekte für einen Low Earth Orbiter

2011

Copyright © 2012  
Institut für Erdmessung  
Leibniz Universität Hannover  
Schneiderberg 50  
30167 Hannover  
Deutschland

Telefon: (+49) 511 762 2795  
Fax: (+49) 511 762 4006  
mail: [office@ife.uni-hannover.de](mailto:office@ife.uni-hannover.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>9</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1 Chebyshev Approximation und Interpolation . . . . .	11
2.2 Zeitskalen . . . . .	13
2.3 Satellitenbahnen . . . . .	16
2.4 Direkte und indirekte Gezeiten . . . . .	18
2.5 Lösung von Differentialgleichungen mit MATLAB . . . . .	24
<b>3 Praktische Umsetzung</b>	<b>27</b>
3.1 Positionen der Himmelskörper . . . . .	27
3.1.1 Chebyshev Polynominterpolation . . . . .	27
3.1.2 HORIZONS-Webdienst . . . . .	32
3.1.3 Näherungsformel . . . . .	33
3.1.4 Software des JPL – SPICE . . . . .	33
3.2 Störbeschleunigungen aufgrund dritter Körper . . . . .	34
<b>4 Ergebnisse und Bewertung</b>	<b>37</b>
4.1 Auswirkung der Zeittransformation $TDB - TT$ . . . . .	37
4.2 Methoden der Positionsbestimmung . . . . .	40
4.2.1 Himmelskörper im BCRS . . . . .	41
4.2.2 Himmelskörper im GCRS . . . . .	48
4.2.3 Vergleich der Ephemeriden DE421 und DE405 . . . . .	55
4.3 Erdgezeiten . . . . .	57
4.3.1 Anzahl der Himmelskörper . . . . .	57
4.3.2 Grad der Gezeitenentwicklung . . . . .	58
4.3.3 Einfluss der Himmelskörper . . . . .	59
4.4 Satellitenpositionen . . . . .	60
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>63</b>
<b>A Ergänzende Bilder</b>	<b>65</b>
A.1 Ergänzung zu Kapitel 2 . . . . .	65
A.2 Ergänzung zu Kapitel 4 . . . . .	68
<b>B Ableitung des Deformationspotentials</b>	<b>75</b>

---

<b>C</b>	<b>Programmbeschreibung</b>	<b>79</b>
C.1	Allgemeine Beschreibung . . . . .	79
C.2	Funktionsbeschreibung . . . . .	81
C.3	MICE Software . . . . .	87
<b>D</b>	<b>JPL Ephemeriden Dateien</b>	<b>89</b>
<b>E</b>	<b>CD Inhalt</b>	<b>91</b>
<b>F</b>	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>93</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Gravitative und nicht gravitative Störbeschleunigungen . . . . .	9
1.2	Schematische Darstellung der Positionsberechnung . . . . .	10
2.1	Chebyshev Polynome . . . . .	12
2.2	Übersicht verschiedener gebräuchlicher Zeitskalen. . . . .	13
2.3	Zeitdifferenz TDB – TT . . . . .	15
2.4	Störbeschleunigungen am Satelliten . . . . .	17
2.5	Wirkung der Gezeitenkräfte . . . . .	18
2.6	Einzelne Gezeitenbeschleunigungen von Sonne und Mond . . . . .	21
2.7	Darstellung direkter und indirekter Erdgezeiten durch Sonne und Mond . . . . .	22
2.8	Darstellung direkter und indirekter Erdgezeiten durch andere Himmelskörper . . . . .	23
2.9	Variable Schrittweite eines Integrators . . . . .	24
3.1	Schema der Berechnung einer Planetenposition . . . . .	30
3.2	Interpolation des Orbits eines Planeten. . . . .	31
4.1	Differenz der Zeitdifferenz TDB – TT . . . . .	37
4.2	Zeittransformation und Position im Vergleich zu MICE . . . . .	38
4.3	Zeittransformationen und Positionen aus JPL Methode im Vergleich . . . . .	39
4.4	Planeten des inneren Sonnensystems . . . . .	40
4.5	Differenz der Himmelskörperpositionen MICE – JPL . . . . .	43
4.6	Differenz der Himmelskörperpositionen HORIZONS – JPL . . . . .	44
4.7	Spline Stützstellenabstand und Koordinatendifferenz im BCRS . . . . .	45
4.8	Differenz der Himmelskörperpositionen Splines – JPL . . . . .	46
4.9	Differenz Splines mit variablen Stützstellen – JPL . . . . .	47
4.10	Gegenüberstellung Zeit- und Koordinatendifferenzen . . . . .	49
4.11	Differenz der Himmelskörperpositionen MICE – JPL GCRS . . . . .	50
4.12	Differenz der Himmelskörperpositionen HORIZONS – JPL GCRS . . . . .	51
4.13	Spline Stützstellenabstand und Koordinatendifferenz im GCRS . . . . .	52
4.14	Differenz der Himmelskörperpositionen Spline – JPL GCRS . . . . .	53
4.15	Differenz Splines mit variablen Stützstellen – JPL . . . . .	54
4.16	Vergleich der Serien DE405 und DE421 an Positionen . . . . .	55
4.17	Vergleich der Serien DE405 und DE421 an Differenzen . . . . .	56
4.18	Übersicht verschiedener Gezeiten an einem Satelliten . . . . .	57
4.19	Differenz Gezeiten nach Grad der Entwicklung . . . . .	58
4.20	Differenz Gezeiten nach Berechnung der Himmelskörper . . . . .	59
4.21	Satellitenpositionen mit wechselnden Gezeiten . . . . .	62

---

A.1	Planeten des inneren Sonnensystems für drei Monate . . . . .	66
A.2	Planeten des inneren Sonnensystems für ein Jahr . . . . .	66
A.3	Direkte und indirekte Erdzeiten ausgewählter Himmelskörper . . . . .	67
A.4	Vergleich Positionen innere Planeten MICE – JPL für ein Jahr im BCRS . . . . .	69
A.5	Vergleich der Positionen äußere Planeten MICE – JPL für ein Jahr im BCRS . . . . .	70
A.6	Differenz der Planetenpositionen MICE – Splines im BCRS . . . . .	71
A.7	Vergleich der Positionen MICE – JPL für ein Jahr im GCRS . . . . .	72
A.8	Differenz Gezeiten nach Stützstellenabstand des Splines . . . . .	73
A.9	Satellitenpositionen mit wechselnden Gezeiten über 30 Tage . . . . .	74
C.1	Schematische Darstellung des Orbitintegrators . . . . .	80
C.2	<i>Nested functions</i> und <i>function handles</i> . . . . .	81
D.1	Aufbau JPL Ephemeriden . . . . .	90

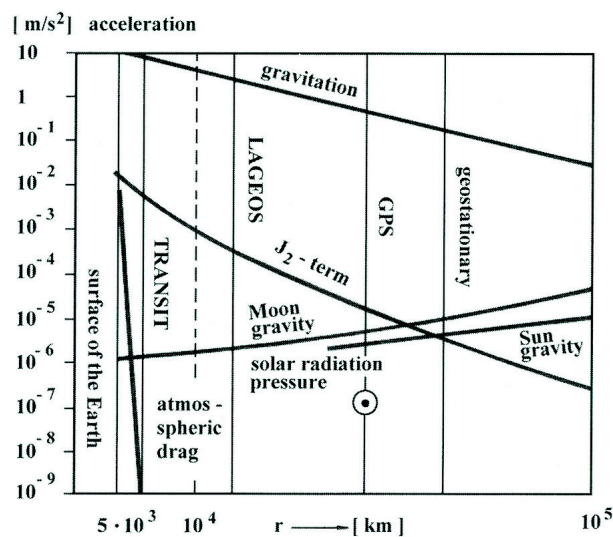


# Kapitel 1

## Einführung

Die globale Beobachtung des Schwerefeldes und der Oberfläche der Erde wird heutzutage von Satelliten durchgeführt. Abhängig von dem Einsatzzweck der Satelliten werden diese in sehr tiefen Flugbahnen von etwa 250 km für Low Earth Orbiter (LEO) bis hin zu geostationären Bahnen in einer Höhe von 42000 km eingesetzt.

Die Bewegung eines Satelliten auf einer ungestörten Bahn um einen Planeten oder sonstigen Himmelskörper lässt sich durch eine Ellipse beschreiben. Diese ungestörte Bahn kann durch sechs Parameter – z. B. durch die Keplerelemente oder die Komponenten der Position und der Geschwindigkeit – beschrieben werden. Die Position des Satelliten auf dieser Bahn kann relativ einfach z. B. durch numerische Integration berechnet werden. Für die Berechnung eines ungestörten Satellitenorbits ist ebenfalls die geschlossene Lösung möglich, z. B. nach Kaula (2000).

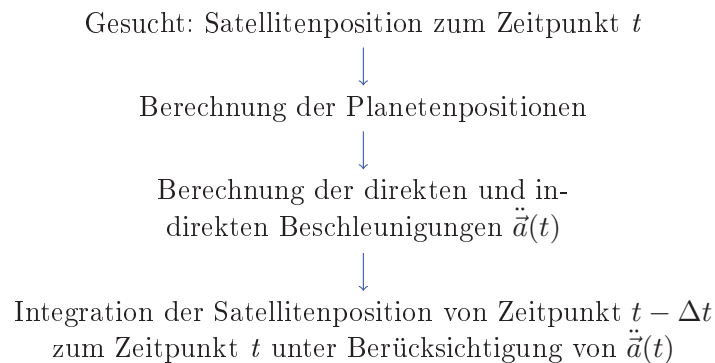


**Abbildung 1.1:** Größenordnungen verschiedener Störbeschleunigungen in Abhängigkeit der Höhe auf Satelliten. (Seeber, 2003).

Tatsächlich jedoch wird die Bahn des Satelliten durch verschiedene gravitative Einflüsse (z. B. die Anziehungskraft von Sonne und Mond) und nicht gravitative Einflüsse (z. B. der Strahlungsdruck der Sonne) gestört. Die Abbildung 1.1 zeigt die Größenordnungen verschiedener

Störbeschleunigungen in Abhängigkeit der Höhe. In dieser Arbeit werden nur die gravitativen Störbeschleunigungen aufgrund dritter Körper betrachtet.

Bedingt durch diese Störungen kann die Position des Satelliten auf der Bahn im Allgemeinen nicht mehr durch geschlossene Formeln berechnet werden. Die numerische Berechnung der Satellitenposition erfordert die Modellierung der störenden Einflüsse. In Abhängigkeit von der Flughöhe eines Satelliten variiert das Ausmaß der einzelnen Effekte. Einen wesentlichen Einfluss auf die Bahn eines Satelliten haben die Anziehungskräfte von Sonne, Mond und – in geringerem Maße – die Planeten. Diese lassen sich aufteilen in einen direkten Effekt durch die Anziehungskraft der Massen auf den Satelliten und einen indirekten Effekt, der durch die Verformung der Erde aufgrund der Anziehungskräfte von Sonne, Mond und Planeten erzeugt wird. Das Schema 1.2 zeigt die Schritte in der Bestimmung einer Satellitenposition unter Berücksichtigung der direkten und indirekten Störbeschleunigungen.



**Abbildung 1.2:** Übersicht der Schritte in der Bestimmung einer Satellitenposition unter Berücksichtigung der Planeten.

Um die Position eines Satelliten auf einer durch dritte Körper gestörten Bahn zum Zeitpunkt  $t$  zu bestimmen, werden zunächst die Positionen dieser Körper berechnet. In dieser Arbeit werden die Körper Sonne, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto und Mond berücksichtigt und zusammengefasst als *Himmelskörper* bezeichnet. Aus den Positionen der Himmelskörper werden die direkten und indirekten Beschleunigungen, die auf den Satelliten wirken, berechnet und bei der Integration der Position des Satelliten als zusätzlicher Term in die Bewegungsgleichung eingeführt.

In dieser Arbeit soll die Modellierung der Störbeschleunigungen an der Position eines LEO bzw. eines Satelliten im Allgemeinen und die dazu erstellte Software näher beschrieben werden. Zunächst werden in Kapitel 2 einige Grundlagen zu den mathematischen Verfahren, den Erdzeiten und den Positionen der Planeten behandelt. Es folgt in Kapitel 3 eine Beschreibung der praktischen Umsetzung. Dabei wird insbesondere auf die Berechnung der Positionen und Störbeschleunigungen von Himmelskörpern durch verschiedene Methoden eingegangen. Neben der Vorstellung eigener Methoden wird auch eine offizielle Software zur Berechnung der Positionen von Himmelskörpern sowie ein Webdienst gezeigt. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4 dargestellt und näher untersucht. Zum Abschluss erfolgt eine Bewertung der Ergebnisse sowie eine Zusammenfassung dieser Arbeit. Des Weiteren wurde ein MATLAB Programm entwickelt, das durch verschiedene Methoden die Positionen der Himmelskörper bestimmt und die daraus resultierenden Störbeschleunigungen berechnet. Diese Software soll in ein Programm zur Orbitintegration eingebunden werden.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige Grundlagen näher erläutert werden. Zunächst werden die Voraussetzungen für die Berechnung der Positionen von Himmelskörpern beschrieben. Dazu gehören die Reihenentwicklung der Bahnen der Himmelskörper und die Transformation zwischen beteiligten Zeitskalen. Weiterhin erfolgt die Beschreibung von direkten und indirekten Erdzeiten und eine erste Simulation für einen tieffliegenden Satelliten.

### 2.1 Chebyshev Approximation und Interpolation

Die später zu berechnenden Positionen der Himmelskörper können aus Polynomkoeffizienten bestimmt werden, die vom Jet Propulsion Laboratory (JPL) der National Aeronautics and Space Administration (NASA) herausgegeben werden. Die Koeffizienten beziehen sich auf eine Reihenentwicklung nach Chebyshev.

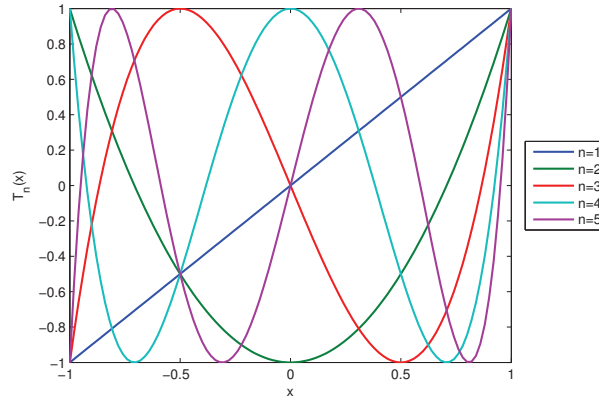
Im Allgemeinen kann jede Funktion  $g(x)$  durch ein Polynom  $f(x)$  approximiert werden. Ein Polynom von Grad  $n$  ist definiert durch

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Die Koeffizienten  $a_i$  ergeben sich aus der Funktion  $g(x)$  z.B. durch eine Parameterbestimmung. Das Erhöhen des Grades  $n$  des Polynoms führt nicht zwingend zu einer besseren Approximation, da es zu Schwingungen in der Funktion führen kann (Runge's Phänomen).

Die Bahnen der Himmelskörper werden durch Chebyshev Polynome approximiert, da diese Eigenschaften aufweisen, die für die Approximation und Interpolation besonders günstig sind. Chebyshev Polynome bieten die bestmögliche Approximation mit der geringsten Fehlerquadratsumme bei einer gleichmäßigen Approximation (Rivlin, 1990). Im Gegensatz dazu bietet z. B. eine Reihenentwicklung nach Taylor eine gute Approximation in der Nähe eines Entwicklungspunktes mit stärker werdenden Abweichungen in größerer Entfernung. Eine Funktion  $g(x)$  kann gemäß Dreszer (1975) durch eine Reihe aus Chebyshev Polynomen approximiert werden:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} a_n T_n(x). \quad (2.1)$$



**Abbildung 2.1:** Chebyshev-Polynome von Grad  $n = 1 \dots 5$ .

Dabei wird das Chebyshev Polynom  $T_n$  von Grad  $n$  durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1 \quad (2.2)$$

definiert (Rivlin, 1990). Die Koeffizienten ergeben sich nach Dreszer (1975):

$$a_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} g(x) T_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n_{max})$$

Chebyshev Polynome sind auf das Intervall  $[-1, 1]$  beschränkt. Daher muss in der späteren Anwendung das vier bis 32 Tage lange Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ , in dem die durch das JPL gegebenen Polynomkoeffizienten gelten, auf dieses Intervall normiert werden mit

$$\tau = 2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} - 1. \quad (2.3)$$

Der Beitrag eines Koeffizienten  $a_n$  bzw. der Fehler, der durch vorzeitiges Beenden der Reihe entsteht, ist gleichmäßig über das gesamte Intervall verteilt. Die Abbildung 2.1 zeigt die Chebyshev Polynome bis zum Grad 5. Daraus wird deutlich, dass die Polynome Werte von maximal  $\pm 1$  annehmen, so dass der Beitrag eines Koeffizienten leicht abgeschätzt werden kann (Montenbruck und Gill, 2000).

Die Berechnung kann nach Press u. a. (1992) auch iterativ erfolgen:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für die vorliegende Anwendung der Berechnung von Positionen von Himmelskörpern wird aus der allgemeinen Gleichung (2.1) mit der Variablen  $x$  eine Funktion der Zeit  $t$ . Die Chebyshev Polynome  $T_n$  in Abhängigkeit der auf das Intervall  $[-1, 1]$  normierten Zeit  $\tau$  werden gemäß (2.2) oder (2.4) berechnet. Die Koeffizienten  $a_n$  dieser Reihe werden vom JPL bereitgestellt. Abweichend von (2.1) ist der Koeffizient  $a_0$  der JPL Chebyshev Koeffizienten bereits mit dem Faktor  $1/2$  multipliziert. In diesem Fall erfolgt die Berechnung der Positionen gemäß

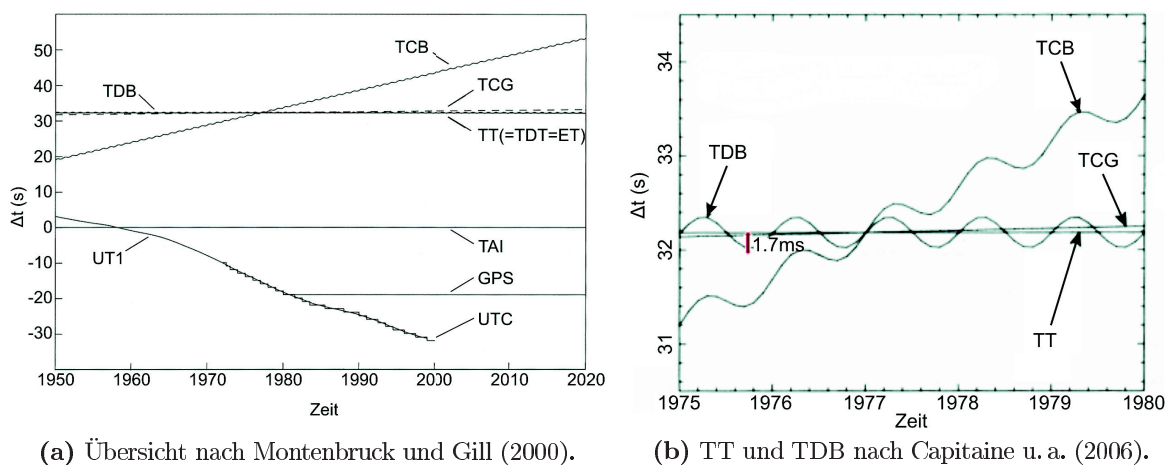
$$f(t) = \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n T_n(t). \quad (2.5)$$

Die weitere Diskussion dieser Anwendung erfolgt in dem Abschnitt 3.1.

## 2.2 Zeitskalen

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Zeitskalen verwendet. Die Zeitskala der Chebyshev Koeffizienten des JPL ist Temps Dynamique Barycentrique (TDB). Die Interpolation der Positionen mit diesen Koeffizienten ergibt Koordinaten in eben dieser Zeitskala. Die Berechnung der Satellitenbahn soll in Terrestrial Time (TT) erfolgen. Der Unterschied zwischen diesen Zeitskalen beträgt maximal  $\pm 1.7$  ms mit einer jährlichen Periode und einem Mittelwert von 0 ms.

Der Unterschied ergibt sich durch relativistische Effekte. Die verwendeten Koordinatensysteme unterscheiden sich durch die Definition des Koordinatensystemursprungs. Die Zeitskala TDB wird bei der Definition des Ursprungs im Baryzentrum des Sonnensystems (SSB) verwendet. Die gleichförmige Zeitskala TT ist im Gegensatz dazu bis auf einen konstanten Offset von 32.184 s identisch mit der internationalen Atomzeit TAI und wird auf dem Geoid definiert. Der Zeitunterschied zu TDB ergibt sich aus der Bewegung der Erde im Schwerfeld der Sonne. Die Abbildung 2.2a zeigt einen Überblick über gebräuchliche Zeitskalen. Die Abbildung 2.2b zeigt insbesondere die Zeitskalen TT und TDB mit dem periodischen Unterschied von etwa 1.7 ms (McCarthy, 2011).



(a) Übersicht nach Montenbruck und Gill (2000).

(b) TT und TDB nach Capitaine u. a. (2006).

**Abbildung 2.2:** Übersicht verschiedener gebräuchlicher Zeitskalen.

Die Transformation zwischen TDB und TT kann durch verschiedene Methoden erfolgen. Eine einfache Näherung nennt Seidelmann (1992)

$$TDB - TT = 0.001658 \text{ [s]} \cdot \sin(g) + 0.000014 \text{ [s]} \cdot \sin(2g) \quad (2.6)$$

mit

$$g = 357.53^\circ + 0.9856003(JD - 2451545),$$

$JD$  : Zeitpunkt in Julianischem Datum.

Eine weitere Möglichkeiten der Umrechnung beschreiben Montenbruck und Gill (2000). Die dort aufgeführte Methode entspricht weitestgehend den Resolutionen der International Astronomical Union (IAU) aus dem Jahr 2000 (Soffel u. a., 2003; Capitaine u. a., 2006), transformiert jedoch zwischen mehreren Zeitskalen, um von TT zu TDB zu transformieren:

$$\begin{aligned} TCG &= TT + L_G(JD - 2443144.5), \\ TCB &= TCG + L_C(JD - 2443144.5) + P, \\ TDB &= TCB - L_B(JD - 2443144.5). \end{aligned}$$

Der Zeitpunkt 2443144.5 in Julianischem Datum entspricht dem 01.01.1977 0:00 Uhr. Zu diesem Zeitpunkt stimmen die Zeitskalen TT, TCG und TCB definitionsgemäß überein. TDB hat zu diesem Zeitpunkt einen Offset von 65.5  $\mu$ s (McCarthy, 2011). Die Konstanten  $L_G$ ,  $L_C$  und  $L_B$  sind Skalenfaktoren und werden den aktuellen IERS Conventions (Petit u. a., 2010) entnommen:

$$\begin{aligned} L_B &= 1.550519768 \times 10^{-8}, \\ L_C &= 1.48082686741 \times 10^{-8}, \\ L_G &= 6.969290134 \times 10^{-10}. \end{aligned}$$

Zwischen den Zeitskalen Temps Coordonnè Barycentrique (TCB) und Temps Coordonnè Geocentrique (TCG) gibt es periodische Terme, die von der Exzentrizität der Bahn der Erde um die Sonne abhängen:

$$\begin{aligned} P \approx & 0.0016568 \sin(35999.37^\circ T_{Jhd} + 357.5^\circ) \dots \\ & + 0.0000138 \sin(71998.7^\circ T_{Jhd} + 355^\circ) \dots \\ & + 0.0000224 \sin(32964.5^\circ T_{Jhd} + 246^\circ) \dots \\ & + 0.0000048 \sin(3034.9^\circ T_{Jhd} + 25^\circ) \dots \\ & + 0.0000047 \sin(34777.3^\circ T_{Jhd} + 230^\circ) \end{aligned}$$

mit

$$T_{Jhd} = (JD - 2451545) / 36525.$$

Diese Berechnung der periodischen Terme  $P$  entspricht ebenfalls einer Näherung. Eine analytische Lösung dieser Zeitdifferenz beschreiben Fairhead und Bretagnon (1990). Diese Lösung erreicht eine Genauigkeit von einer Nanosekunde (Müller u. a., 2008) in der Berechnung der Zeitdifferenz. Statt dieser analytischen Lösung wird in dieser Arbeit die Beschreibung der Differenz  $TDB - TT$  durch Chebyshev Polynome – analog zu der Berechnung der Planetenpositionen – benutzt. Aus einer numerischen Integration werden *Zeit Ephemeriden* berechnet und als Koeffizienten veröffentlicht. Diese Methode beschreiben Irwin und Fukushima (1999). Die Koeffizienten werden als Time Ephemerides (TE) und die Serie als TE405 bezeichnet. Bei der Berechnung von  $TDB - TT$  muss ein konstanter Offset beachtet werden, so dass gilt

$$TDB - TT = \left( \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n T_n(x) \right) - 65.564518 \mu\text{s}.$$

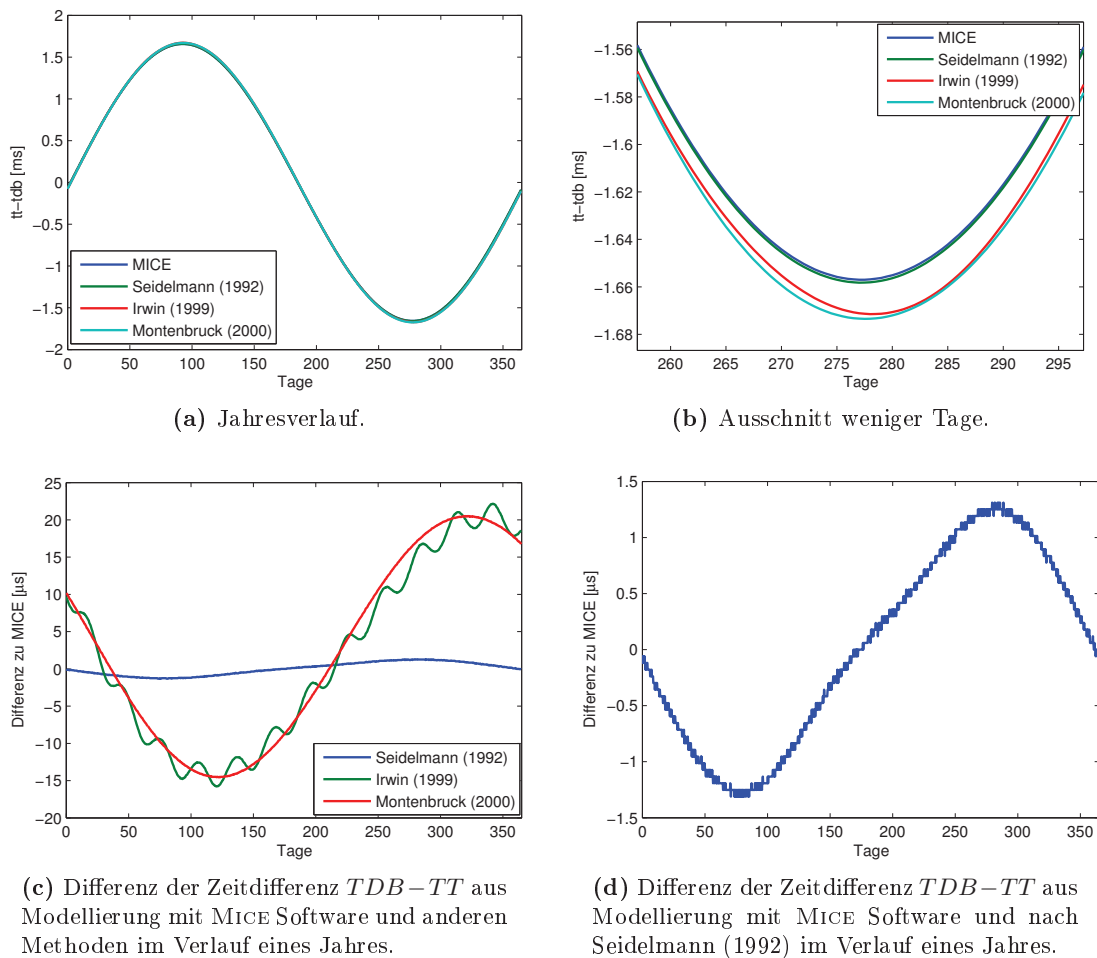
Dieser Offset ist in den Koeffizienten nicht enthalten, wird jedoch bei Irwin und Fukushima (1999) aufgeführt und dient der Konsistenz zur Berechnung nach (Fairhead und Bretagnon,

1990). Die hier genannten Methoden, mit Ausnahme der analytischen Lösung nach Fairhead und Bretagnon (1990), werden in dieser Arbeit implementiert und in Abschnitt 4.1 diskutiert.

Das JPL stellt ebenfalls eine Software für die Berechnung von Planetenpositionen bereit, die in Abschnitt 3.1.4 näher beschrieben wird. Diese Software (MICE) enthält ebenfalls eine Funktion, die den Zeitunterschied zwischen TDB und TT berechnet. In dieser Funktion wird eine Näherung angenommen, die nur von der exzentrischen Anomalie  $E$  der Bahn des Erde-Mond Baryzentriums abhängig ist

$$TDB - TT = K \cdot \sin(E).$$

Die Konstante  $K = 0.001657$  ist Bestandteil des MICE Paktes<sup>1</sup>. Die zeitabhängige exzentrische Anomalie  $E$  wird innerhalb der MICE-Funktion berechnet.



**Abbildung 2.3:** Zeitdifferenz  $TDB - TT$  nach verschiedenen Methoden für das Jahr 2009.

Die Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf von  $TDB - TT$  für das Jahr 2009. Die Abbildungen 2.3a und 2.3b zeigen jeweils alle vier vorgestellten Methoden zur Berechnung dieser Zeitdifferenz für ein Jahr bzw. für eine Dauer von einigen Tagen. Die Amplitude und Periode sind vergleichbar mit dem in Abbildung 2.2b gezeigten Verlauf. Besonders in Abbildung 2.3b zeigt sich,

<sup>1</sup> $K$  ist Bestandteil des *leapsecond Kernel*, siehe Anhang C.3.

Störung	Beschleunigung [m/s <sup>2</sup> ]	Auswirkung auf Orbit	
		2 h Orbit	3 Tage Orbit
$C_{20}$ des inhomogenen Schwerefeldes	$5 \cdot 10^{-5}$	2 km	14 km
höhere Grade des inhomog. Schwerefeldes	$3 \cdot 10^{-7}$	50 – 80 m	100 – 1000 m
direkte Anziehung Sonne & Mond	$5 \cdot 10^{-6}$	5 – 150 m	1000 – 3000 m
Erdgezeiten	$1 \cdot 10^{-9}$	–	0.5 – 1 m
Ozean Gezeiten	$1 \cdot 10^{-9}$	–	0 – 2 m
Strahlungsdruck der Sonne	$1 \cdot 10^{-7}$	5 – 10 m	100 – 800 m
Albedo	$1 \cdot 10^{-9}$	–	1 – 1.5 m

**Tabelle 2.1:** Auswirkung der Störbeschleunigungen auf den Orbit eines GPS-Satelliten (Seeber, 2003).

dass die einfacheren Näherungsformeln nach Seidelmann (1992) und die der MICE Software zusammen passen. Die komplexere Modellierung nach Montenbruck und Gill (2000) und die Serie TE405 nach Irwin und Fukushima (1999) passen ebenfalls zueinander. Zwischen diesen aufwendigeren Methoden und den einfacheren Formeln ist eine deutliche Differenz von bis zu 20  $\mu$ s vorhanden, die in Abbildung 2.3c dargestellt ist. Die Transformation (2.6) nach Seidelmann (1992) entspricht bis auf etwa 1.5  $\mu$ s der Zeitdifferenz aus der Berechnung mit der MICE Software. Der Verlauf dieser Differenz über ein Jahr hinweg wird in Abbildung 2.3d gezeigt. Durch die Vernachlässigung kurzperiodischer Schwankungen erreicht MICE eine Genauigkeit von 30  $\mu$ s (Acton, 1996). Für die Berechnung der Zeitdifferenz aus Chebyshev Polynomen nach Irwin und Fukushima (1999) wird eine Genauigkeit von < 1 ns angegeben (McCarthy, 2011).

Der Effekt dieser unterschiedlichen Methoden der Transformation der Zeit zwischen TT und TDB wird in Abschnitt 4.1 gezeigt.

## 2.3 Satellitenbahnen

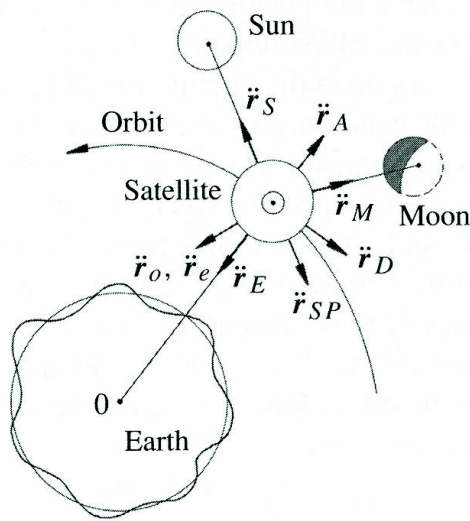
Die ungestörte Satellitenbahn kann durch sechs Parameter beschrieben werden. Dies können zum Beispiel die Position und Geschwindigkeit eines Satelliten oder die Keplerschen Bahnelemente sein. In dieser Arbeit werden die Positionen von Satelliten mittels der numerischen Integration unter Berücksichtigung von Bahnstörungen bestimmt. Für die Berechnung der Position  $\vec{r}(t)$  eines Satelliten zum Zeitpunkt  $t$  sind die Position  $\vec{r}(t - \Delta t)$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}(t - \Delta t)$  des Zeitpunktes  $t - \Delta t$  erforderlich. Die Berechnung der Position eines Satelliten auf einer ungestörten Bahn erfolgt anhand der Bewegungsgleichung, z. B. nach (Seeber, 2003)

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(t) &= \vec{r}(t - \Delta t) + \dot{\vec{r}}(t - \Delta t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t - \Delta t)\Delta t^2, \\
 \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{r}}(t - \Delta t) + \ddot{\vec{r}}(t - \Delta t)\Delta t, \\
 \ddot{\vec{r}}(t) &= -\frac{GM}{r(t - \Delta t)^3}\vec{r}(t - \Delta t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

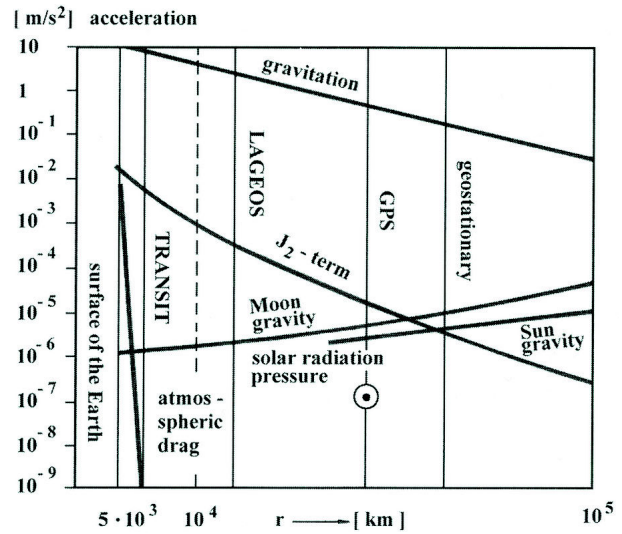
mit

$$r = \|\vec{r}\|.$$





(a) Auf einen Satelliten einwirkende Störbeschleunigungen.



(b) Größenordnungen verschiedener auf Satelliten wirkende Störbeschleunigungen in Abhängigkeit der Höhe.

**Abbildung 2.4:** Störbeschleunigungen und Größenordnungen nach Seeber (2003).

In Abhängigkeit der Satellitenhöhe wirken, wie in Abbildung 2.4b gezeigt, verschiedene Störbeschleunigungen auf den Satelliten. Die Tabelle 2.1 zeigt eine Aufstellung der Größenordnungen der Störbeschleunigungen, die auf einen GPS Satelliten wirken. Diese Störkräfte  $\ddot{a}(t)$  müssen in der Integration (2.7) berücksichtigt werden:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{GM}{r(t-\Delta t)^3}\vec{r}(t-\Delta t) + \ddot{a}(t). \quad (2.8)$$

Dabei ist  $\ddot{a}(t)$  nach Seeber (2003) die Summe aller in Abbildung 2.4a gezeigten auf den Satelliten wirkenden Störbeschleunigungen

$$\ddot{a}(t) = \ddot{\vec{r}}_E + \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_M + \ddot{\vec{r}}_S + \ddot{\vec{r}}_e + \ddot{\vec{r}}_o + \ddot{\vec{r}}_{sp} + \ddot{\vec{r}}_D + \dots$$

mit

- $\ddot{\vec{r}}_E$  : inhomogenes Schwerfeld der Erde,
- $\ddot{\vec{r}}_M$  : Anziehungskraft Mond,
- $\ddot{\vec{r}}_S$  : Anziehungskraft Sonne,
- $\ddot{\vec{r}}_e$  : Erdgezeiten,
- $\ddot{\vec{r}}_o$  : Ozeangezeiten,
- $\ddot{\vec{r}}_{sp}$  : Strahlungsdruck der Sonne,
- $\ddot{\vec{r}}_A$  : Albedo,
- $\ddot{\vec{r}}_D$  : Atmosphärischer Widerstand.

In dieser Arbeit werden nur die gravitativen Störbeschleunigungen aufgrund der Himmelskörper betrachtet. Dieser Effekt wird im nachfolgenden Abschnitt 2.4 genauer beschrieben.

## 2.4 Direkte und indirekte Gezeiten

Die Planeten sowie Sonne und Mond haben einen direkten und einen indirekten gravitativen Einfluss auf einen Satelliten. Der direkte Einfluss  $\ddot{\mathbf{a}}_{\text{direkt}}$  eines dritten Körpers  $i$  ergibt sich aus der Anziehung der Massen nach Newtons Gravitationsgesetz. Aufgrund der Entfernung können die Massen nach Montenbruck und Gill (2000) als Punktmassen angenommen werden:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\text{direkt}} = \sum_i GM_i \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} - \frac{\vec{r}_i}{\|\vec{r}_i\|^3} \right) \quad (2.9)$$

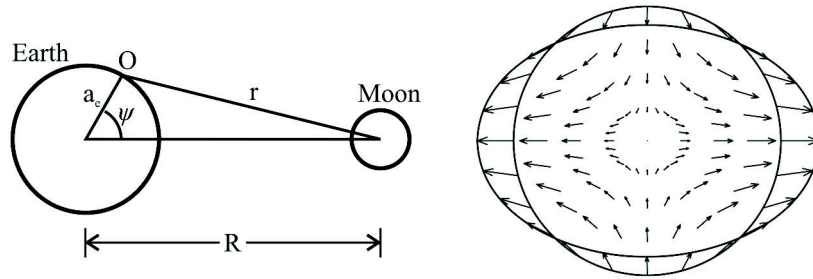
mit

$\vec{r}$ : geozentrischer Positionsvektor des Satelliten,

$\vec{r}_i$ : geozentrischer Positionsvektor des dritten Körpers,

$GM_i$ : Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des dritten Körpers.

Für den Fall, dass der direkte Einfluss mehrerer Himmelskörper berechnet werden soll, ergibt sich der gesamte Effekt aus der Summe der einzelnen Beschleunigungen.



**Abbildung 2.5:** Wirkung der Gezeitenkräfte nach Agnew (2007) mit der Darstellung der Geometrie zwischen Erde, Mond und einem Punkt an der Erdoberfläche links im Bild und den resultierenden Gezeitenkräften auf der rechten Seite.

Der indirekte Einfluss der Himmelskörper auf einen Satelliten ergibt sich aus der Deformation der Erde aufgrund der Gezeitenkräfte. Das Gezeitenpotential  $V_{\text{tot}}$  an der Erdoberfläche wird berechnet nach Agnew (2007) unter Nutzung der Legendre Polynome  $P_n$  von Grad  $n$  und des in Abbildung 2.5 gezeigten Winkels  $\psi_i$  zwischen dem Punkt  $O$  auf der Oberfläche und einem Himmelskörper:

$$V_{\text{tot}} = \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r_i} \right)^n P_n(\cos \psi_i)$$

mit

$$\cos \psi_i = \frac{\langle \vec{r}_O, \vec{r}_i \rangle}{r_O r_i},$$

$a_e$ : mittlerer Erdradius.

Der Term für  $n = 0$  ist konstant, die später benötigte Ableitung ist somit Null und kann in der Darstellung vernachlässigt werden. Der Term für  $n = 1$  entspricht der Beschleunigung

des Körpers im Geozentrum. Zur Berechnung der Gezeiten wird dieser Term von der Anziehungskraft des Körpers an der Oberfläche der Erde abgezogen. Durch Vernachlässigung dieser Terme ergibt sich

$$V_{tid} = \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r_i}\right)^n P_n(\cos \psi_i). \quad (2.10)$$

Der in dem Faktor  $(a_e/r_i)^n$  enthaltene Abstand des Himmelskörpers zum Geozentrum zeigt bereits, dass das Gezeitenpotential entfernter Himmelskörper nur einen geringen Einfluss hat und die Berechnung nur für niedrige Grade  $n$  notwendig ist.

Bedingt durch die Deformation der Erde aufgrund der Gezeiten unterliegt auch das Schwerfeld der Erde, in dem sich der Satellit bewegt, zeitlichen Änderungen. Diese Änderung des Schwerfeldes wird als indirekte Gezeiten bezeichnet.

Die Abbildung 2.5 zeigt beispielhaft die Wirkung der Gezeitenkräfte des Mondes. Die Gezeitenbeschleunigung ergibt sich aus der Differenz der Gravitationsbeschleunigung des Himmelskörpers an einem Punkt  $O$  und der Gravitationsbeschleunigung im Geozentrum. Die Gezeitenkräfte der anderen Himmelskörper sind deutlich geringer als die des Mondes. Die Sonne erreicht etwa 46%, die Venus 0.005% und Jupiter 0.0006% des Einflusses des Mondes (Agnew, 2007).

Die durch die Gezeitenkräfte hervorgerufene Deformation der Erde erzeugt an der Erdoberfläche ein Deformationspotential, das proportional zu dem Gezeitenpotential (2.10) ist (Wenzel, 1997):

$$V_{Def} = \sum_i \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r_i}\right)^n P_n(\cos \psi_i),$$

mit

$k_n$  : Love Zahl von Grad  $n$ .

Das Deformationspotential an der Position des Satelliten wird berechnet nach

$$V_{Def} = \sum_i \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi_i). \quad (2.11)$$

Der Punkt  $O$  auf der Oberfläche ist nun der Fußpunkt des Satelliten auf der Oberfläche. Bedingt durch den Faktor  $(a_e/r)^{n+1}$  wird der Einfluss der indirekten Gezeiten mit steigender Entfernung  $r$  des Satelliten zum Geozentrum und höherem Grad  $n$  der Reihenentwicklung geringer. Die Gezeitenbeschleunigung ergibt sich aus der Ableitung des Deformationspotentials (Wenzel, 1997):

$$\ddot{a}_{indirekt} = \frac{\partial V_{Def}}{\partial \vec{r}}. \quad (2.12)$$

Die Berechnung des Effekts in einer Reihenentwicklung bis zu Grad  $n = 2$  erfolgt nach Melchior (1983) und Rothacher (1992) unter Nutzung der Ableitungen der Legendre Polynome  $P'_n$  von Grad  $n$  und des Winkels  $\psi_i$  zwischen Satellit, Geozentrum und Himmelskörper  $i$ :

$$\ddot{a}_{indirekt} = k_2 \frac{a_e^5}{r^4} \sum_i \frac{GM_i}{r_i^3} \left( P'_2(\cos \psi_i) \frac{\vec{r}}{r} - P'_3(\cos \psi_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i} \right) \quad (2.13)$$

mit

$$P_2'(\cos \psi_i) = 3 \cos \psi_i,$$

$$P_3'(\cos \psi_i) = \frac{3}{2} (5 \cos^2 \psi_i - 1),$$

$$k_2 \approx 0.298, \text{ Love Zahl von Grad 2.}$$

Für den Einfluss aller Himmelskörper wird auch hier die Summe der Störbeschleunigungen der einzelnen Himmelskörper gebildet. Dies berücksichtigt nach Wenzel (1997) 98% des gesamten Effektes. Die verbleibenden 2% erfordern höhere Grade der Reihenentwicklung. Die Produkte aus Gravitationskonstante und Masse der Himmelskörper  $GM_i$  sind in den Header Dateien der Chebyshev Polynomkoeffizienten des JPL enthalten.

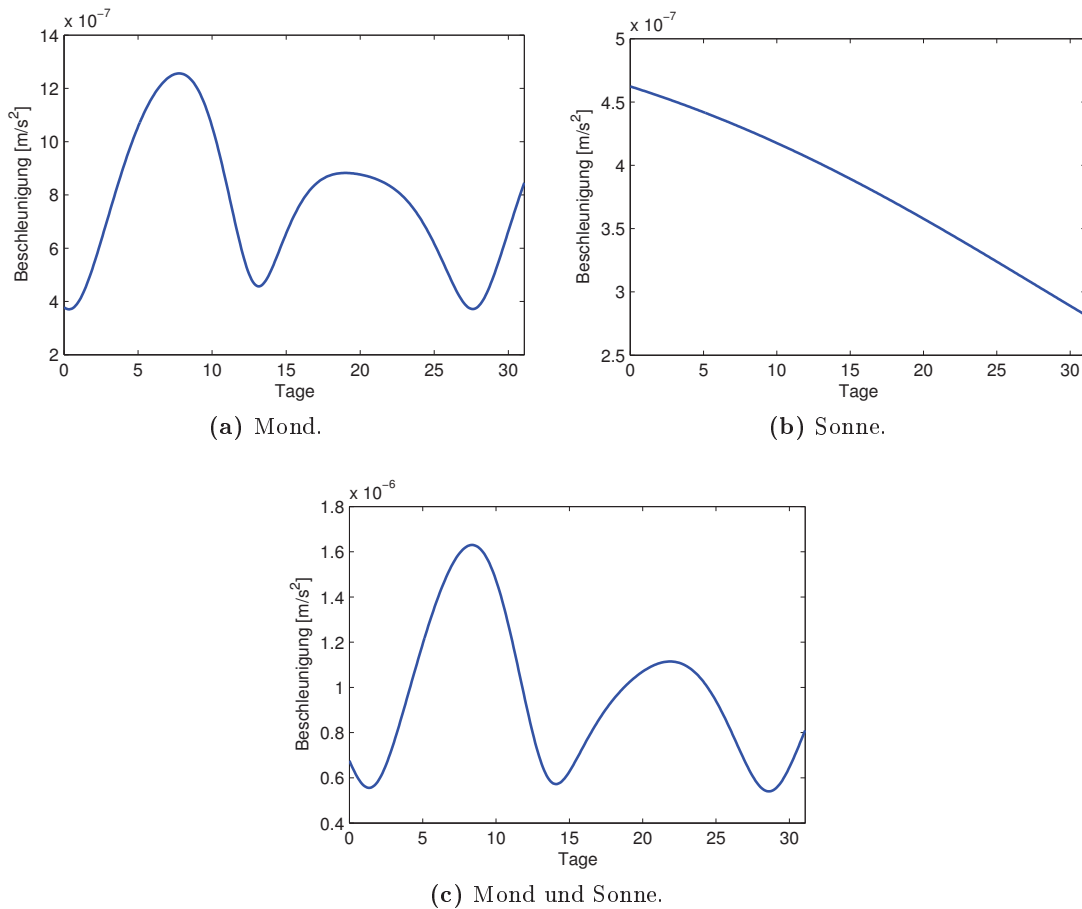
Die Berechnung der Störbeschleunigungen höheren Grades erfolgt durch Ableitung von (2.11) nach den raumfesten geozentrischen Koordinaten des Satelliten gemäß (2.12). Die Ableitungen bis Grad 4 der Reihenentwicklung sind im Anhang B aufgeführt.

Die Abbildung 2.6 zeigt am Betrag der direkten und indirekten Gezeiten die Zusammensetzung der Gezeiten von Sonne und Mond an einer im geozentrischen System unbewegten Position in 470 km Höhe. Der Mond umrundet in diesem Zeitraum die Erde einmal. Wie in Abbildung 2.5 dargestellt ist, sind die resultierenden Kräfte auf der Achse Geozentrum – Himmelskörper maximal. Wenn der Satellit genau zwischen Mond und Erde ist, erreicht die Beschleunigung in Abbildung 2.6a das erste Maximum. Das zweite geringere Maximum wird erreicht, wenn der Mond genau an der entgegengesetzten Position auf der Umlaufbahn ist. In der Gezeitenbeschleunigung der Sonne in Abbildung 2.6b zeigt sich dieses Verhalten nicht, da sich der Satellit nicht bewegt (außer zusammen mit der Erde um die Sonne). Das periodische Verhalten wird erst in der Darstellung eines ganzen Jahres in Abbildung A.3 auf Seite 67 in Anhang A sichtbar. Die Abbildung 2.6c zeigt schließlich die Summe der Gezeitenkräfte von Sonne und Mond.

Die Abbildung 2.7 führt beispielhaft die Größenordnungen der durch Sonne und Mond verursachten direkten und indirekten Erdgezeiten für einen Monat auf. Die Erdgezeiten wurden an einem simulierten Satelliten auf einer den Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Satelliten ähnlichen Bahn in 470 km Höhe bestimmt. Die Berechnung wurde einmal für einen Satelliten, der sich auf einer ungestörten kreisförmigen Bahn bewegt und für einen festen, im raumfesten geozentrischen System unbewegten Punkt auf dieser Bahn durchgeführt. In diesem zweiten Fall zeigt sich die Variation der Gezeitenkräfte durch die Änderung der Position der Himmelskörper ohne den Einfluss der Satellitenbewegung um die Erde. Die indirekten Gezeiten wurden bis Grad 4 berücksichtigt. Die Abbildungen 2.7a, 2.7c und 2.7e zeigen den Effekt an einer im inertialen erdfesten System unbewegten Position. Die Gezeitenbeschleunigungen an der unbewegten Position beinhalten eine 14 tägige Periode, die bereits in Abbildung 2.6 als Betrag dargestellt ist.

Die Abbildungen 2.7b, 2.7d und 2.7f visualisieren die direkten und indirekten Gezeiten an der Position des bewegten Satelliten. Hier wird in den Beschleunigungen des Satelliten auf einer Bahn um die Erde zusätzlich der Einfluss des Bahnumlaufes des Satelliten deutlich.

Die Abbildung 2.8 stellt die selben Größen wie Abbildung 2.7 dar. Im Unterschied zu Abbildung 2.7 werden die Gezeiten jetzt aus allen Himmelskörpern außer Sonne und Mond berechnet. Die Bilder der Beschleunigungen an der unbewegten Positionen zeigen den sich

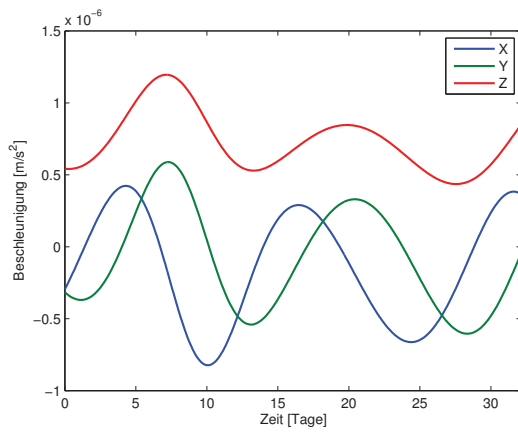


**Abbildung 2.6:** Betrag der einzelnen Gezeitenbeschleunigungen von Sonne und Mond sowie die Summe.

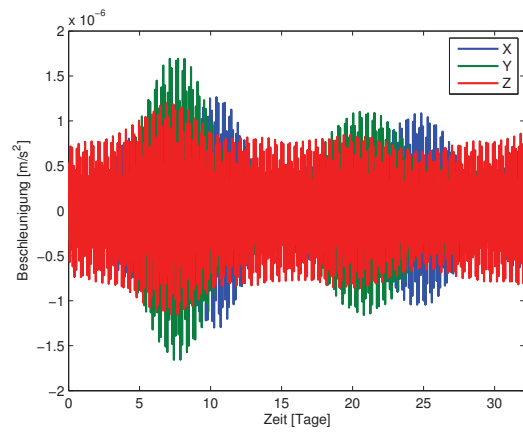
langsam ändernden Einfluss der Himmelskörper. In den Abbildungen des bewegten Satelliten ist wiederum der Bahnlauf des Satelliten enthalten.

Die Größenordnungen der Gezeiten aller Himmelskörper außer Sonne und Mond ist mit etwa  $4 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2$  deutlich geringer als die Gezeiten verursacht durch Sonne und Mond. Diese betragen im gleichen Zeitraum ungefähr  $1.5 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ . Die Abbildung A.3 zeigt die Gezeitenbeschleunigungen einzelner ausgewählter Himmelskörper.

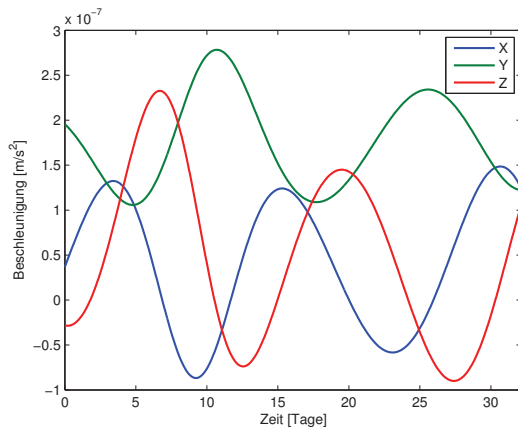
Nach Agnew (2007) ist es für höchste Genauigkeiten bereits ausreichend das Gezeitenpotential bis zu Grad  $n = 4$  für Sonne und Mond zu berechnen, da bereits der Einfluss dieser Grad  $n = 4$  Gezeiten nur von hochpräzisen Gravimetern erfasst werden kann. Wenzel (1997) gibt an, dass für die Erstellung von Gezeitenpotentialkatalogen, wie etwa der Gezeitenpotentialkatalog HW95 (Hartmann und Wenzel, 1995), der Mond bis zu Grad  $n = 6$ , die Sonne bis Grad  $n = 3$  und die Planeten nur bis Grad  $n = 2$  berücksichtigt werden (Torge, 2001).



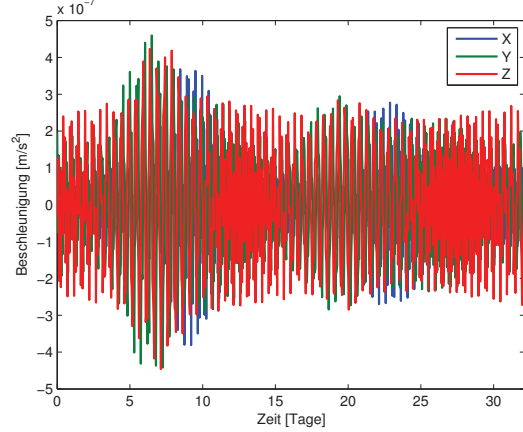
(a) Direkte Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.



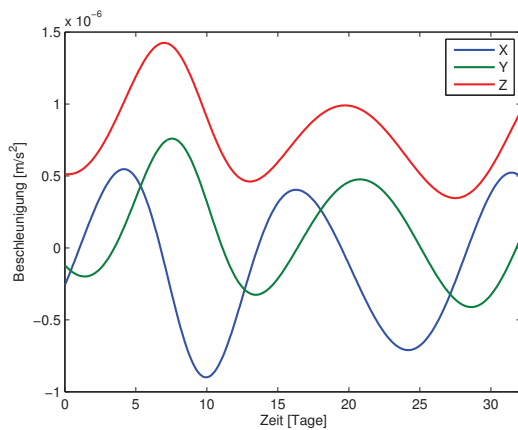
(b) Direkte Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.



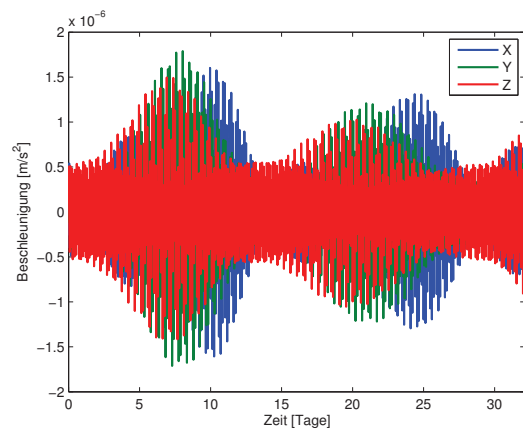
(c) Indirekte Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.



(d) Indirekte Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.

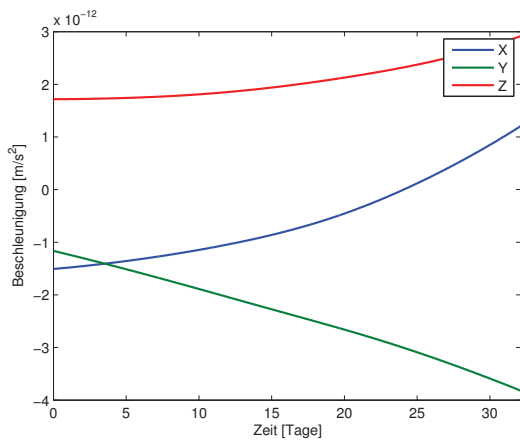


(e) Summe direkter und indirekter Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.

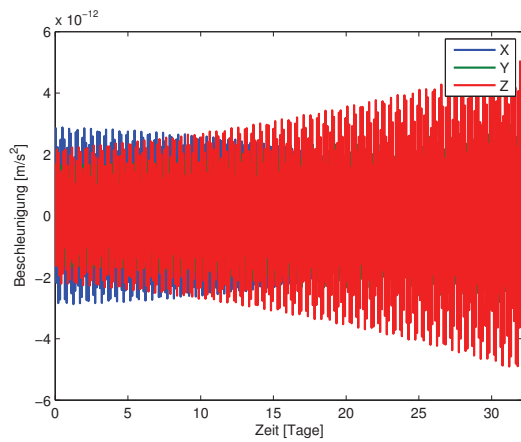


(f) Summe direkter und indirekter Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.

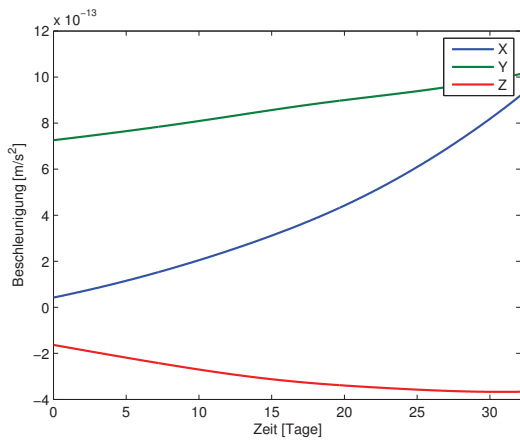
**Abbildung 2.7:** Direkte und indirekte Erdgezeiten erzeugt durch Sonne und Mond im Verlauf eines Monats an einer unbewegten Position (links) und an Stelle eines bewegten Satelliten (rechts).



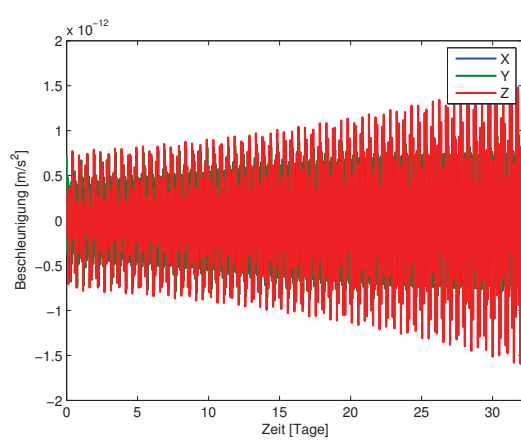
(a) Direkte Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.



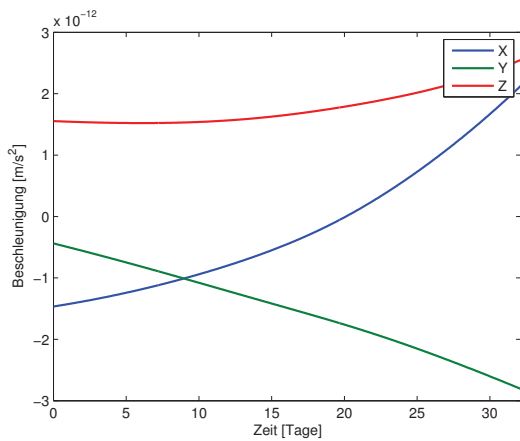
(b) Direkte Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.



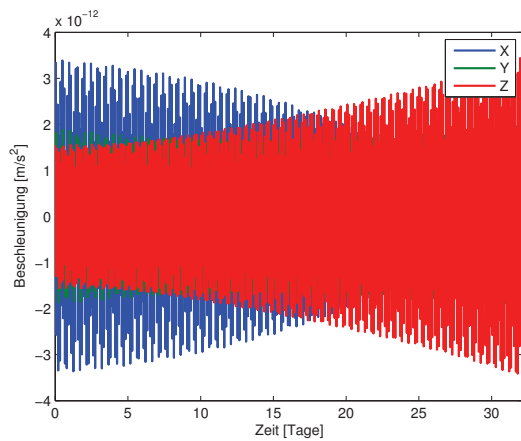
(c) Indirekte Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.



(d) Indirekte Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.



(e) Summe direkter und indirekter Erdgezeiten an einer unbewegten Satellitenposition.

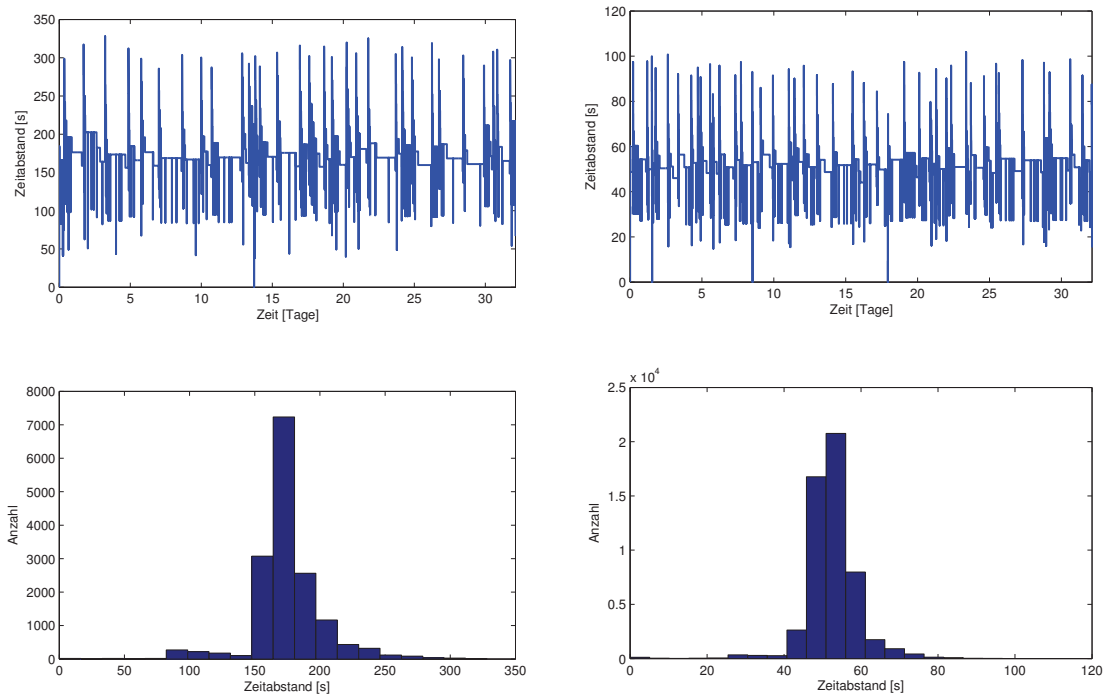


(f) Summe direkter und indirekter Erdgezeiten an einer bewegten Satellitenposition.

**Abbildung 2.8:** Direkte und indirekte Erdgezeiten erzeugt durch alle Himmelskörper ohne Sonne und Mond im Verlauf eines Monats an einer unbewegten Position (links) und an Stelle eines bewegten Satelliten (rechts).

## 2.5 Lösung von Differentialgleichungen mit MATLAB

MATLAB enthält verschiedene Funktionen, die die Lösung von Differentialgleichungen erlauben (Schweizer, 2009). In dieser Arbeit wird in der Regel die Funktion `ode113.m` zur numerischen Integration der Bewegungsgleichung genutzt. Diese Funktion setzt den Adams-Bashforth-Moulton Algorithmus zur Lösung Differentialgleichungssysteme erster Ordnung ein (Schweizer, 2009). Die Beschreibung dieses Mehrschritt-Algorithmus zur numerischen Orbit Bestimmung findet sich unter anderem in Xu (2008). Der Integrator `ode113.m` erhält die zu lösende Differentialgleichung in Form eines function handle, das den Zugriff auf MATLAB Funktionen erlaubt, oder eines MATLAB m-files. Durch den Befehl `odeset` können Optionen der Funktion, insbesondere die Toleranzen der Integration, festgelegt werden. Die Beschreibung der verwendeten Methoden befindet sich auf Seite 81ff. in Abschnitt C.2.



(a) Relative und absolute Genauigkeit  $10^{-6}$  mit einer mittleren Schrittweite von 171 Sekunden.

(b) Relative und absolute Genauigkeit  $10^{-13}$  mit einer mittleren Schrittweite von 53 Sekunden.

**Abbildung 2.9:** Variable Schrittweite des `ode113.m` Integrators in Abhängigkeit verschiedener absoluter und relativer Genauigkeiten der Integration.

Die Integration von Funktionen durch in MATLAB enthaltene Prozeduren, wie `ode113.m` oder `ode45.m`, geschieht mit variabler Schrittweite. Die Schrittweite ist abhängig von der gewählten absoluten und relativen Toleranz der Integration. Werden die Toleranzen in einem Schritt überschritten, so wird die Schrittweite der Integration verkleinert. Werden die Toleranzen eingehalten, kann die Schrittweite vergrößert werden.

Die Abbildung 2.9 zeigt die wechselnde Schrittweite der Integration im Verlauf der Berechnung einer simulierten, der GRACE Satellitenbahn ähnlichen, Bahn über einen Monat hinweg. In den Bildern 2.9a und 2.9b wurden unterschiedliche relative und absolute Genauigkeiten der



Integration angegeben. Diese Genauigkeiten beeinflussen die Schrittweiten zwischen den Stützstellen in der Integration. Bei der Genauigkeit von  $10^{-13}$  beträgt die mittlere Schrittweite 53 s. Die maximale Schrittweite liegt bei etwa 100 s. Im Gegensatz dazu ist die durchschnittliche Schrittweite bei der wesentlich geringeren Genauigkeit  $10^{-6}$  171 s mit maximalen Werten von über 300 s. Die Standardeinstellung in MATLAB ist  $10^{-6}$  für die absolute und  $10^{-3}$  für die relative Genauigkeit (Schweizer, 2009).

Der Zeitabstand der zu berechnenden Positionen hat keinen Einfluss auf die Schrittweite der Integration, da die Lösungen nur am Ende zwischen den Stützstellen der Integration interpoliert werden.



# Kapitel 3

## Praktische Umsetzung

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der Position von Himmelskörpern vorgestellt. Zu diesem Zweck werden eigene Methoden beschrieben und durch das JPL bereitgestellte Programme und Dienste vorgestellt. Im Anschluss wird die Berechnung der Gezeitenbeschleunigung ausgehend von den Positionen der Himmelskörper beschrieben. Die erstellten Programme werden in Anhang C vorgestellt.

### 3.1 Positionen der Himmelskörper

Die Berechnung der Störbeschleunigungen aufgrund der Himmelskörper erfordert zunächst die Kenntnis der geozentrischen Positionen dieser Objekte. Die Positionen lassen sich mit verschiedenen Methoden und daraus resultierenden Genauigkeiten modellieren. Im Folgenden sollen die verschiedenen Umsetzungen der Berechnung vorgestellt werden.

#### 3.1.1 Chebyshev Polynominterpolation

Bei der in dieser Arbeit verwendeten Methode zur Berechnung der Positionen von Himmelskörpern wird auf Ephemeriden des JPL zurückgegriffen. Bei der Auswertung dieser Koeffizienten handelt es sich um die Polynominterpolation nach Chebyshev, deren theoretischer Hintergrund in Abschnitt 2.1 kurz dargestellt ist. Die Berechnung einer Position erfolgt durch

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n_{max}} a_n T_n(t). \quad (3.1)$$

Die Koeffizienten  $a_n$  werden durch das JPL bereitgestellt, die Berechnung der Chebyshev Polynome  $T_n$  bis maximal Grad 13 erfolgt nach (2.2) oder (2.4). Die Koeffizienten beziehen sich auf die Zeit in TDB.

Das JPL veröffentlicht die Chebyshev Koeffizienten (im folgenden als JPL Koeffizienten bezeichnet) in verschiedenen Serien<sup>1</sup>, die diversen Aufgaben dienen, verschiedene Referenzrahmen nutzen und denen unterschiedliche Beobachtungen zugrunde liegen. Des Weiteren sind

---

<sup>1</sup>[http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet\\_eph\\_export](http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export).

Mond	Merkur	Venus	Erde Mars	Jupiter Saturn	Uranus Neptun Pluto
< 1 m	einige km	200m	300 m	einige 10 km	mehr als einige 10 km

**Tabelle 3.1:** Geschätzte Genauigkeiten der Interpolation der baryzentrischen Positionen der Planeten und Plutos und der geozentrischen Position des Mondes der Serie DE421 nach Folkner u. a. (2009).

die in der Integration der Orbits der Himmelskörper berücksichtigten Asteroiden nicht identisch und variieren in Anzahl und Masse. Die Koeffizienten der DE400er Serien sind an dem International Celestial Reference Frame (ICRF) orientiert. Diese Serien ergeben Positionen der Himmelskörper im Barycentric Celestial Reference System (BCRS), das Koordinatensystem ist also im SSB gelagert. Einige dieser Serien dienen der Durchführung einzelner Satellitenmissionen, wie die Serie DE423 für die Messenger Mission zum Merkur. Einige weitere Serien dienen der Bestimmung der Planetenpositionen mit geringerer Genauigkeit für besonders lange Zeiträume, wie z.B. die Serie DE406 für den Zeitraum von 3000 v. Chr. bis 3000 n. Chr..

In die gemeinsame Integration der Ephemeriden von Sonne, Mond und Planeten am JPL fließen unterschiedlichste Beobachtungen ein. Es werden beispielsweise optische Beobachtungen der Planeten, Entfernungsmessungen zu Planeten mit Radar, Lunar Laser Ranging (LLR) oder Very Long Baseline Interferometry (VLBI) und Dopplereferenzmessungen zu Raumsonden in Umlaufbahnen um Planeten genutzt. Zusätzlich zu den Planeten werden auch bis zu 300 Asteroiden berücksichtigt, da diese die Bahnen der Planeten ebenfalls beeinflussen. Aufgrund der gemeinsamen Integration führen neue Beobachtungen oder Annahmen über die Massen von Planeten und Asteroiden zu Änderungen der Bahnen aller Himmelskörper (Standish, 2000).

In dieser Arbeit werden die Serien DE405 (Standish, 1998a) und DE421 (Folkner u. a., 2009) eingesetzt, da diese die derzeit genauesten Berechnungen der Planetenpositionen ermöglichen. Die Serie DE405 aus dem Jahr 1997 hat eine Gültigkeit von 1600 n. Chr. bis 2200 n. Chr. und wird ebenfalls bei der Berechnung der Himmelskörperpositionen durch den HORIZONS-Service (siehe 3.1.2) verwendet. In Kapitel 4 werden die Ergebnisse der eigenen Methoden mit denen des HORIZONS-Webdienstes verglichen. Die Serie DE421 aus dem Jahr 2008 hat eine Gültigkeit von dem Jahr 1900 bis zum Jahr 2053. Die Serie DE421 hat gegenüber der Serie DE405 zahlreiche Verbesserungen aufgrund neuer Beobachtungen erfahren (Folkner u. a., 2009). So konnten durch aktuelle Missionen, z.B. zu Mars (Pathfinder) und Venus (Venus Express), und die Beobachtung dieser Raumsonden mittels VLBI und Entfernungsmessungen die Orbits der Planeten verbessert werden. Das Modell der Bahn des Mondes wurde durch weitere LLR Beobachtungen verbessert. Die Tabelle 3.1 zeigt die geschätzten Genauigkeiten der Planetenposition der Serie DE421 nach Folkner u. a. (2009). Aufgrund der höheren Aktualität dieser Reihe sollte die ältere DE405 Serie nur zum Test von eigenen Methoden und dem Vergleich mit der unabhängigen Berechnung des HORIZONS-Webinterface genutzt werden. Das DE421 Modell sollte in der Anwendung der Orbitintegration von Satelliten verwendet werden um die Störbeschleunigungen aufgrund der Himmelskörper zu berechnen. In Abschnitt 4.2.3 wird ein direkter Vergleich der Positionen aus beiden Ephemeriden Reihen durchgeführt.

Unabhängig von der verwendeten Serie ist der Aufbau der Daten und das Vorgehen bei der Berechnung von Positionen identisch. Eine Serie besteht jeweils aus einer Header Datei, die neben Meta Daten auch eine Anzahl an Konstanten, wie die Länge einer Astronomischen Einheit, das Erde-Mond Massenverhältnis und das Produkt aus Masse und Gravitationskonstante

Objekt	Koeffizienten	Subintervalle
Merkur	14	4
Venus	10	2
EMB	13	2
Mars	11	1
Jupiter	8	1
Saturn	7	1
Uranus	6	1
Neptun	6	1
Pluto	6	1
Mond (geoz.)	13	8
Sonne	11	2
Nutation	10	4
Libration	10	4

**Tabelle 3.2:** Übersicht der Chebyshev Polynomkoeffizienten der einzelnen Objekte der Serie DE405 und DE421.

der Himmelskörper enthält, und Daten Dateien, die die Chebyshev Polynomkoeffizienten enthalten. Die Serie DE421 besteht aus einer einzigen Daten Datei, wohingegen die Serie DE405 jeweils eine Datei mit Koeffizienten für 20 Jahre bereitstellt. In den Daten Dateien sind die Koeffizienten jeweils in Intervallen zu 32 Tagen zusammengefasst.

In Abhängigkeit von der Bahn des Objektes ist dieses 32 Tage Intervall in bis zu acht Subintervalle unterteilt. Die Tabelle 3.2 zeigt eine Übersicht der Anzahl der Koeffizienten und Subintervalle der einzelnen Objekte, wobei EMB das Erde-Mond Baryzentrum bezeichnet. Aus den Koeffizienten werden die Koordinaten der Objekte in Kilometern bezogen auf das Baryzentrum des Sonnensystems berechnet. Die Position des Mondes ist nur in geozentrischen Koordinaten gegeben. Zusätzlich zu den Positionen sind in den Daten noch Koeffizienten zur Berechnung von Nutation und Libration enthalten. Insgesamt enthält ein Datensatz der Serien DE405 und DE421 für ein 32 Tage Intervall 1016 Koeffizienten. Der Aufbau eines Datensatzes wird in Anhang D auf Seite 89f. genauer beschrieben.

Die Position der Erde ist nur indirekt in den Koeffizienten des Erde-Mond Baryzentrums enthalten. Mit Hilfe des Erde-Mond Massenverhältnisses  $\alpha$ , das in den Header Dateien der Chebyshev Polynome enthalten ist, kann nach Markwardt (2001) die Position der Erde berechnet werden:

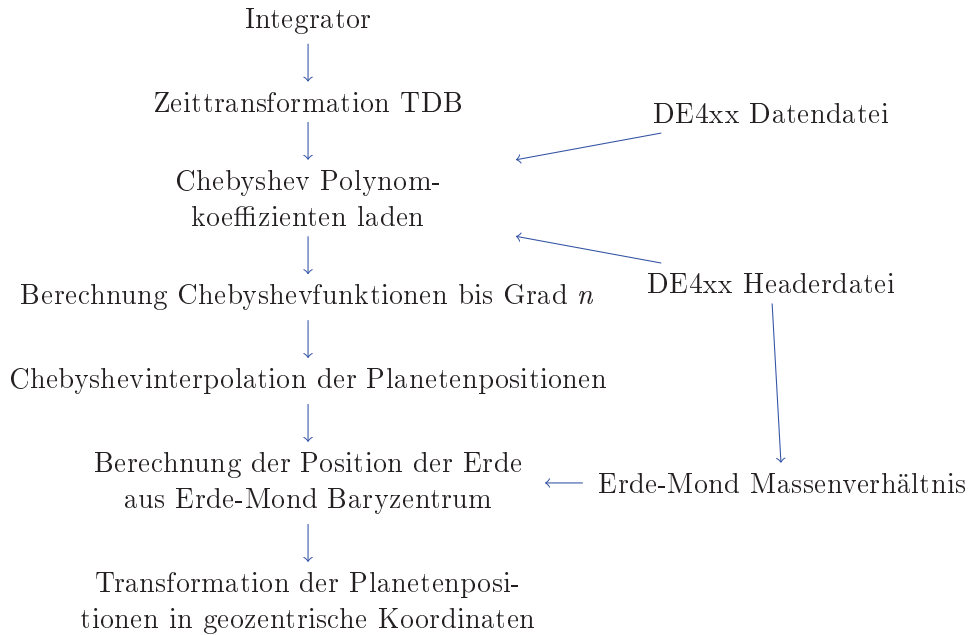
$$\vec{r}_{Erde} = \vec{r}_{EMB} - \alpha \vec{r}_{Mond}. \quad (3.2)$$

Neben den Koeffizienten des JPL gibt es weitere Serien, wie z.B. die Serien EPM 2000 und EPM 2008 des Institute of Applied Astronomy of Russian Academy of Sciences (Pitjeva, 2001, 2008), die hier nicht weiter betrachtet werden.

### Positionen aus Chebyshev Koeffizienten des JPL

Anhand der JPL Koeffizienten kann für jeden Zeitpunkt die Position aller enthaltenen Himmelskörper berechnet werden. Im Verlauf der Integration des Satellitenorbits werden die Positionen der Objekte zu beliebigen Zeitpunkten innerhalb des Zeitintervalls der Integration

benötigt. Zu jedem Zeitpunkt der Orbitintegration des Satelliten sind zur Berechnung der Positionen der Himmelskörper die in Abbildung 3.1 gezeigten Schritte notwendig.



**Abbildung 3.1:** Ablaufschema einer einzelnen Positionsbestimmung aus der Orbitintegration heraus.

Die Zeittransformation erfolgt nach einer der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Methoden aus Seidelmann (1992), Montenbruck und Gill (2000) oder Irwin und Fukushima (1999). Für den Vergleich mit den Lösungen der MICE Software und des HORIZONS-Webinterface wird in dieser Arbeit die Umrechnung nach Formel (2.6) genutzt.

Das Laden der Chebyshev Polynomkoeffizienten erfordert sowohl das Einlesen der Header als auch der Daten Datei. Die Header Datei enthält die im weiteren Verlauf notwendigen Konstanten:

- die Definition der Astronomischen Einheit,
- $GM_i$  der Himmelskörper und
- das Erde-Mond Massenverhältnis.

Des Weiteren enthält die Header Datei die in Tabelle 3.2 angegebenen Informationen über die Anzahl der Polynomkoeffizienten und Subintervalle, die für die Zuordnung der geladenen Koeffizienten zu den richtigen Objekten notwendig sind. In den hier verwendeten Serien DE405 und DE421 ist diese Anzahl jeweils identisch.

Die Verwendung anderer Serien mit einer abweichenden Anzahl der Koeffizienten oder Subintervalle ist ebenso möglich. Dabei ist jedoch insbesondere der Referenzrahmen der Serie zu beachten, da derzeit nur die DE400er Serien am ICRF orientiert sind.

Die Berechnung der Chebyshev Funktionen erfolgt nach der geschlossenen Darstellung (2.2). Die Polynomkoeffizienten sind in dem Intervall  $[-1, 1]$  gültig, daher muss der Zeitpunkt der Berechnung mit (2.3) in dieses Intervall transformiert werden.

Die Berechnung der Positionen in einem im SSB gelagerten Koordinatensystem und die Koordinaten des Mondes in geozentrischen Koordinaten erfolgt nach der Reihenentwicklung (2.5) mit den Koeffizienten  $a_n$  und den Chebyshev Funktionen  $T_n$ .

Die im SSB gelagerten Koordinaten der Erde ergeben sich nach (3.2) aus den Positionen von Erde-Mond Baryzentrum und Mond sowie dem Erde-Mond Massenverhältnis aus der Header Datei. Die Transformation der Positionen im SSB in das geozentrische Koordinatensystem Geocentric Celestial Reference System (GCRS) erfolgt gemäß

$$\vec{r}_i^{geo} = \vec{r}_i^{SSB} - \vec{r}_E^{SSB}, \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{r}_i^{geo} &: \text{geozentrischer Positionsvektor von Körper } i, \\ \vec{r}_i^{SSB} &: \text{baryzentrischer Positionsvektor von Körper } i, \\ \vec{r}_E^{SSB} &: \text{baryzentrischer Positionsvektor der Erde.} \end{aligned}$$

Diese Schritte sind für jeden Zeitpunkt der Orbitintegration durchzuführen. Dieses Vorgehen ist relativ zeitaufwendig. Da die Chebyshev Koeffizienten nur eine begrenzte zeitliche Gültigkeit haben, müssen diese regelmäßig neu geladen werden. Zusätzlich zu dem Laden der Koeffizienten für ein 32 Tage Intervall müssen für jeden Berechnungspunkt die Koeffizienten des richtigen Subintervalls ausgewählt und in Abhängigkeit der Länge des Subintervalls und des Grades der Reihenentwicklung mit dem passenden Chebyshev Polynom ausgewertet werden.

### Positionen aus Spline Interpolation

Als Alternative zu den Chebyshev Koeffizienten können eigene Koeffizienten aus den Bahnen der Himmelskörper berechnet werden. Die eigenen Koeffizienten können in der Gültigkeit an den Zeitraum der Orbitintegration angepasst werden, so dass ein Satz Koeffizienten für die gesamte Integration verwendet werden kann. Bei den Chebyshev Koeffizienten stimmt die Gültigkeit in der Regel nicht mit dem Zeitraum der Orbitintegration überein.

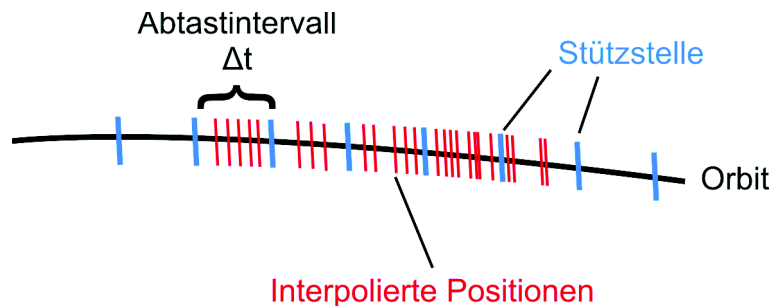


Abbildung 3.2: Interpolation des Orbits eines Planeten.

Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit die Orbits der Himmelskörper durch Splines approximiert. Die Bahnen der Himmelskörper werden, wie in Abbildung 3.2 gezeigt, durch äquidistante Stützstellen in einem Zeitintervall  $\Delta t$  berechnet. Diese Stützstellen werden aus den

Koeffizienten der Serien DE405 oder DE421 einmalig für den gesamten Zeitraum der Orbitintegration berechnet. Aus diesen Stützstellen werden die Bahnen der Himmelskörper mittels MATLAB Funktionen durch kubische Splines approximiert. Um Splines für Positionen im geozentrischen System zu erhalten, werden die baryzentrischen Stützstellen vor der Spline Approximation mittels (3.3) in das geozentrische System transformiert. Anhand dieser Spline Koeffizienten werden dann in der weiteren Berechnung die Koordinaten der Himmelskörper bestimmt. Die Berechnung der Splines und die Auswertung der Splines für einen Zeitpunkt erfordert in MATLAB jeweils nur einen Funktionsaufruf, wenn für alle Bahnen der selbe Stützstellenabstand gewählt wird. Individuelle Abstände erfordern jeweils einzelne Funktionsaufrufe, die die Rechenzeit erhöhen.

Da sich diese Spline Koeffizienten während der Satellitenbahnintegration nicht ändern, können – durch die Nutzung von nested functions – in MATLAB zur Laufzeit des Programms function handles zur Berechnung der Himmelskörperpositionen erzeugt werden (siehe Anhang C.2). Die Funktionen erfordern keinen Dateizugriff auf JPL Koeffizienten und die Spline Koeffizienten werden nur bei Erzeugen des function handles einmalig übergeben. Danach kann die Funktion allein unter Angabe des Zeitpunktes die Positionen der Himmelskörper berechnen.

Arora und Russell (2010) beschreiben den Fast Interpolated Runtime Ephemeris (FIRE) Algorithmus, der ebenfalls die JPL Ephemeriden durch kubische Splines ersetzt um die Rechengeschwindigkeit zu erhöhen. Dies wird durch einen zweistufigen Ansatz erreicht. In einem ersten Schritt werden die Bahnen aller Himmelskörper durch Splines ersetzt und gespeichert. Der Stützstellenabstand ist variabel und wird durch Untersuchung der in der Bahn auftretenden Frequenzen – z. B. die Umlaufperiode eines Mondes eines Planeten – festgelegt. Zusätzlich zu dieser generellen Datenbank – vergleichbar mit den Ephemeriden Dateien des JPL – werden aus diesen Spline Koeffizienten an eine Aufgabe angepasste Spline Koeffizienten berechnet und im Arbeitsspeicher zwischengespeichert. Dies ist vergleichbar zu dem in dieser Arbeit gewählten Ansatz, dass die Spline Koeffizienten an den Integrationszeitraum der Satellitenbahn angepasst werden. Dies erlaubt einen wesentlich schnelleren Zugriff auf die Koeffizienten als der Festplattenzugriff.

### 3.1.2 HORIZONS-Webdienst

Eine weitere Möglichkeit die Positionen von Himmelskörpern zu bestimmen, besteht in dem HORIZONS-Webdienst<sup>2</sup> (Giorgini u. a., 1996). Auf dieser Webseite können die Positionen verschiedener Objekte in diversen Koordinatensystemen und Referenzrahmen zu beliebigen Zeitpunkten oder in Zeitreihen berechnet werden. Die Berechnung dieser Positionen erfolgt – mit der Ausnahme von Pluto – aus Chebyshev Koeffizienten der Serie DE405. Nach der Eingabe der nötigen Parameter

- Objekt,
- Koordinatenursprung,
- Zeitraum und Zeitabstand der Positionen,
- Einheiten und Referenzrahmen

---

<sup>2</sup><http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.



	Rektaszension ["]	Deklination ["]	Distanz [1000km]
Merkur	15	1	1
Venus	20	1	4
Erde	20	8	6
Mars	40	2	25
Jupiter	300	10	600
Saturn	600	25	1500
Uranus	50	2	1000
Neptun	10	1	200
Pluto	5	2	300

**Tabelle 3.3:** Maximale Fehler bei Nutzung der vereinfachten Formeln im Zeitraum 1800-2050 im baryzentrischen Koordinatensystem (Giorgini u. a., 1996).

wird eine Textdatei mit den gewünschten Positionen erstellt. In Abhängigkeit von dem gewählten Zeitraum und des Zeitintervalles der Positionen, können jedoch große Datenmengen entstehen. Die Datei der Positionen eines Planeten für ein Jahr mit einem Zeitintervall der Positionen von 30 Minuten ist etwa 3 Megabyte groß. Im Vergleich dazu benötigen die Chebyshev Koeffizienten aller Planeten für 20 Jahre gerade einmal 6 Megabyte Speicherplatz. Würden die Koordinaten der Himmelskörper mittels des HORIZONS-Services im voraus berechnet werden, müssten so größere Datenmengen gespeichert und auch zeitintensiv wieder durchsucht und eingelesen werden.

Die Zeitpunkte, zu denen die Positionen der Himmelskörper zur Berechnung der Störbeschleunigung innerhalb der Orbitintegration eines Satelliten benötigt werden, sind aufgrund der adaptiven Schrittweite nicht vorhersehbar. Daher müssen die Koordinaten interpoliert werden. Mit dem HORIZONS-Webdienst werden zum Vergleich mit den eigenen Methoden die Positionen aller Planeten in einem 30 Minuten Zeitabstand berechnet.

### 3.1.3 Näherungsformel

Für Anwendungen mit geringen Anforderungen an die Genauigkeiten können die Positionen mit Näherungsformeln berechnet werden. Dazu stellt das JPL die Keplerelemente und die Änderungsraten der Keplerelemente der einzelnen Planeten bereit<sup>3</sup>. Die Berechnung von Positionen aus Keplerelementen wird z.B. in Seeber (2003) ausgeführt. Die Tabelle 3.3 zeigt die geschätzten maximalen Fehler, die sich durch die Benutzung der Keplerelemente ergeben. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Algorithmus nicht umgesetzt.

### 3.1.4 Software des JPL – SPICE

Für die Berechnung der Positionen von Planeten und anderen Objekten stellt das JPL neben den notwendigen Bahndaten auch Software bereit. Die Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)<sup>4</sup> erstellt und aktualisiert die freie Software SPICE, die in Verbindung mit den Chebyshev Polynomkoeffizienten umfangreiche Berechnungen erlauben. Bei SPICE

<sup>3</sup>[http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet\\_pos](http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_pos).

<sup>4</sup><http://naif.jpl.nasa.gov/naif/index.html>.

handelt es sich um Subroutinen, die in eigene Programme eingebaut werden können (Acton, 1996). Diese liegen in den Sprachen FORTRAN, C, IDL und MATLAB vor. Die MATLAB Version (MICE) wird im Rahmen dieser Arbeit getestet. Diese Version nutzt die Fähigkeit MATLABs externe Programme einzubinden. Mit dieser MATLAB Executable (MEX)-Funktion werden die SPICE Routinen aus C (CSPICE) in MATLAB eingebunden. Die Routinen in C sind wiederum von FORTRAN nach C übersetzte Programme. Die MATLAB Umsetzung besteht in erster Linie aus Funktionen, die die Ein- und Ausgaben der SPICE Funktionen aus MATLAB Formaten in C Formate und umgekehrt übersetzen. Der Anhang C.3 ab Seite 87 beschreibt die Einbindung von MICE in MATLAB Programme.

In dieser Arbeit werden die Positionen der Planeten, zusätzlich zu einer eigenen Implementierung der Chebyshev Polynominterpolation, auch mit der MICE Software berechnet. In Abschnitt 4.2 erfolgt der Vergleich der Ergebnisse eigener Methoden mit der mittels der MICE Software bzw. HORIZONS-Webdienst berechneten Positionen.

## 3.2 Störbeschleunigungen aufgrund dritter Körper

Die Integration der Bewegungsgleichung (2.7) erfolgt unter Berücksichtigung der Störbeschleunigung dritter Körper  $\ddot{\vec{a}}(t)$  mittels (2.8). Die Störbeschleunigungen aufgrund dritter Körper werden in einer gemeinsamen Funktion berechnet. Dazu werden eine Satellitenposition und die Koordinaten der Himmelskörper zu einem Zeitpunkt, sowie die  $GM_i$  beteiligter Himmelskörper benötigt.

Der direkte gravitative Einfluss der Himmelskörper wird unter der Annahme punktförmiger Massen nach Formel (2.9) modelliert. Die indirekten Gezeiten können wahlweise bis Grad 2 nach Formel (2.13) oder auch Grad 4 gemäß Anhang B berechnet werden.

Die Störbeschleunigung  $\ddot{\vec{a}}(t)$  muss für jeden Zeitpunkt der Orbitintegration berechnet werden. Da, wie in Abschnitt 2.5 beschrieben, bei der Integration durch MATLAB keine feste Schrittweite genutzt wird, sind die Zeitpunkte zu denen die Störbeschleunigungen benötigt werden im Voraus unbekannt. Die Positionen aller Himmelskörper werden für jeden einzelnen Zeitpunkt bei der Berechnung von  $\ddot{\vec{a}}(t)$  berechnet. Zu diesem Zweck ist die Bestimmung der Koordinaten von Himmelskörpern in die Berechnung der Störbeschleunigungen integriert. Die Funktion zur Berechnung der Gezeitenkräfte enthält die folgenden Schritte für einen einzelnen Zeitpunkt:

- Berechnung der Positionen aller ausgewählten Himmelskörper,
- Berechnung der direkten Gezeitenkräfte,
- Berechnung der indirekten Gezeitenkräfte.

Die Berechnung der Planetenposition und der indirekten Gezeitenkräfte kann dabei mit allen hier genannten Verfahren durchgeführt werden. Ein Vergleich dieser Methoden erfolgt in Abschnitt 4.2.

Alle zuvor beschriebenen Algorithmen sind in einem Programm zur Integration von Satellitenbahnen zusammengefasst. Die im folgenden Abschnitt 4 gezeigten Ergebnisse werden mit diesem Programm berechnet. Dazu enthält das Programm die Möglichkeit zwischen verschiedenen Methoden der Zeittransformation, der Berechnung von Koordinaten, der Gezeiten und

der Datenquelle zu wählen. In Abschnitt 4.4 erfolgt die Bewertung der unterschiedlichen Methoden und eine Empfehlungen für den Einsatz. Eine ausführliche Beschreibung der erstellten MATLAB Funktionen erfolgt in Anhang C.



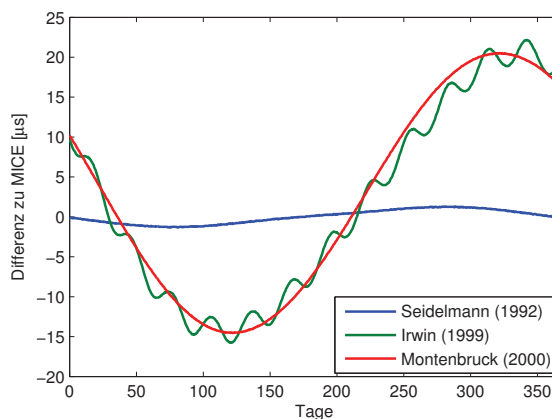
# Kapitel 4

## Ergebnisse und Bewertung

Mittels den in Kapitel 3 beschriebenen Methoden werden sowohl die Positionen von Sonne, Mond und den Planeten, als auch die daraus resultierende Störbeschleunigung am Satelliten bedingt durch die direkten und indirekten Erdzeiten berechnet. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Verfahren gezeigt.

### 4.1 Auswirkung der Zeittransformation $TDB - TT$

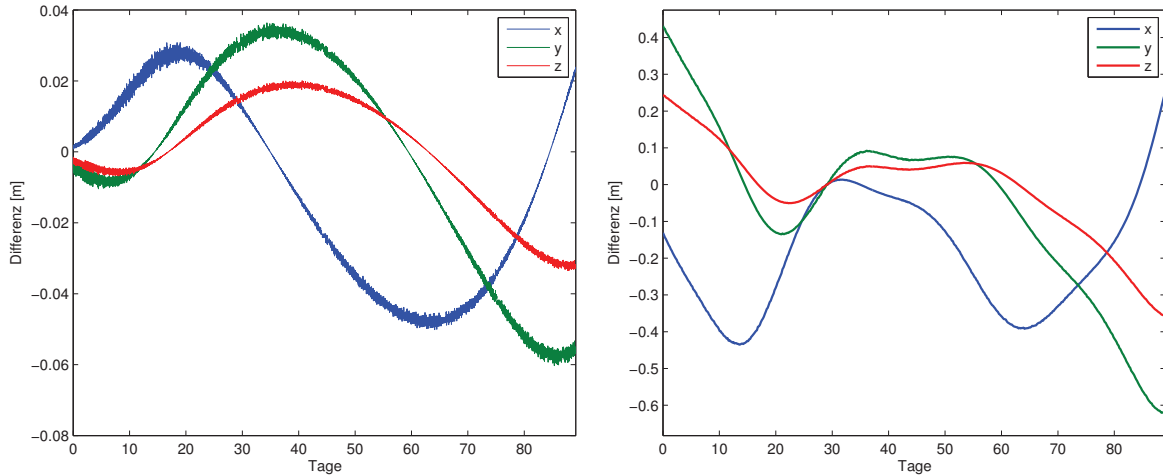
An dieser Stelle soll zunächst der Einfluss der in Abschnitt 2.2 gezeigten Varianten der Transformation zwischen TT und TDB dargestellt werden. In Abschnitt 2.2 und Abbildung 2.3 wird bereits die Berechnung der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  eingeführt und der Verlauf eines Jahres dargestellt. Die Abbildung 4.1 zeigt noch einmal die Methoden nach Seidelmann (1992), Irwin und Fukushima (1999) und Montenbruck und Gill (2000) im Vergleich zu der Umsetzung der MICE Software.



**Abbildung 4.1:** Differenz der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  aus Modellierung mit MICE Software und anderen Methoden im Verlauf eines Jahres.

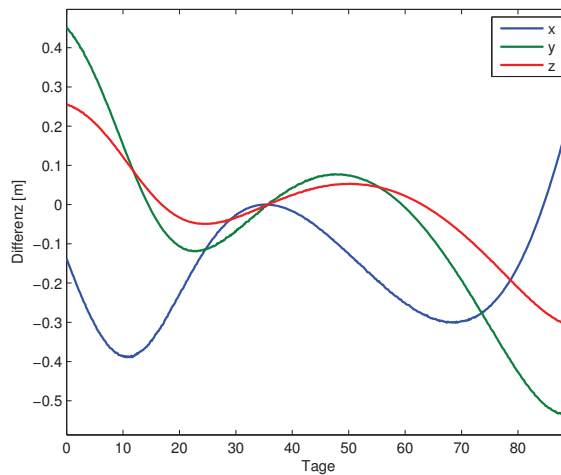
Die Abbildung 4.2 zeigt die Differenz aus baryzentrischen Himmelskörperpositionen, die mittels einer eigenen Umsetzung der Chebyshev Interpolation aus JPL Ephemeriden und mit

der MICE Software berechnet werden. Als Beispiel wurde der Planet Merkur gewählt, da hier die Differenzen am größten sind. Die Transformation zwischen TT und TDB wird bei der Berechnung aus JPL Ephemeriden nach den drei unterschiedlichen Methoden durchgeführt.



(a) MICE – JPL mit  $TDB - TT$  nach Seidelmann (1992).

(b) MICE – JPL mit  $TDB - TT$  nach Irwin und Fukushima (1999).



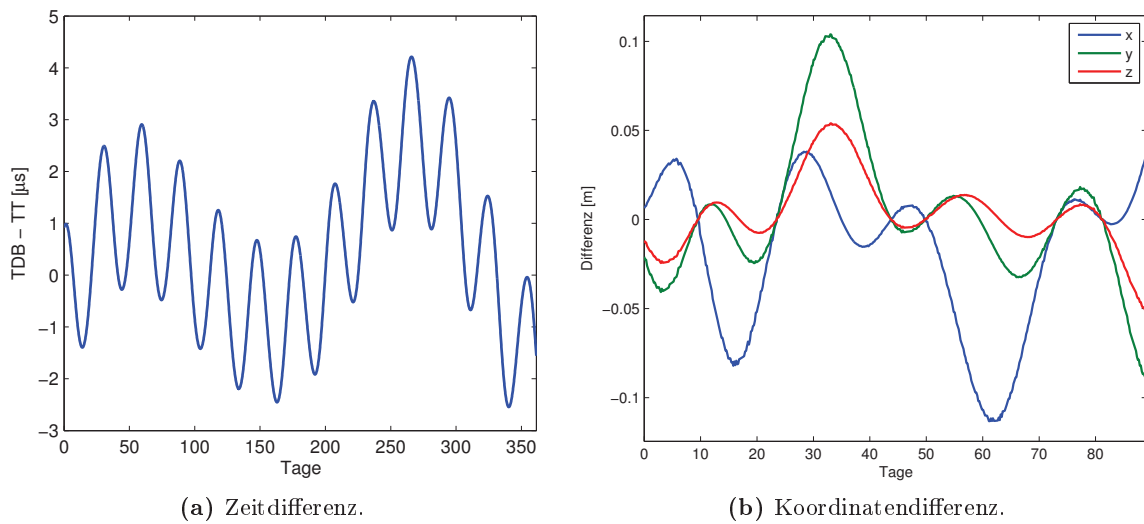
(c) MICE – JPL mit  $TDB - TT$  nach Montenbruck und Gill (2000).

**Abbildung 4.2:** Auswirkung der Zeittransformationen auf die Koordinaten des Merkur durch Vergleich mit der Methode der MICE Software.

In Abhängigkeit der Berechnung von  $TDB - TT$  kann die Position eines Objektes somit um einige Dezimeter variieren. Im Vergleich zu der Genauigkeit, mit der die Positionen der Himmelskörper tatsächlich bekannt sind (Tabelle 3.1), sind diese Unterschiede nur gering. Die Koordinatendifferenzen in den Abbildungen 4.2b und 4.2c unterscheiden sich nur um wenige Zentimeter. Dies ist nach dem ähnlichen Verlauf der Differenz der Zeitdifferenzen in Abbildung 4.1 auch zu erwarten. Diese Differenz von bis zu  $4 \mu\text{s}$  zwischen der Zeittransformation nach Irwin und Fukushima (1999) und Montenbruck und Gill (2000) zeigt Abbildung 4.3a. Der daraus resultierende Koordinatenunterschied bei der unterschiedlichen Zeittransformati-

on ist in Abbildung 4.3b dargestellt. In diesem Fall werden die Koordinaten des Merkur mit der Chebyshev Interpolation berechnet. Die Differenzen erreichen  $\pm 10$  cm und sind somit größer, als die Unterschiede zwischen der MICE Methode und der einfachen Näherung nach Seidelmann (1992).

Es soll an dieser Stelle noch einmal angemerkt werden, dass die genaueste Methode der Berechnung von  $TDB - TT$  die Methode nach Irwin und Fukushima (1999) ist. Die Methode nach Montenbruck und Gill (2000) ist eine Näherungsmethode, die von den vorgestellten Methoden der Lösung der Time Ephemeris Serie TE405 am nächsten kommt. Die Methode nach Seidelmann (1992) vernachlässigt im Vergleich zu Montenbruck und Gill (2000) weitere Terme und die in MICE integrierte Methode ist von allen die einfachste Näherung.



**Abbildung 4.3:** Auswirkung der Zeittransformation nach Irwin und Fukushima (1999) und Montenbruck und Gill (2000) auf die Position bei der Chebyshev Interpolation.

Die Zeitdifferenz  $TDB - TT$  wird im Weiteren, wenn nicht anders angegeben, nach Seidelmann (1992) mittels

$$TDB - TT = 0.001658 \text{ [s]} \cdot \sin(g) + 0.000014 \text{ [s]} \cdot \sin(2g), \quad (4.1)$$

mit

$$g = 357.53^\circ + 0.9856003(JD - 2451545),$$

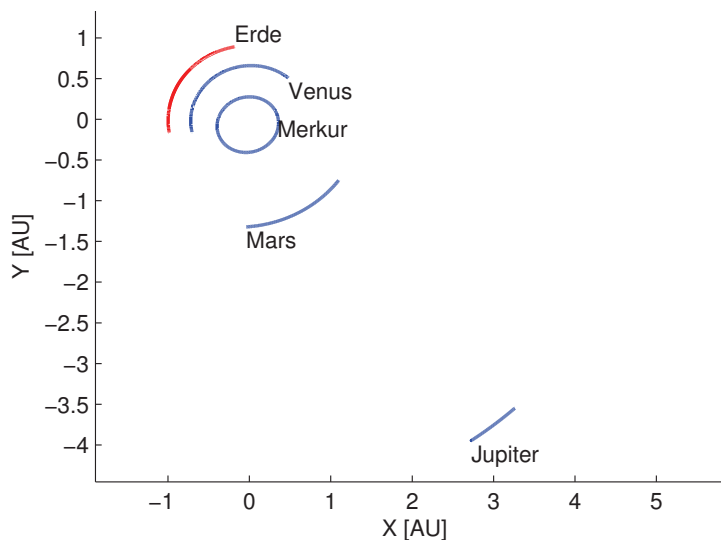
$JD$  : Zeitpunkt in Julianischem Datum.

berechnet. Diese Methode hat, wie in Abbildung 4.1 gezeigt, nur einen geringen Unterschied zu der Implementierung in der MICE Software. Dies erleichtert den Vergleich mit den Ergebnissen der offiziellen Lösung, da der Unterschied in der Zeittransformation auch eine Änderung der Positionen zur Folge hat.

## 4.2 Methoden der Positionsbestimmung

In diesem Abschnitt sollen die Positionen der Himmelskörper anhand der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Methoden berechnet und verglichen werden. Positionen von Himmelskörpern werden in diesem Abschnitt, wenn nicht anders angegeben, mit den Chebyshev Koeffizienten der Serie DE405 berechnet. Dies erlaubt einen direkten Vergleich mit den Positionen des HORIZONS-Webdienstes.

Im Zentrum dieses Abschnittes soll der Vergleich der selbst implementierten Methoden der Chebyshev Polynominterpolation und den selbst erzeugten Spline Koeffizienten mit den durch das JPL bereitgestellten Methoden zur Berechnung der Positionen der Himmelskörper sein. Dazu werden mit den vier Methoden MICE, HORIZONS-Webdienst, Chebyshev Polynominterpolation für jeden Zeitpunkt und der Interpolation eigener Splines die Positionen im Zeitraum Januar bis März 2009 berechnet. In diesem Zeitraum ist der Unterschied  $TDB - TT$  nach Formel (4.1) und die Differenz der in MICE implementierten Berechnung von  $TDB - TT$  zuerst minimal und steigt dann an (vgl. Abbildung 4.1). Die beiden anderen Methoden erreichen einen minimalen Unterschied zu der MICE Methode in der Mitte des betrachteten Zeitraumes. Die Abbildung 4.4 zeigt die Lage der inneren Planeten und Jupiter in der x-y-Ebene für diesem Zeitraum. Merkur umrundet die Sonne in diesem Zeitraum einmal. Venus nähert sich auf ihrem Umlauf um die Sonne der Erde an und erreicht ihre größte Annäherung. In Verbindung mit Abbildung A.3 auf Seite 67 wird der Zusammenhang zwischen Position eines Himmelskörpers und der auf einen Satelliten wirkenden direkten Gezeitenbeschleunigung deutlich. So wird die Gezeitenbeschleunigung z. B. für Venus maximal, wenn sich Venus und Erde in Abbildung 4.4 am nächsten kommen. Die Bewegung der äußeren Planeten und Pluto ist im Vergleich zu der Bewegung der inneren Planeten gering.



**Abbildung 4.4:** Übersicht über die Planeten des inneren Sonnensystems und Jupiter für den Zeitraum Januar 2009 bis März 2009 im BCRS. Die Bezeichnung des Himmelskörpers ist an der Position des Planeten am 01.01.2009, die Bahn der Erde ist in rot dargestellt.



Die Himmelskörperpositionen werden mit allen Methoden zu den gleichen Zeitpunkten berechnet und die Differenz der Positionen in den Kombinationen

- MICE – JPL,
- HORIZONS – JPL und
- Spline – JPL

gebildet. Diese Differenzen und der Betrag daraus, also eigentlich die Distanz eines Himmelskörpers zwischen den Positionen zweier Berechnungsmethoden, werden im Folgenden genauer betrachtet.

Als Beispiele zur Untersuchung der berechneten Positionen werden die Himmelskörper Merkur, Mond und Venus ausgesucht. Der Planet Merkur hat aufgrund der Nähe zur Sonne von allen betrachteten Himmelskörpern die Bahn mit der höchsten Orbitalgeschwindigkeit und den größten Schwankungen, so dass sich hier Unterschiede in der Berechnung im Vergleich zu den Methoden des JPL besonders zeigen. Die Umlaufzeit des Merkur um die Sonne beträgt etwa 88 Tage. Der Mond hat von allen Himmelskörpern den größten gravitativen Einfluss auf einen Satelliten und wird deshalb zum Vergleich ausgewählt. Die Venus hat nach Sonne und Mond – in Abhängigkeit von ihrer Position – den nächst größten gravitativen Einfluss. Die Umlaufzeit beträgt 225 Tage und in dem betrachteten Zeitraum kommen sich Erde und Venus am nächsten. Abweichungen im berechneten Orbit dieser beiden Himmelskörper haben den größten Einfluss auf den Satelliten, wie auch in Abbildung A.3 zu sehen ist.

Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, werden aus den Chebyshev Polynomkoeffizienten zunächst die Positionen der Himmelskörper im BCRS berechnet. Die MICE Software und das HORIZONS-Webinterface können sowohl Positionen im BCRS als auch im GCRS berechnen, so dass in den folgenden zwei Abschnitten die Positionen dieser Quellen jeweils im entsprechenden System erzeugt werden. Die Koordinaten der Himmelskörper im GCRS der eigenen Methoden werden im Gegensatz dazu aus den Positionen im BCRS berechnet gemäß (3.3).

#### 4.2.1 Himmelskörper im BCRS

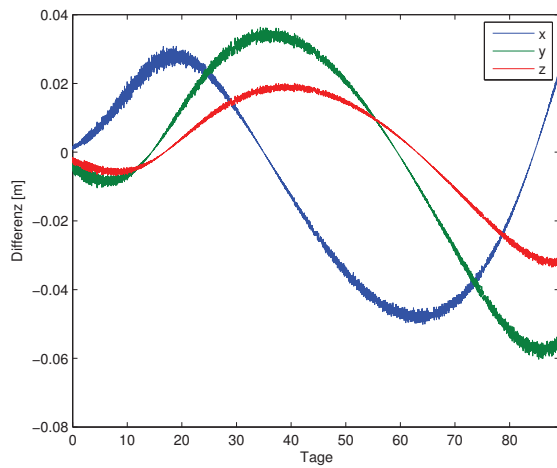
Zusätzlich zu den drei zuvor genannten Himmelskörpern wird an dieser Stelle auch die Position der Erde im baryzentrischen System betrachtet. Bei der Transformation einer Position in geozentrische Koordinaten nach (3.3) tragen die Unterschiede in der Berechnung der baryzentrischen Position der Erde zu der Berechnung aller geozentrischen Positionen bei.

Die Abbildungen 4.5 und 4.6 beinhalten die Differenzen von Koordinaten aus verschiedenen Berechnungen. Die Abbildung 4.5 zeigt die Differenz zwischen der eigenen Auswertung der JPL Koeffizienten und der Interpolation der Positionen mit der MICE Software. Bei allen drei angegebenen Himmelskörpern zeigen sich in den einzelnen Koordinaten Schwingungen, die durch die Periode des Umlaufs des jeweiligen Himmelskörpers um die Sonne beeinflusst werden. Der gesamte Betrag zeigt eine jährliche Periode. Die Abbildungen A.4 und A.5 auf Seite 69f. erweitern diese Darstellung für ausgewählte innere bzw. äußere Planeten auf ein ganzes Jahr. Die Ursache für diese Periode kann in der unterschiedlichen Modellierung der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  liegen. Diese Transformation wird in der MICE Software durch eine Sinusfunktion unter Vernachlässigung weiterer periodischer Effekte durchgeführt, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben und in Abbildung 4.1 gezeigt. Neben periodischen Effekten mit

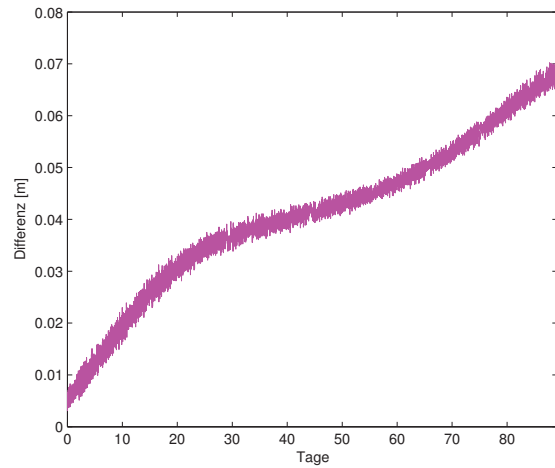
einer Amplitude von bis zu 10 cm für den Merkur, 5 cm für die Venus und 4 cm für die Erde, gibt es noch wesentlich kleinere hochfrequente Störungen im mm-Bereich.

Die Abbildung 4.6 zeigt die Differenz zwischen der eigenen Chebyshev Interpolation und den Ergebnissen des HORIZONS-Webdienstes. Der HORIZONS-Webdienst berechnet die Positionen auf Grundlage der Serie DE405. Die Berechnungen erfolgen für äquidistante Zeitpunkte in einem Intervall von z. B. 30 Minuten. Zwischen diesen Zeitpunkten wird wiederum eine Interpolation durchgeführt. Die Differenzen zwischen diesen Ergebnissen und denen der eigenen Berechnung ist deutlich größer als bei dem Vergleich mit der MICE Software. Es werden Unterschiede bis zu 50 cm bei Merkur, 30 cm bei Venus und etwa 25 cm bei der Erde erreicht. Die Zu- und Abnahme der Differenzen in den einzelnen Komponenten zeigt auch hier eine Periode, die Zusammenhänge mit dem Umlauf um die Sonne aufweist. Die Dokumentation des HORIZONS Dienstes gibt keine Informationen über die Berechnungen und eventuelle Vereinfachungen, außer dass DE405 Ephemeriden genutzt werden, so dass diese im Vergleich zu MICE große Diskrepanz nicht abschließend geklärt werden kann. Die Differenzen enthalten ein starkes Rauschen, welches eventuell numerisch bedingt ist. In den später folgenden Untersuchungen der Gezeiten wird diese Methode nicht weiter verwendet.

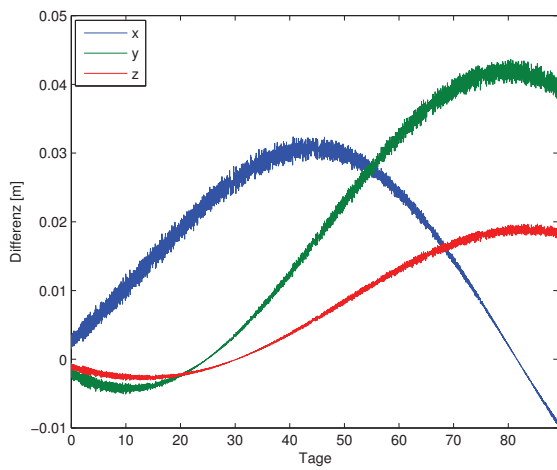
Ein Vergleich des HORIZONS-Webdienstes mit den Spline Koeffizienten findet im Folgenden nicht statt, da – wie sich zeigen wird – die Unterschiede zwischen der Spline Interpolation und der Chebyshev Interpolation sehr gering sind. In einem Vergleich der Splines und den HORIZONS Ergebnissen würden die an dieser Stelle gezeigten Abweichungen zwischen Chebyshev Interpolation und HORIZONS dominieren.



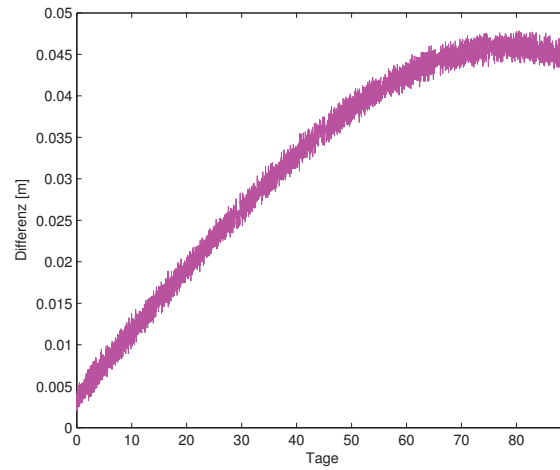
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



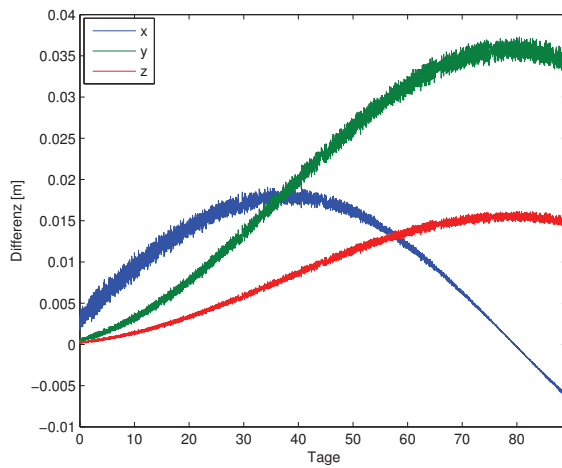
(b) Merkur – Betrag.



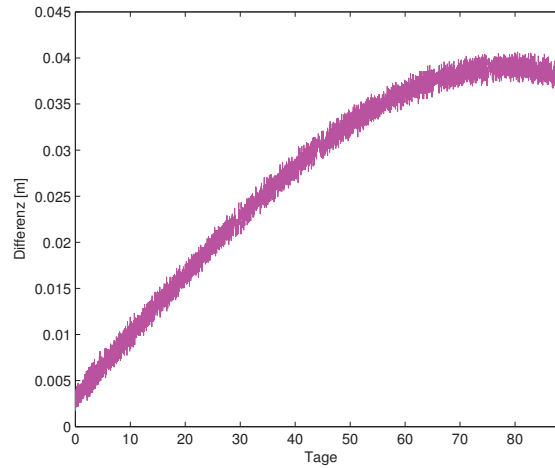
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

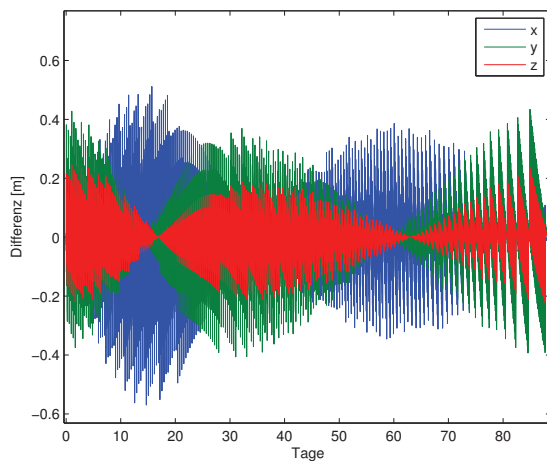


(e) Erde – einzelne Koordinaten.

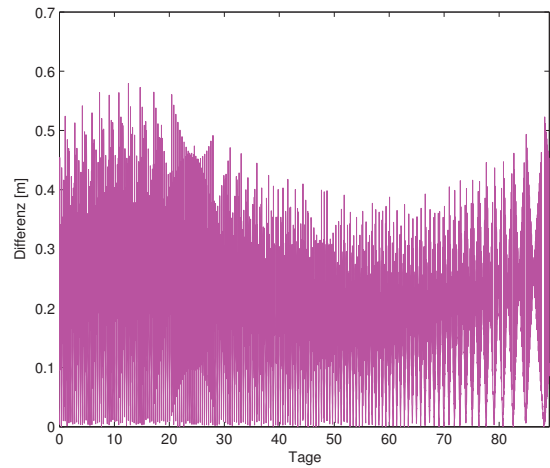


(f) Erde – Betrag.

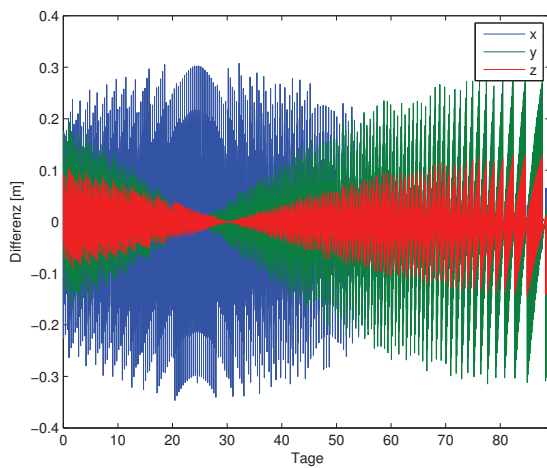
**Abbildung 4.5:** Differenz der Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung der MICE Software und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.



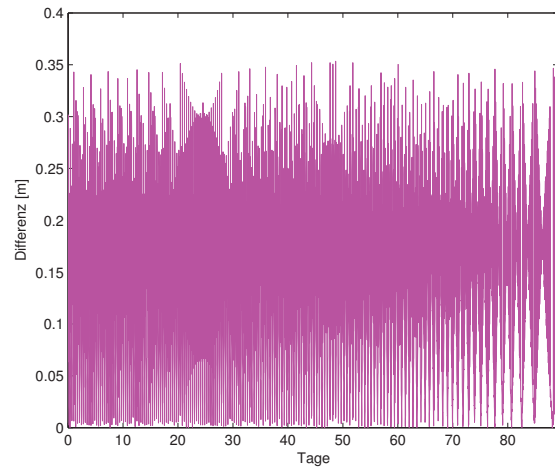
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



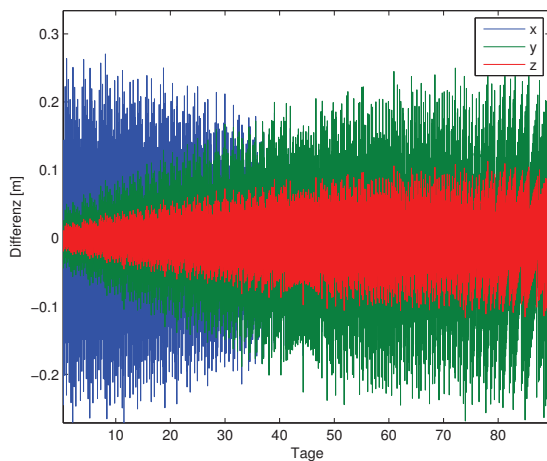
(b) Merkur – Betrag.



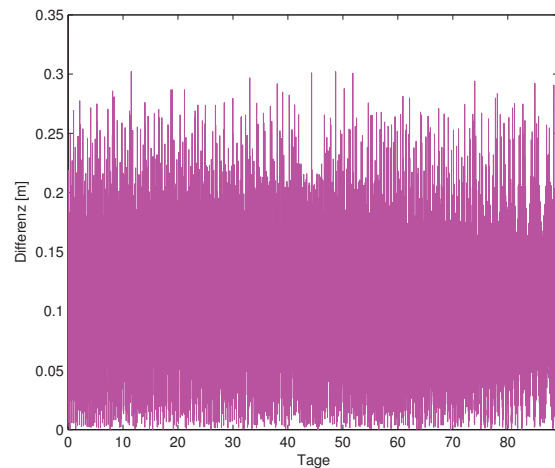
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.



(e) Erde – einzelne Koordinaten.



(f) Erde – Betrag.

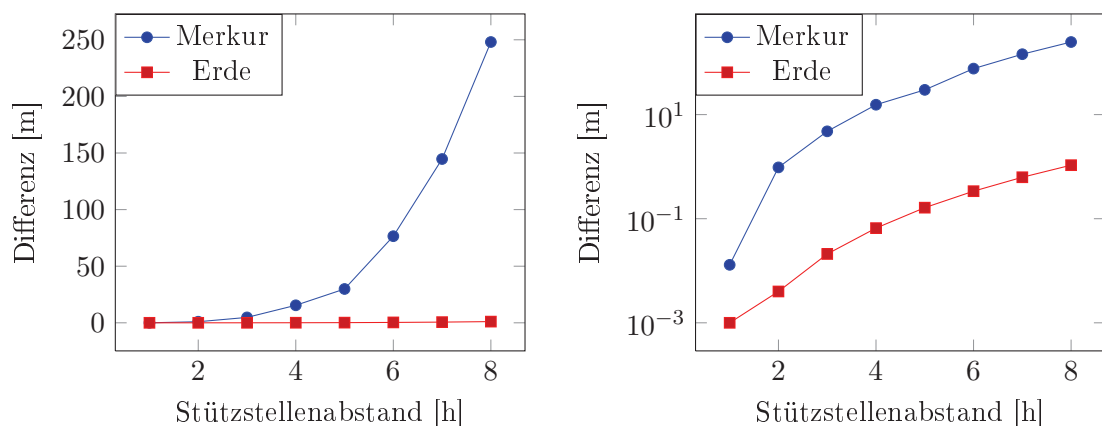
**Abbildung 4.6:** Differenz der Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung des HORIZONS-Webinterface und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.

## JPL Koeffizienten und Spline Koeffizienten

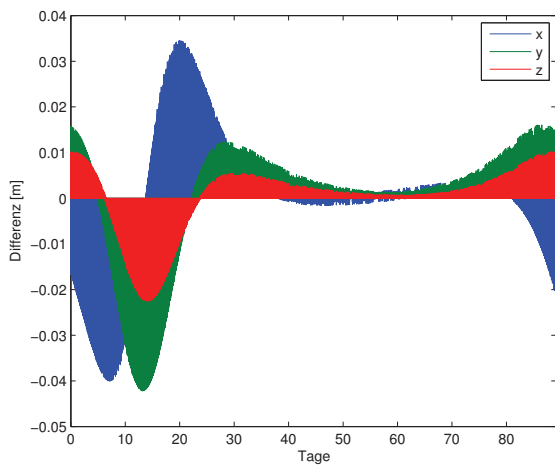
Nach der Abbildung 4.5, können mittels der selbst implementierten Methoden die Positionen von Himmelskörpern berechnet werden, so dass diese bis auf wenige Zentimeter mit denen der offiziellen MICE Software übereinstimmen. Die Auswertung der JPL Koeffizienten ist – aufgrund der Handhabung der Koeffizienten und variablen Subintervalle – sehr zeitaufwendig. Aus diesem Grund werden, wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, eigene Koeffizienten berechnet. Aus den JPL Koeffizienten werden die Orbits der Himmelskörper mit Stützstellen in einem festen Zeitintervall berechnet und durch Splines approximiert. Die Differenz aus den Splines und den anderer Methoden hängt maßgeblich von dem Zeitintervall dieser Stützstellen ab.

Die Abbildung 4.8 zeigt die Differenz der berechneten Koordinaten aus Spline und JPL Koeffizienten. Der Stützstellenabstand der Spline Approximation beträgt in den gezeigten Beispielen eine Stunde. Die Differenz für Merkur beträgt weniger als 5 cm. Bei der Venus und der Erde liegen die Unterschiede unter einem Zentimeter, so wie dies auch bei den nicht gezeigten äußeren Planeten der Fall ist. Auch hier sind periodische Effekte enthalten, die durch den Umlauf des Himmelskörpers um die Sonne erzeugt werden. Bedingt durch die Eigenschaften der Spline Interpolation ist die Differenz in der Nähe der Stützstellen gering und an den Stützstellen selbst Null. In der Differenz zwischen der Spline Interpolation und der MICE Software dominieren die in Abbildung 4.5 gezeigten periodischen Effekte (Abbildung A.6 auf S. 71).

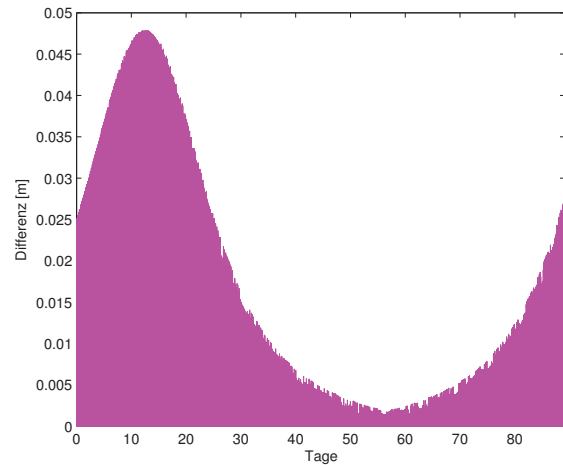
Die Abbildung 4.9 zeigt die Differenzen der Positionen des Planeten Merkur aus der Berechnung aus Spline Koeffizienten mit unterschiedlichem Stützstellenabstand und der Berechnung aus JPL Ephemeriden. Mit steigendem Zeitabstand zwischen den Stützstellen werden die Abweichungen zwischen den direkt aus Chebyshev Koeffizienten berechneten und den aus dem eigenen Spline interpolierten Positionen größer. Die Abbildung 4.7 zeigt diesen Zusammenhang für Merkur und Erde. Die maximale Differenz für den Planeten Merkur hat bei 2 Stunden Stützstellenabstand bereits eine Differenz von fast 5 Metern. Im Gegensatz dazu erreicht die maximale Differenz für die Erde bei 8 Stunden Stützstellenabstand der Approximation gerade einmal einen Meter. Die Berechnung mit einem individuellem Abstand ist nicht praktikabel, da dies die Zahl der Funktionsaufrufe in der Approximation und Interpolation erhöht.



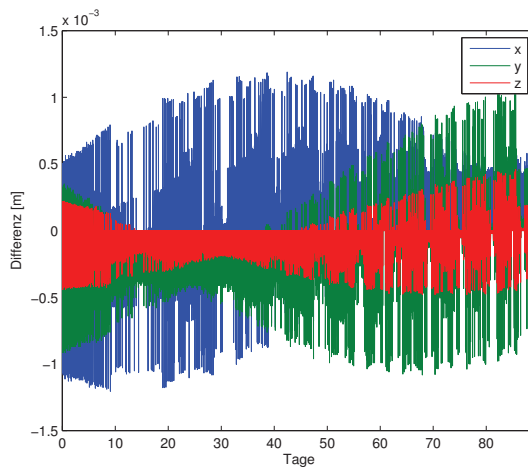
**Abbildung 4.7:** Entwicklung der maximalen Differenz zwischen Spline und Chebyshev Interpolation in Abhängigkeit des Zeitintervalls.



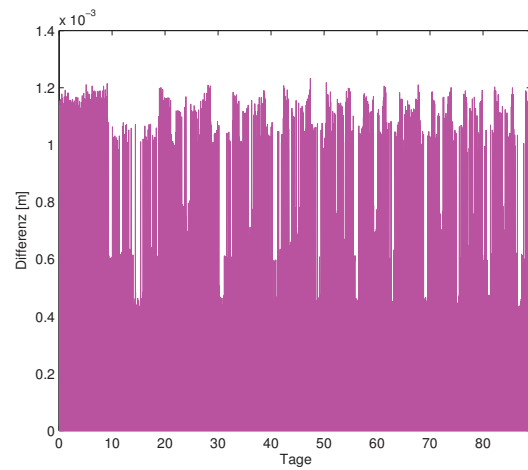
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



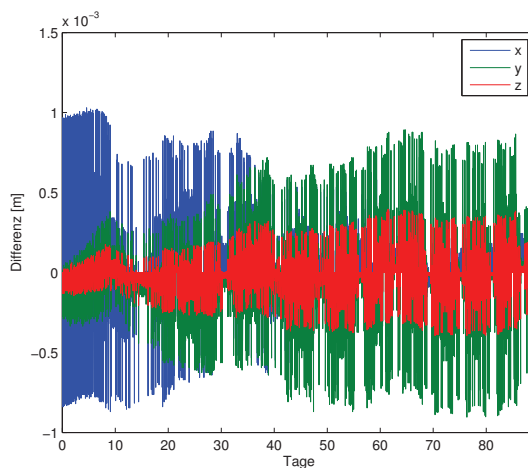
(b) Merkur – Betrag.



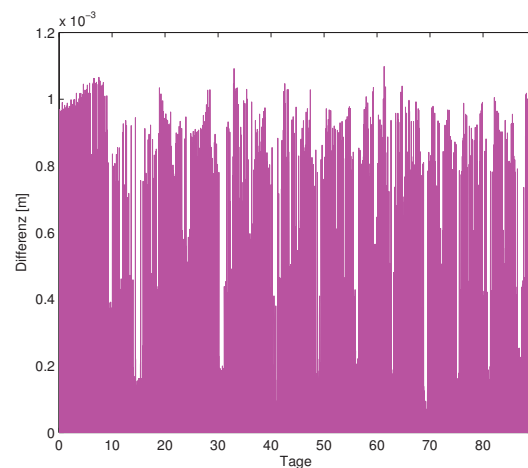
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

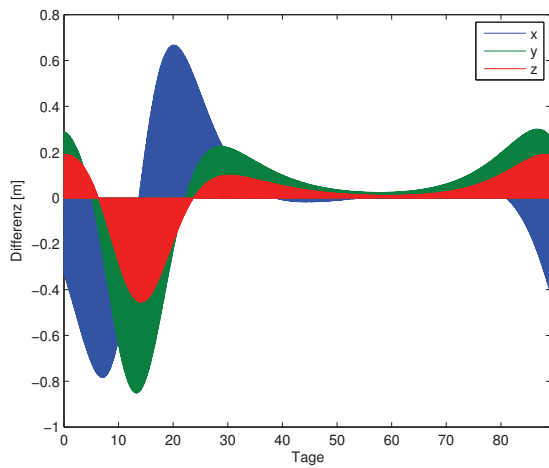
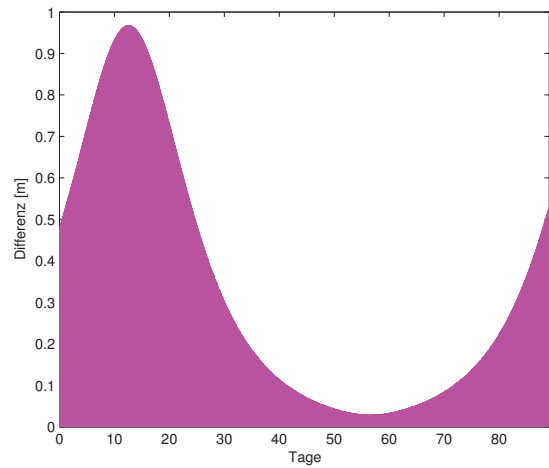
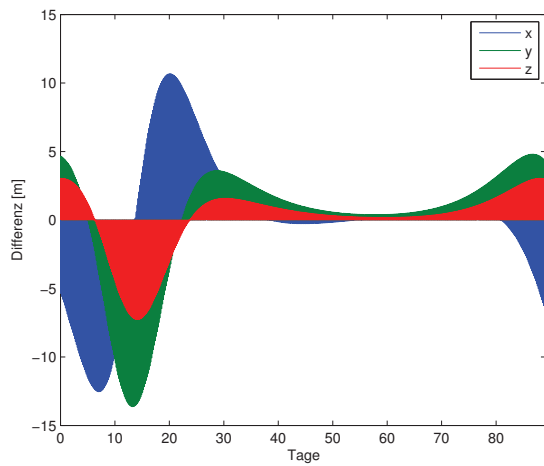
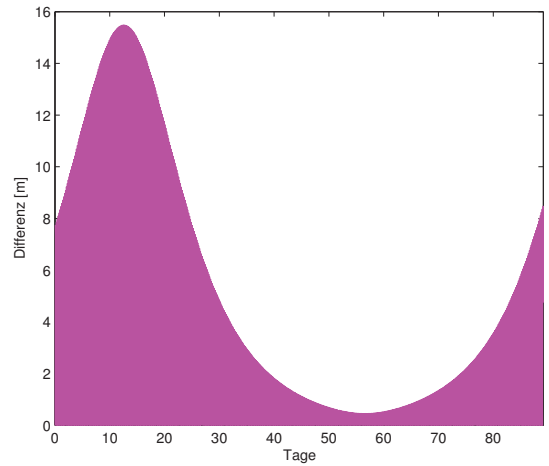
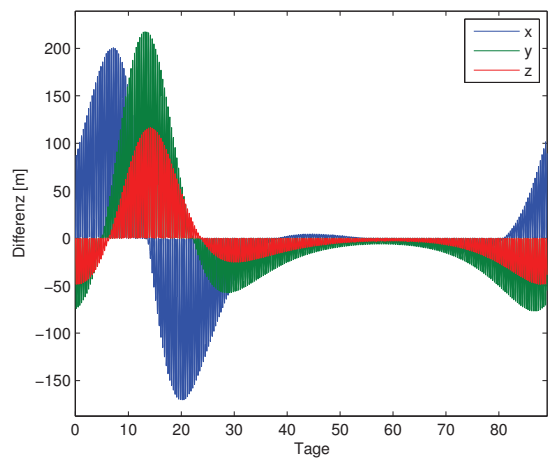
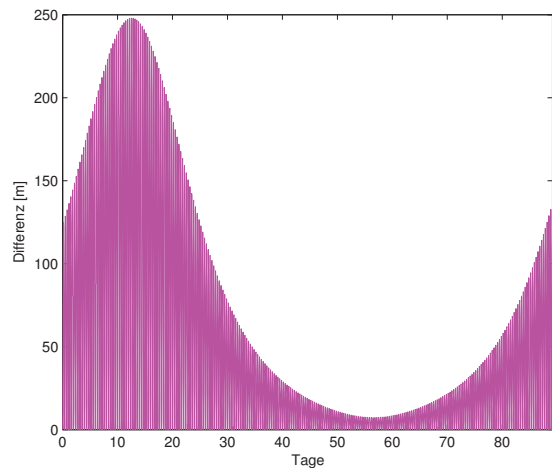


(e) Erde – einzelne Koordinaten.



(f) Erde – Betrag.

**Abbildung 4.8:** Differenz der Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung eigener Splines mit einer Stunde Stützstellenabstand und der Chebyshev Polynominterpolation.

(a)  $\Delta t = 2$  h – einzelne Koordinaten.(b)  $\Delta t = 2$  h – Betrag.(c)  $\Delta t = 4$  h – einzelne Koordinaten.(d)  $\Delta t = 4$  h – Betrag.(e)  $\Delta t = 8$  h – einzelne Koordinaten.(f)  $\Delta t = 8$  h – Betrag.

**Abbildung 4.9:** Differenz der Positionen von Merkur für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung eigener Splines mit einem Stützstellenabstand  $\Delta t$  von 2, 4 und 8 Stunden und der Chebyshev Polynominterpolation.

## 4.2.2 Himmelskörper im GCRS

Die Berechnung der Erdgezeiten für die Orbitintegration soll in inertialen geozentrischen Koordinaten erfolgen. Sowohl die MICE Software als auch der HORIZONS-Webdienst können diese geozentrischen Koordinaten direkt berechnen. Die Koordinaten der Himmelskörper der Chebyshev und Spline Interpolation werden aus dem baryzentrischen Koordinatensystem in das geozentrische Koordinatensystem mittels (3.3) umgerechnet. Die im vorherigen Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Differenzen in der Position der Erde durch verschiedene Methoden, tragen daher – bei einem Vergleich mit der MICE Methode – zu der Position jedes Himmelskörpers im geozentrischen System bei. Anstelle der Position der Erde wird in diesem Abschnitt die Position des Mondes näher betrachtet.

Die Abbildung 4.11 stellt die Differenz der geozentrischen Koordinaten von Merkur, Venus und Mond aus der Berechnung mittels MICE und Chebyshev Interpolation gegenüber. Die Abbildung 4.11a, die die Differenzen des Merkur beinhaltet, entspricht in etwa der Differenz der in den Abbildungen 4.5a und 4.5e gezeigten Werte. Die Abbildung 4.11c ergibt sich analog dazu aus den Abbildungen 4.5c und 4.5e.

Die Berechnung der geozentrischen Koordinaten durch Transformation der baryzentrischen Koordinaten mittels Formel (3.3) und die Berechnung geozentrischer Koordinaten mittels MICE ist somit konsistent. In den einzelnen Komponenten der Koordinaten zeigen sich wiederum periodische Effekte, die sich aus dem Umlauf der Planeten und der Erde um die Sonne ergeben. Die Abbildung A.7 auf Seite 72 zeigt den Verlauf eines ganzen Jahres.

Die Abbildung 4.11e zeigt die Differenz der geozentrischen Mondkoordinaten. Die Koordinaten des Mondes sind in den JPL Ephemeriden bereits im geozentrischen System enthalten, der Beitrag der Erde tritt also nicht auf. Die Größenordnung der Differenz zwischen den beiden Methoden liegt deutlich unter einem Zentimeter. Die Komponenten der Koordinaten beinhalten periodische Effekte durch den Umlauf des Mondes um die Erde.

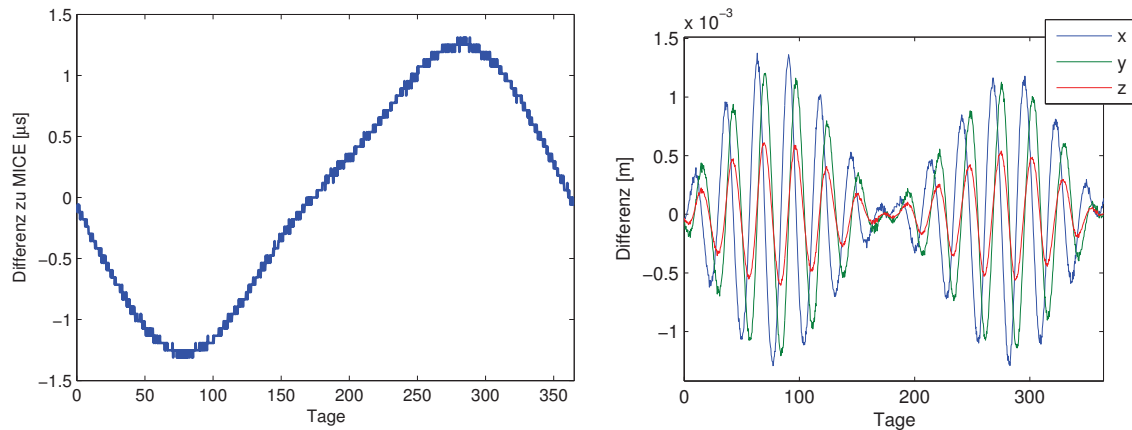
Die Abbildung 4.12 vergleicht die Unterschiede zwischen den Ergebnissen des HORIZONS-Webdienstes und der Chebyshev Interpolation. Die Unterschiede in den Koordinaten liegen für die Planeten Merkur und Venus, wie bei dem Vergleich im baryzentrischen Koordinatensystem bereits gesehen, deutlich über den in Abbildung 4.11 aufgeführten Unterschieden zu der MICE Software. Für Merkur werden hier Differenzen deutlich über 50 cm erreicht. In dem betrachteten Zeitintervall für Januar bis März 2009 liegt die Differenz in den Abbildungen 4.12c und 4.12d bei maximal 25 cm für den Planeten Venus mit einer Abnahme auf 5 cm im Verlauf Zeit. Im Gegensatz dazu ist die Größenordnung im baryzentrischen System in den Abbildungen 4.6c und 4.6d nahezu unverändert. Die hier im geozentrischen System gezeigte Abnahme der Differenzen ist lediglich dem ausgewählten Zeitraum geschuldet. Im Verlauf der zweiten Jahreshälfte 2009 steigen die Differenzen wieder auf 30 – 50 cm. Die besonders geringen Unterschiede zwischen HORIZONS und der Chebyshev Interpolation werden dann erreicht, wenn der betreffende Planet – hier Merkur und Venus – der Erde am nächsten sind.

Für den Mond liegt die Differenz zwischen den Methoden in den Abbildungen 4.12e und 4.12f, wie bei dem Vergleich mit der MICE Methode auch, innerhalb eines Zentimeters. Die Differenzen bei dem Vergleich mit MICE in den Abbildungen 4.11e und 4.11f sind mit maximal 1.5 mm im Verlauf des Jahres jedoch deutlich geringer.

Die Darstellung der Differenzen der Mondposition eines Jahres in Abbildung 4.10 in Verbindung mit der Modellierung der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  zeigt die Abhängigkeit der Koordi-

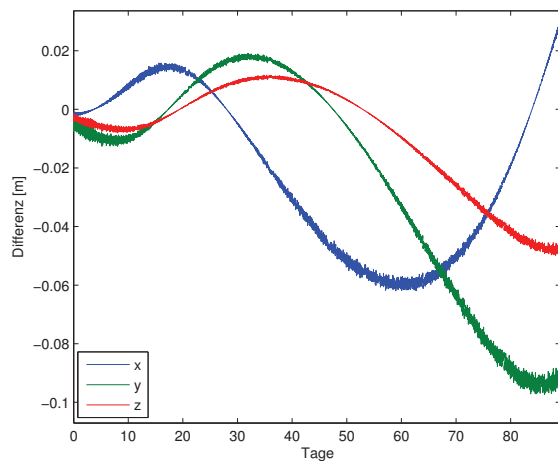


naten von der verwendeten Zeitskala. Die Abbildungen A.4 und A.7 zeigen, dass sich dieser Zusammenhang auch auf andere Himmelskörper übertragen lässt. Die maximalen Koordinatenunterschiede werden erreicht, wenn auch die Differenz in der Modellierung von  $TDB - TT$  am größten ist. Die Abbildung 4.2 zeigt, dass die Unterschiede in den Positionen in Abhängigkeit der Zeittransformation geringer sind, als die Positionen der Planeten eigentlich bekannt, bzw. mit den JPL Ephemeriden zu berechnen sind (siehe Tabelle 3.1).

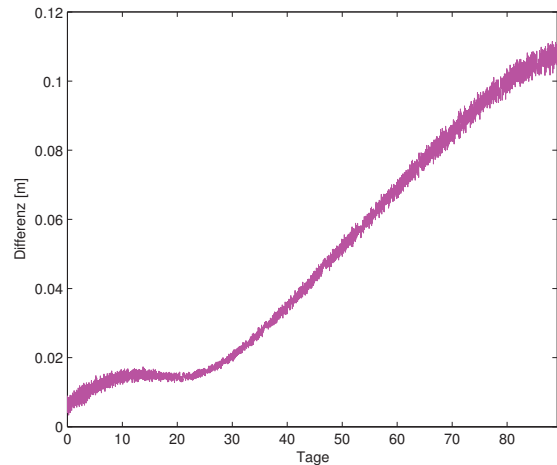


**Abbildung 4.10:** Gegenüberstellung der Differenz der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  und der Position des Mondes jeweils aus der Berechnung mittels MICE und Chebyshev Interpolation.

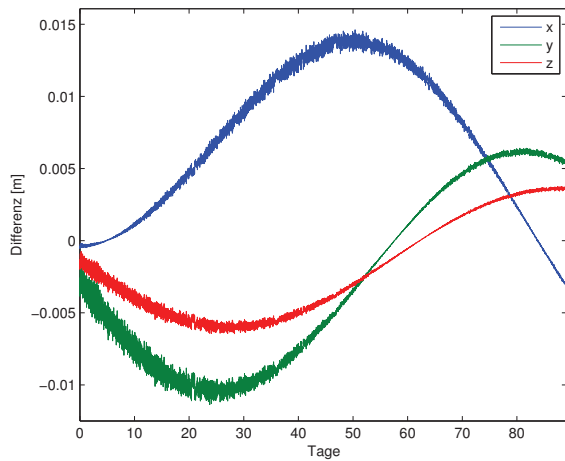
Für die zukünftige Berechnung von Himmelskörpern kann auf die Time Ephemerides TE405 (Irwin und Fukushima, 1999) zurückgegriffen werden, da diese den Anspruch der höchsten Genauigkeit hat. Diese Methode ist allerdings zeitaufwendiger in der Berechnung als die einfacheren Formeln. Die Näherung mit dem geringsten Unterschied zu den Time Ephemerides bietet die Methode nach Montenbruck und Gill (2000).



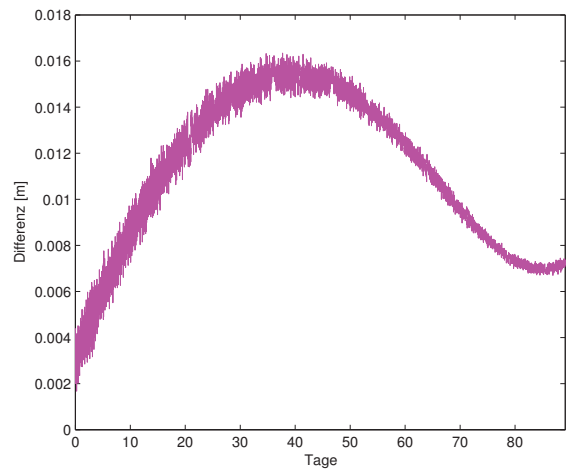
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



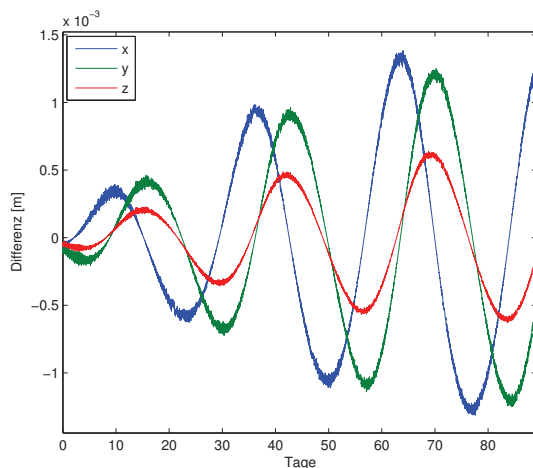
(b) Merkur – Betrag.



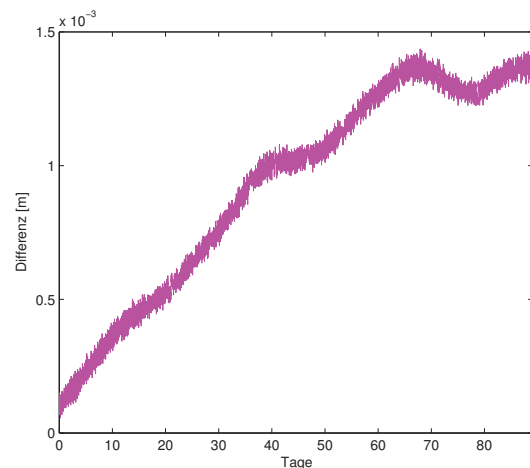
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

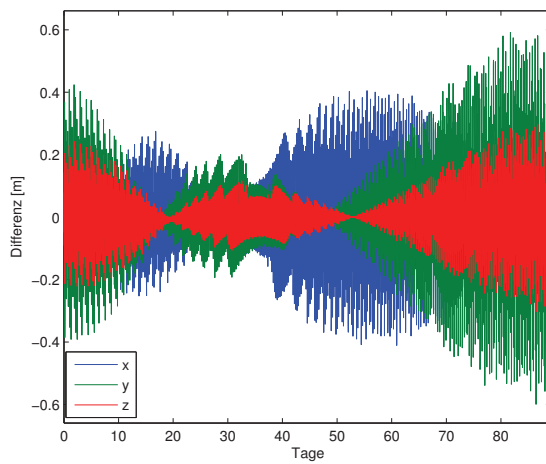


(e) Mond – einzelne Koordinaten.

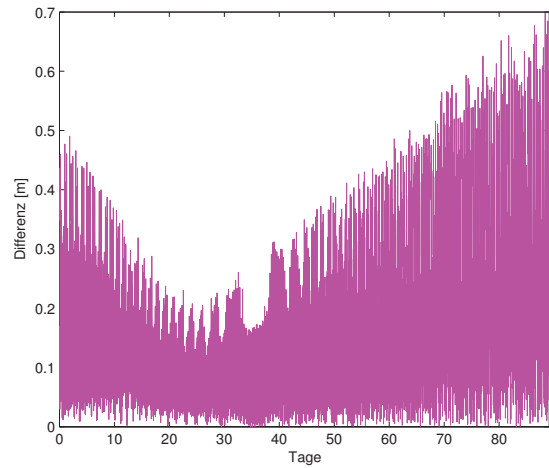


(f) Mond – Betrag.

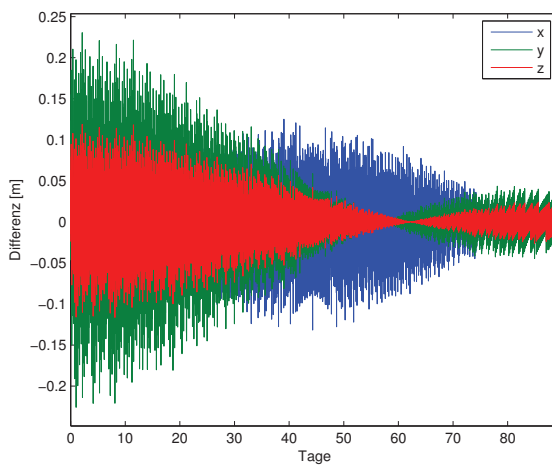
**Abbildung 4.11:** Differenz der geozentrischen Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung der MICE Software und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.



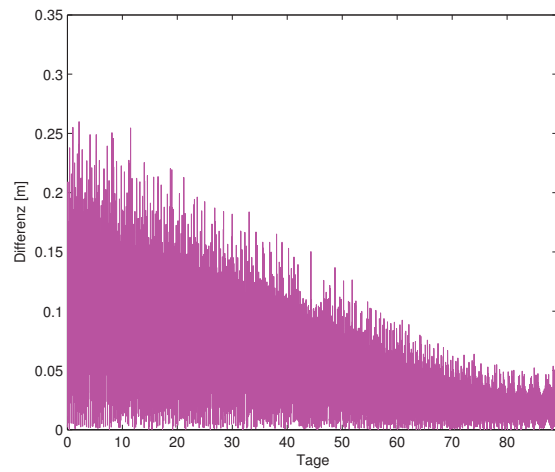
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



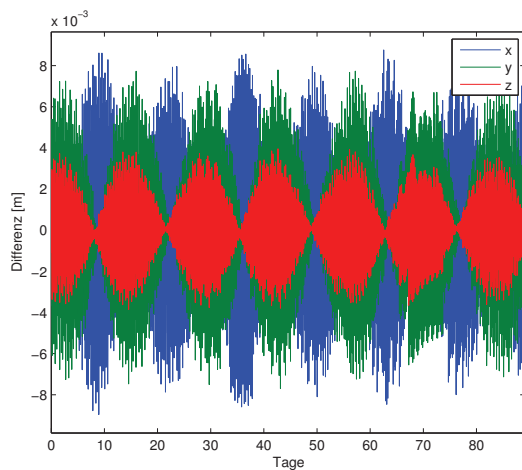
(b) Merkur – Betrag.



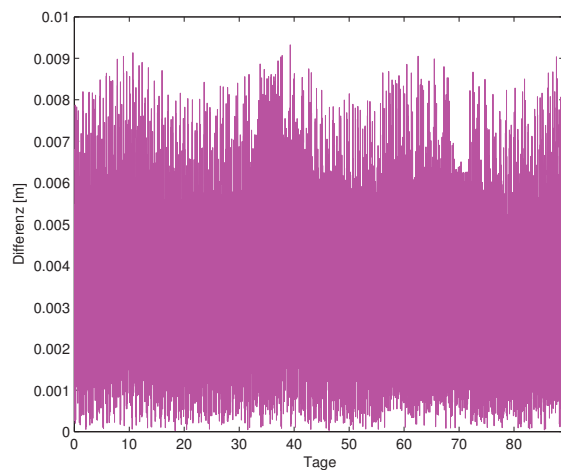
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.



(e) Mond – einzelne Koordinaten.



(f) Mond – Betrag.

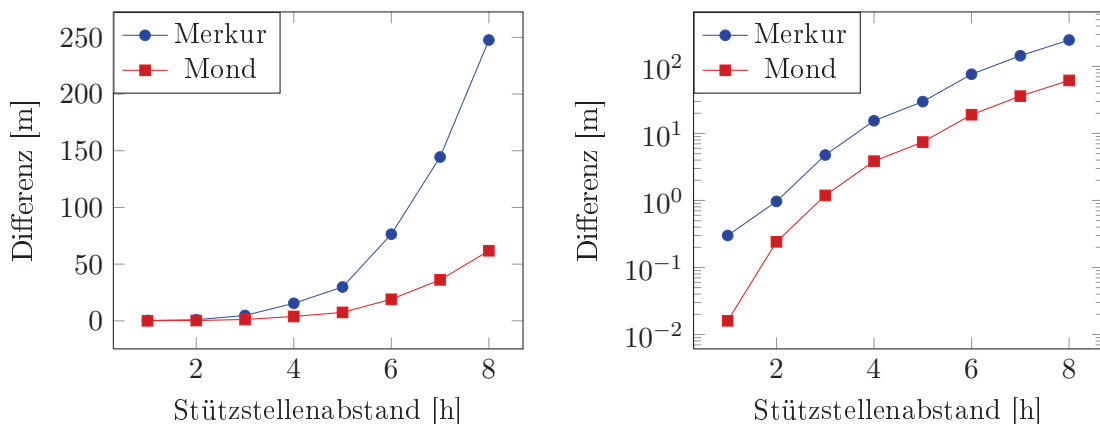
**Abbildung 4.12:** Differenz der geozentrischen Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung des HORIZONS-Webdienstes und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.

## JPL Koeffizienten und Spline Koeffizienten

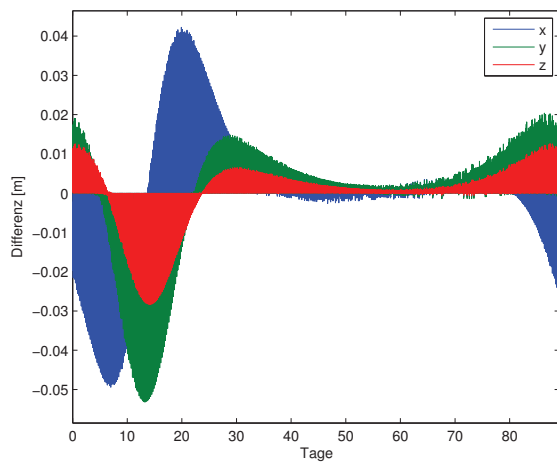
Für das geozentrische System werden ebenfalls Spline Koeffizienten berechnet. Dazu werden zunächst Stützstellen im baryzentrischen System berechnet und dann mittels (3.3) in das geozentrische System transformiert. Die Spline Koeffizienten werden dann aus diesen geozentrischen Stützstellen berechnet.

Die Abbildung 4.14 vergleicht die Differenzen zwischen der Berechnung mit Spline und Chebyshev Koeffizienten mit einem Stützstellenabstand von einer Stunde in der Spline Approximation. Für den Planeten Merkur zeigt sich ein ähnliches Bild wie im Fall der Spline Interpolation im BCRS mit der etwa 90 tägigen Periode des Bahnumlaufs des Merkur. Die maximalen Differenzen sind bis zu 1.5 cm größer im Vergleich von Abbildung 4.14a und Abbildung 4.8a. Die Differenzen der geozentrischen Koordinaten der Venus in Abbildung 4.14c entsprechen in der Größenordnung denen der Differenzen im baryzentrischen System in Abbildung 4.8c im Bereich von 1.2 mm. Die Abbildung 4.14e zeigt die Differenzen für den Mond. Diese erreichen bis zu 1.5 cm und variieren mit dem Umlauf des Mondes um die Erde.

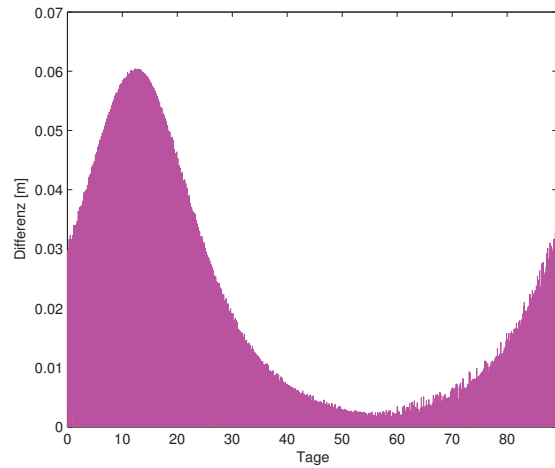
Wie im BCRS (Abbildung 4.9) auch, ist der Unterschied der Spline Interpolation zu den anderen Methoden abhängig vom Abstand der Stützstellen. Die Unterschiede zwischen den Spline und Chebyshev Ergebnissen werden deutlich größer, wenn der Stützstellenabstand der Splines zunimmt. Die Abbildung 4.13 veranschaulicht die Entwicklung der Differenz aus Spline und Chebyshev Interpolation am Beispiel von Mond und Merkur. Die Entwicklung des Merkur verläuft analog zu Abbildung 4.7. Der Unterschied in der Position des Mondes in beiden Methoden der Berechnung ist zunächst nur sehr gering, nimmt jedoch mit wachsendem Stützstellenabstand schnell zu und erreicht bei einem Stützstellenabstand von 8 Stunden 60 m. Im Vergleich zu der geschätzten Genauigkeit der Position des Mondes in den Ephemeriden von einem Meter, sind die 60 m für eine weitere Berechnung zu groß. Der Unterschied zwischen der genauen Berechnung aus JPL Ephemeriden und der Spline Interpolation beträgt bereits bei einem Abstand der Stützstellen von mehr als drei Stunden über einen Meter. Die Abbildung 4.15 zeigt die Differenzen zwischen Spline und Chebyshev Interpolation in Abhängigkeit des Stützstellenabstandes am Beispiel des Mondes. Die Differenz des Merkurs steigt mit wachsendem Stützstellenabstand zwar stärker an, der gravitative Einfluss des Mondes ist jedoch größer.



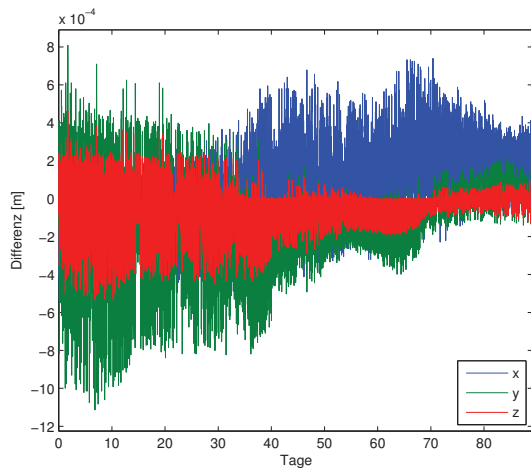
**Abbildung 4.13:** Entwicklung der maximalen Differenz zwischen Spline und Chebyshev Interpolation in Abhängigkeit des Zeitintervalls.



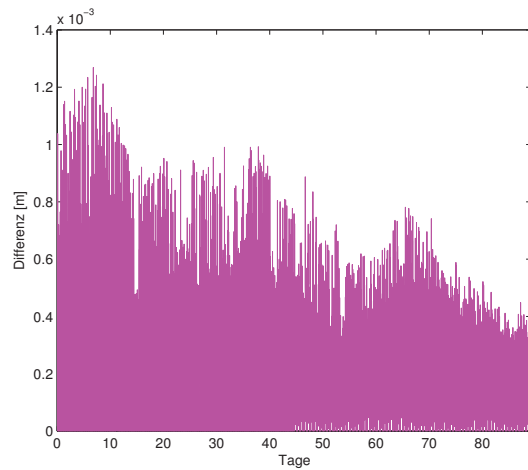
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



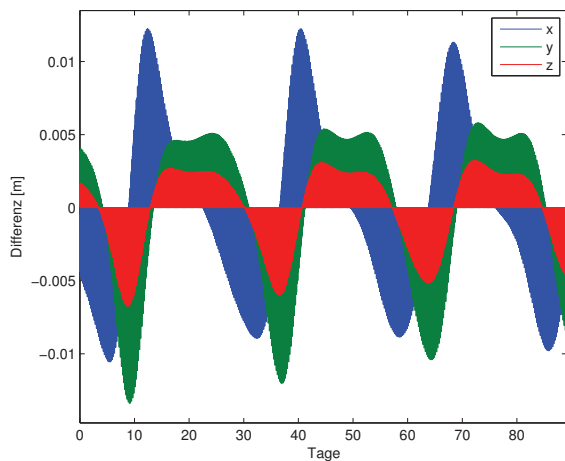
(b) Merkur – Betrag.



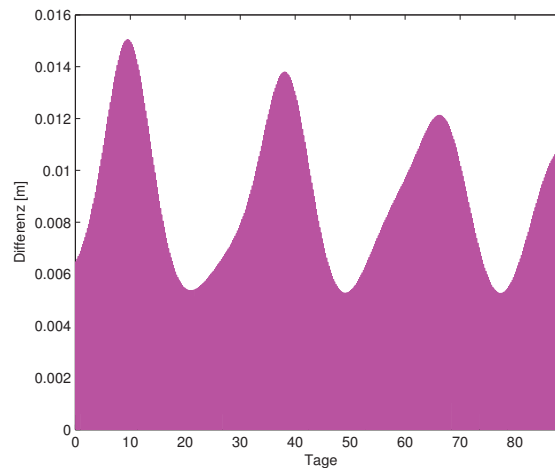
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

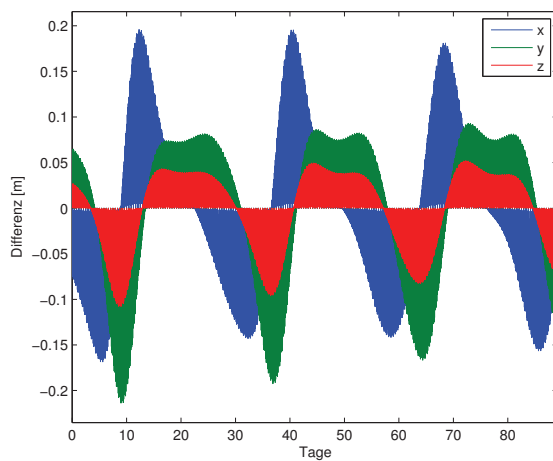


(e) Mond – einzelne Koordinaten.

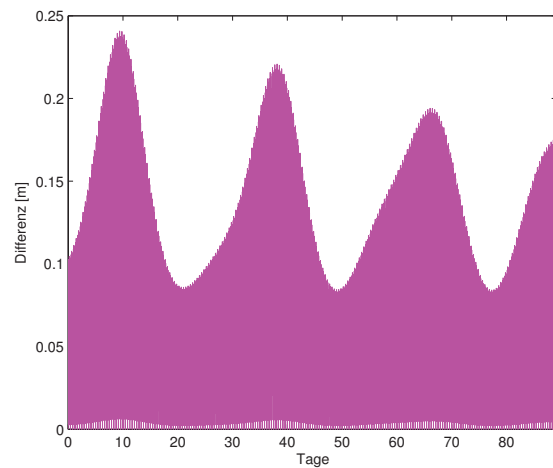


(f) Mond – Betrag.

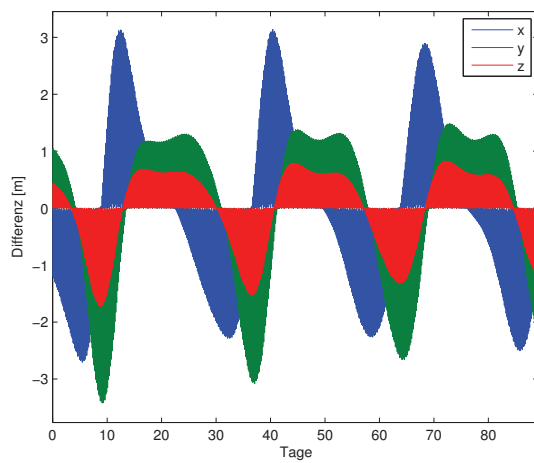
**Abbildung 4.14:** Differenz der geozentrischen Himmelskörperpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung eigener Splines mit einer Stunde Stützstellenabstand und der Chebyshev Polynominterpolation.



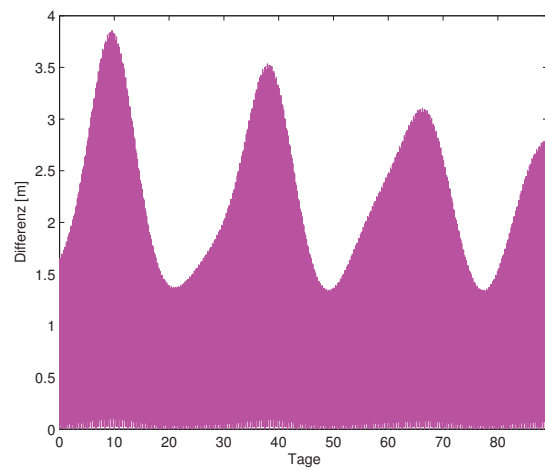
(a)  $\Delta t = 2$  h – einzelne Koordinaten.



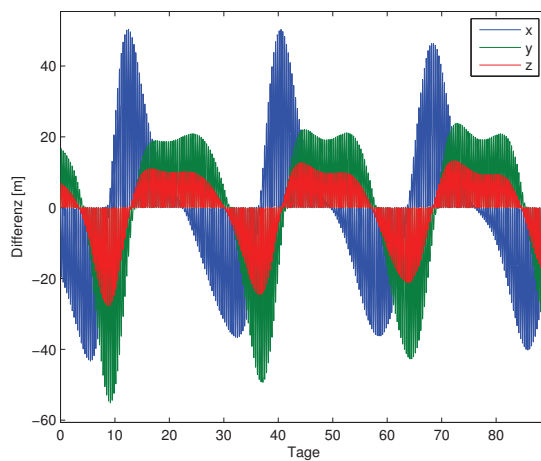
(b)  $\Delta t = 2$  h – Betrag.



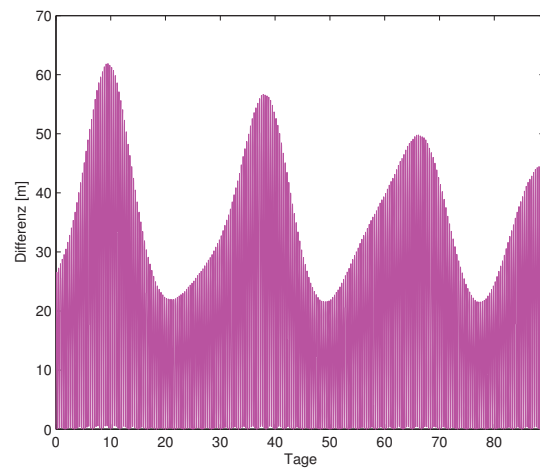
(c)  $\Delta t = 4$  h – einzelne Koordinaten.



(d)  $\Delta t = 4$  h – Betrag.



(e)  $\Delta t = 8$  h – einzelne Koordinaten.



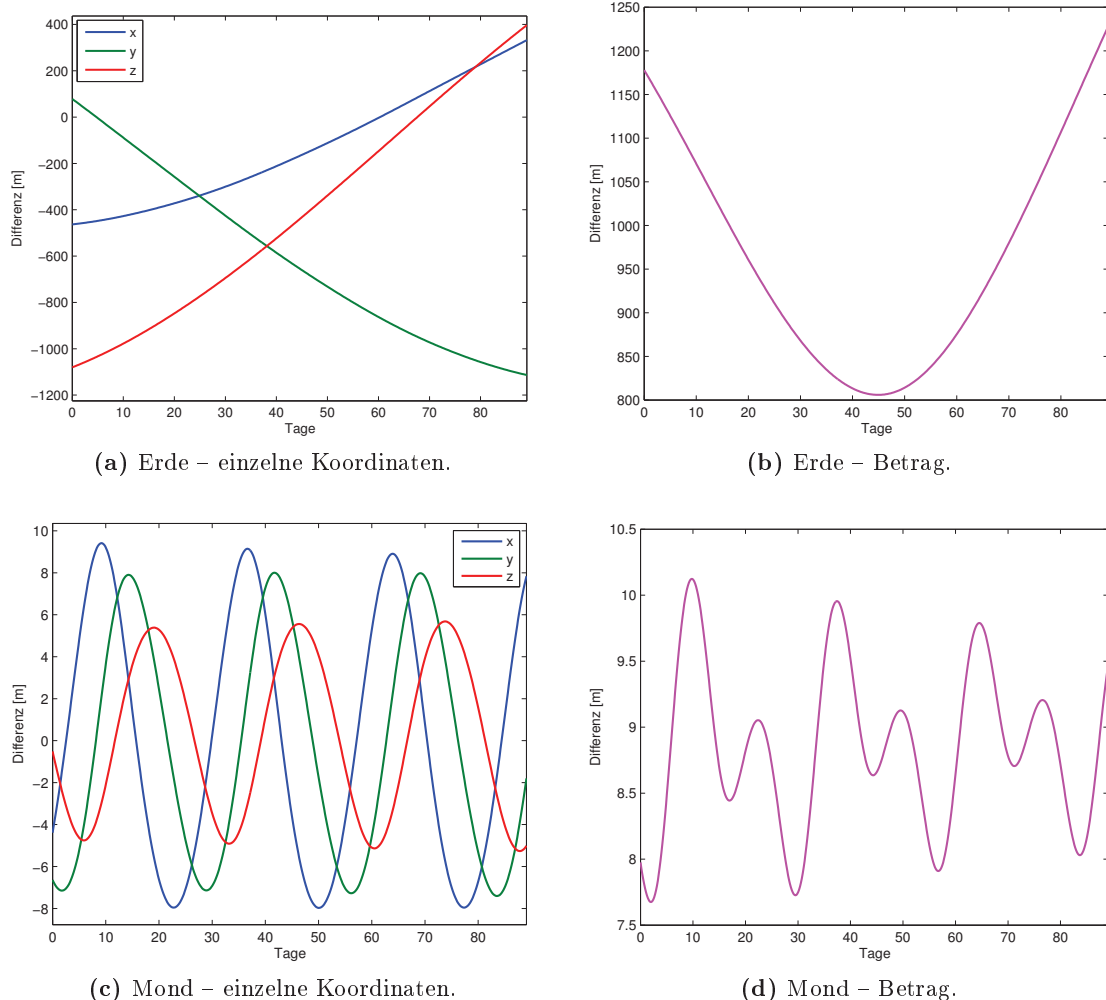
(f)  $\Delta t = 8$  h – Betrag.

**Abbildung 4.15:** Differenz der geozentrischen Positionen des Mondes für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung eigener Splines mit einem Stützstellenabstand  $\Delta t$  von 2, 4 und 8 Stunden und der Chebyshev Polynominterpolation.

### 4.2.3 Vergleich der Ephemeriden DE421 und DE405

In Abschnitt 3.1.1 werden die beiden im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Serien DE405 und DE421 vorgestellt. Diese Serien unterscheiden sich unter anderem durch die Art und Anzahl der Beobachtungen, die in der Integration der Planetenbahnen genutzt werden. Die Abbildung 4.16 zeigt den Vergleich von Positionen eines Himmelskörpers aus der Berechnung mit beiden Ephemeriden Reihen. Dazu werden die Positionen mit der Chebyshev Interpolation unter Nutzung beider Ephemeriden Serien berechnet und die Differenz gebildet.

Die Abbildungen 4.16a und 4.16b zeigen die Differenzen der baryzentrischen Koordinaten der Erde. Der Unterschied in der Berechnung aus beiden Serien erreicht weit über 1000 m. Für die hier nicht gezeigten inneren Planeten sind die Differenzen in der selben Größenordnung. Für die äußeren Planeten und Pluto ist der Unterschied in der Berechnung aus beiden Serien noch größer.

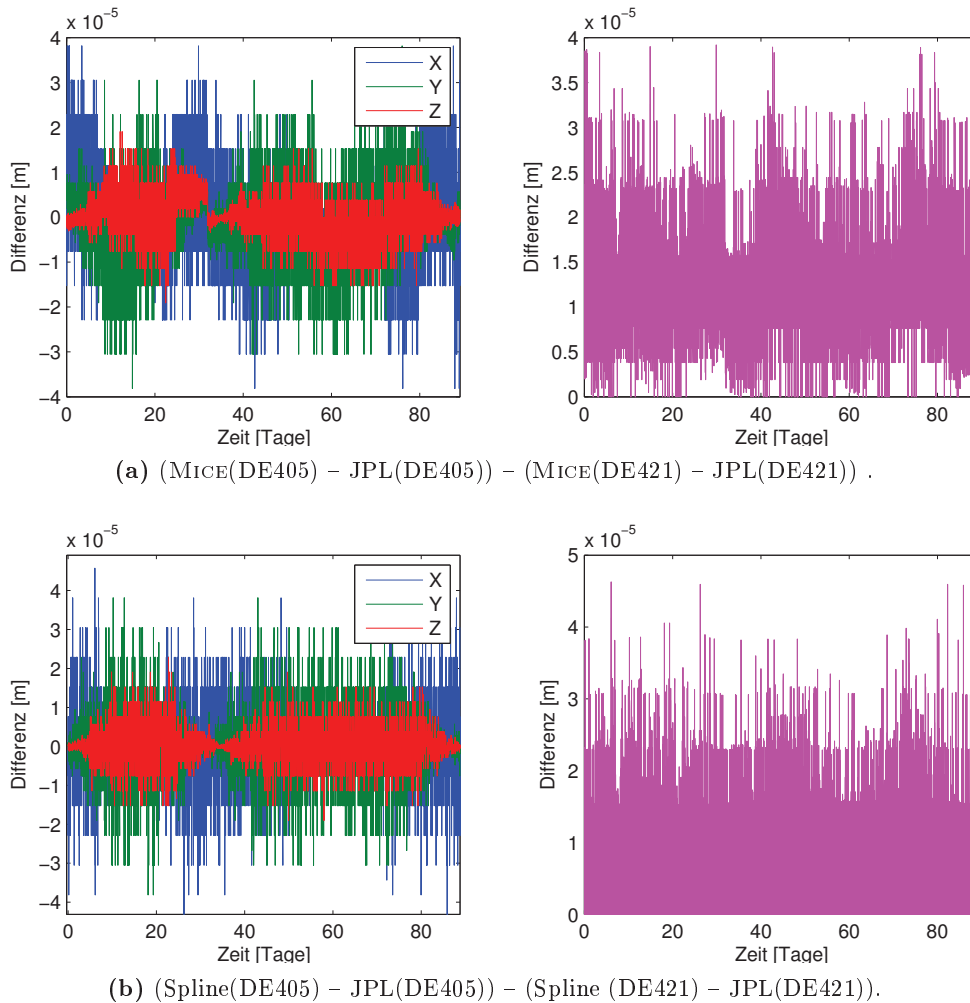


**Abbildung 4.16:** Differenz der Positionen der Erde (BCRS) und Mond (GCRS) bei der Berechnung mit Chebyshev Interpolation aus den Ephemeriden der Serie DE421 und DE405.

In den Abbildungen 4.16c und 4.16d sind die Unterschiede der geozentrischen Position des Mondes aufgeführt. Diese betragen im betrachteten Zeitraum 10 m. Diese Differenz ist zwar

wesentlich geringer, als bei den übrigen Himmelskörpern, jedoch immer noch deutlich größer, als die geschätzte Genauigkeit von einem Meter, mit der die Position des Mondes aus der DE421 Serie berechnet werden kann (Tabelle 3.1). Positionen aus unterschiedlichen Ephemeriden sollten also nicht miteinander kombiniert werden.

Die Berechnungen der Positionen der Himmelskörper funktioniert bei beiden verwendeten Ephemeriden Reihen gleich. Die Abbildung 4.17 vergleicht die Berechnung zwischen zwei Verfahren bei der Nutzung der verschiedenen Ephemeriden. Dazu werden zuerst mit zwei der Verfahren der Positionsbestimmung – MICE und JPL, bzw. JPL und Spline – die Positionen mit den DE405 Ephemeriden berechnet und voneinander abgezogen. Dies ergibt Abbildung 4.5a (bzw.4.8a). Dann werden die Positionen mit den selben Verfahren und den DE421 Ephemeriden bestimmt und die Differenz gebildet.



**Abbildung 4.17:** Differenz der Differenzen aus verschiedenen Berechnungsmethoden der Positionen am Beispiel Merkur.

Die Abbildung 4.17a enthält die Differenz (DE405 – DE421) dieser Differenzen (MICE – JPL). Dies gilt analog für das JPL und Spline Verfahren in Abbildung 4.17b. Die Unterschiede der Verfahren bei Nutzung der einen oder anderen Ephemeriden sind mit  $10^{-5}$  m zu vernachlässigen. Unabhängig von der verwendeten Ephemeriden Reihe, sind die hier getesteten Verfahren gleichermaßen für die Berechnung von Positionen geeignet.



## 4.3 Erdgezeiten

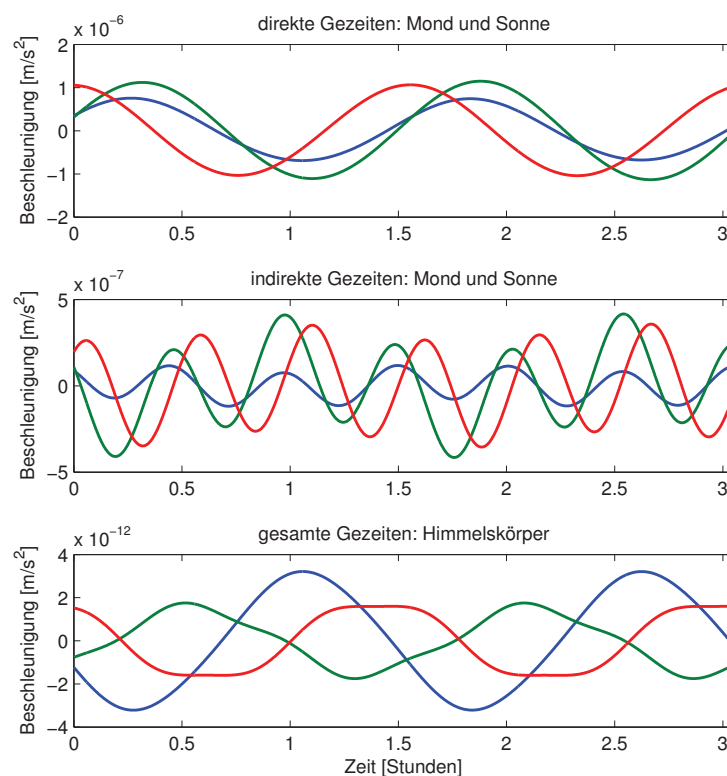
Die Gezeitenbeschleunigung an der Position eines Satelliten kann in der Modellierung durch drei Faktoren beeinflusst werden:

- Anzahl der in der Modellierung eingeschlossenen Himmelskörper,
- Grad der Reihenentwicklung der indirekten Gezeiten,
- Positionen der Himmelskörper.

Die hier gezeigten Gezeitenbeschleunigungen werden in dem inertialem geozentrischen Koordinatensystem berechnet.

### 4.3.1 Anzahl der Himmelskörper

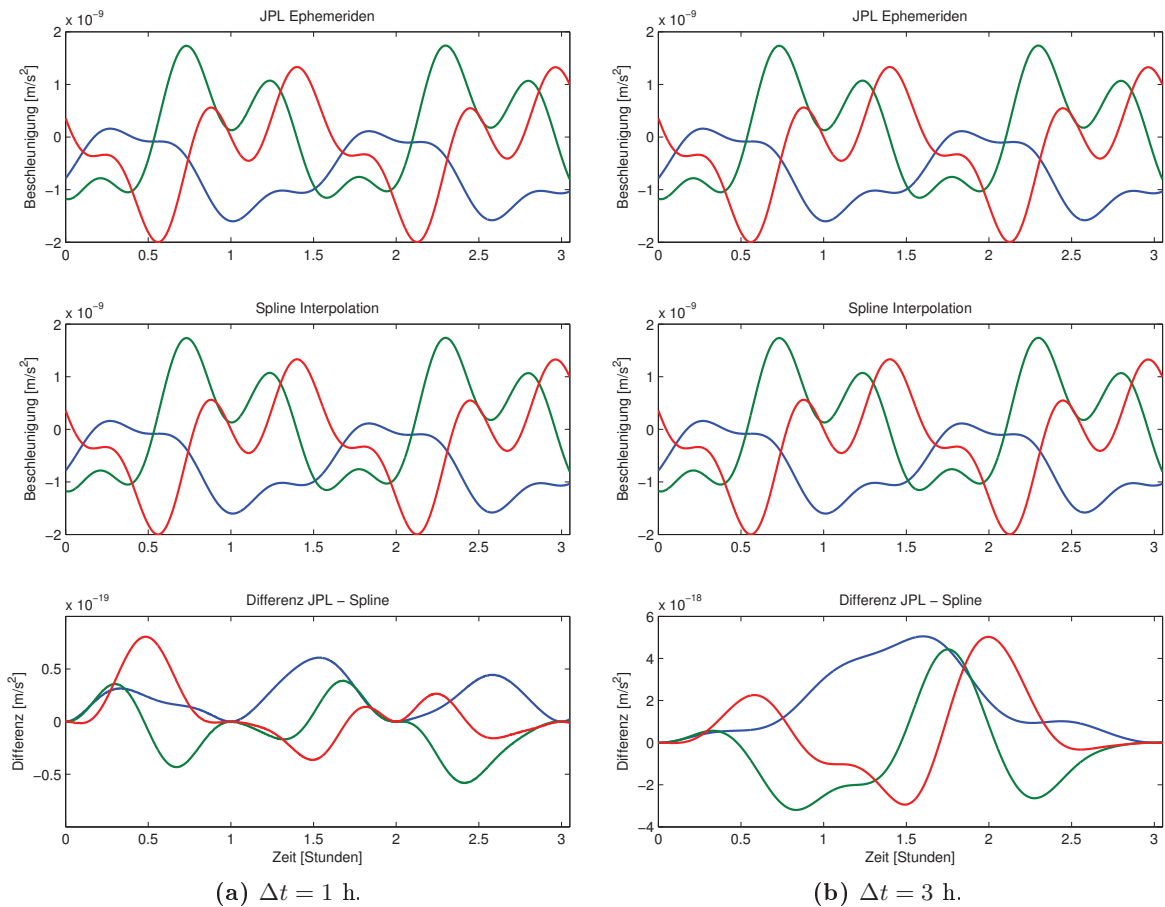
In den Abbildungen 2.7 und 2.8 werden die Größenordnungen der direkten und indirekten Erdgezeiten im Verlauf eines Monats aufgezeigt. Die Abbildung 4.18 veranschaulicht noch einmal die direkten Gezeiten (oben) und indirekten Gezeiten (mitte) verursacht durch Sonne und Mond sowie die gesamten Gezeiten (unten) verursacht durch alle Himmelskörper außer Sonne und Mond innerhalb von 3 Stunden. Die direkten Erdgezeiten aufgrund von Sonne und Mond haben die Größenordnung von  $10^{-6}$   $\text{m/s}^2$ , die indirekten erreichen  $10^{-7}$   $\text{m/s}^2$ . Die direkten und indirekten Gezeiten der Summe aller übrigen Himmelskörper erreichen nur  $10^{-12}$   $\text{m/s}^2$ .



**Abbildung 4.18:** Übersicht verschiedener Gezeiten an einem Satelliten auf einer GRACE ähnlichen Umlaufbahn.

### 4.3.2 Grad der Gezeitenentwicklung

In Abschnitt 2.4 wird die Modellierung der indirekten Erdzeiten bis Grad  $n = 2$  nach (Melchior, 1983) und (Rothacher, 1992), sowie die Entwicklung bis Grad  $n = 4$  durch direkte Ableitung des Deformationspotential  $V_{Def}$  gezeigt. Im Folgenden werden diese Methoden eingesetzt, um die Gezeitenbeschleunigung eines simulierten Satelliten auf einer ungestörten, den GRACE Satelliten ähnlichen Bahn in einer Höhe von 470 km und einer Inklination von  $89^\circ$  zu berechnen. Die Positionen der Himmelskörper werden mittels Chebyshev und Spline Interpolation berechnet.



**Abbildung 4.19:** Differenz der Modellierung der indirekten Gezeiten bis zu Grad 2 und Grad 4 der Reihenentwicklung mit Positionen aus Chebyshev Interpolation (oben) und Spline Interpolation (Mitte) und der Differenz aus den Ergebnissen der JPL und Spline Interpolation (unten). Der Abstand der Stützstellen beträgt eine Stunde (links) und drei Stunden (rechts).

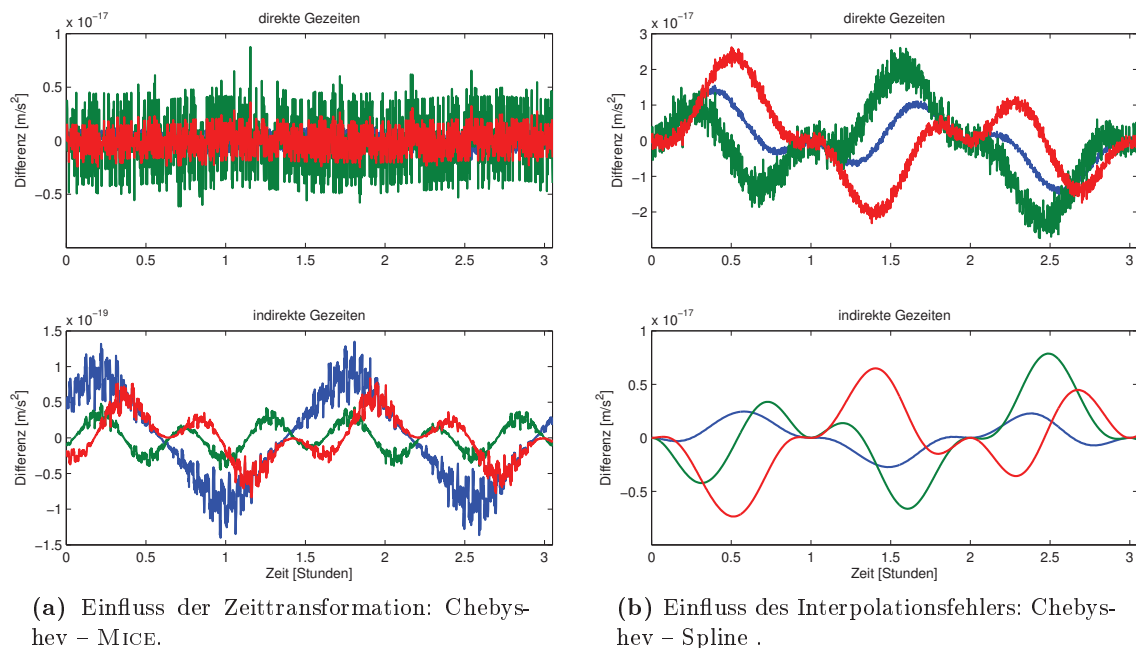
Die Abbildung 4.19 vergleicht die Modellierung der indirekten Gezeiten sowohl nach Grad der Entwicklung, als auch nach Berechnungsmethode der Positionen der Himmelskörper. Der Zeitraum der Darstellung entspricht zwei Umläufen des simulierten Satelliten. Die obere Zeile der Abbildung zeigt die Differenz der indirekten Gezeiten nach Grad 2 und Grad 4 mit den Positionen der Himmelskörper aus den JPL Ephemeriden berechnet. Dieser Unterschied erreicht  $10^{-9}$  m/s<sup>2</sup>. Diese Größenordnung entspricht der Angabe von Wenzel (1997), dass die Reihenentwicklung bis Grad 2 bereits 98% des gesamten Deformationspotentials, bzw der Ge-

zeitenbeschleunigung modelliert. Die mittlere Zeile der Abbildung entspricht der oberen Zeile, mit dem Unterschied, dass die Positionen der Himmelskörper mittels der Spline Interpolation mit ein und drei Stunden Stützstellenabstand bestimmt werden. Die untere Zeile der Abbildung enthält die Differenz der jeweils oberen und mittleren Abbildungen, also die Differenz der Differenz der Gezeitenmodellierung. Diese Abweichung wird nur durch die Positionen der Himmelskörper erzeugt, die sich in der Spline Interpolation geringfügig von denen der Chebyshev Interpolation unterscheiden. In Abbildung 4.19a beträgt der Abstand der Stützstellen  $\Delta t$  eine Stunde. Die Differenz erreicht gerade einmal  $10^{-19} \text{ m/s}^2$  und ist an den Stützstellen Null. In Abbildung 4.19b wurden die Bahnen der Himmelskörper durch Splines mit Stützstellen in einem Abstand von drei Stunden approximiert. Die Beschleunigung aufgrund der unterschiedlichen Positionen der Himmelskörper erreicht  $10^{-18} \text{ m/s}^2$ .

Die Abbildung A.8 auf Seite 73 zeigt noch einmal die Abbildung 4.19 für insgesamt vier Umläufe des Satelliten und einem Stützstellenabstand von drei und sechs Stunden. Bei einem Stützstellenabstand von sechs Stunden beträgt die Beschleunigung aufgrund unterschiedlicher Berechnungen der Himmelskörper bereits  $10^{-16} \text{ m/s}^2$ .

### 4.3.3 Einfluss der Himmelskörper

Wie in den Abschnitten 4.1 und 4.2 beschrieben, wird die Position eines Himmelskörper auch durch die Modellierung der Zeitdifferenz  $TDB - TT$  beeinflusst.



**Abbildung 4.20:** Differenz der Modellierung der direkten (oben) und indirekten Gezeiten (unten) mit der Berechnung der Positionen der Himmelskörper aus Chebyshev Interpolation und MICE (links) und aus Chebyshev und Spline Interpolation mit einer Stunde Stützstellenabstand. (rechts).

In Abbildung 4.20 wird dieser Effekt dargestellt. Die Abbildung 4.20a zeigt die Differenz der direkten Gezeiten in der oberen Abbildung und der indirekten Gezeiten in der unteren

Abbildung. Die direkten bzw. indirekten Gezeiten wurden mit Positionen der Himmelskörper aus Chebyshev Interpolation und MICE bestimmt. In Abbildung 4.20b wurden die Positionen der Himmelskörper mit Chebyshev und Spline Interpolation berechnet. Der direkte Vergleich der Abbildungen 4.20a und 4.20b macht deutlich, dass die unterschiedliche Transformation von  $TDB- TT$  in MICE und Seidelmann (1992) gering ist. Die direkten Gezeiten unterscheiden sich weniger als  $1 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$ . Der Unterschied der Positionen in der Spline Interpolation erzeugt einen größeren Effekt von fast  $3 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$  auf die Berechnung der Gezeiten als dieser Zeitunterschied (siehe Abbildung 2.3d). Bei den indirekten Gezeiten fällt dieser Vergleich mit  $1 \times 10^{-19} \text{ m/s}^2$  zu etwas kleiner als  $1 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$  noch eindeutiger aus<sup>1</sup>. Dies ist nach der Gegenüberstellung der Berechnungen der Himmelskörper im geozentrischen System auch zu erwarten (vgl. Abbildungen 4.11 und 4.14), da die Koordinatenunterschiede bei Beteiligung der Spline Interpolation größer sind als dies bei Nutzung der MICE Funktionen der Fall ist. Die in Abbildung 4.20 gezeigten Differenzen zwischen den verschiedenen Modellierungen ist im Vergleich zu den Gezeitenkräften, die durch alle Himmelskörper außer Sonne und Mond erzeugt werden immer noch gering. Wie in Abbildung 2.8 dargestellt, liegen diese im Bereich von  $10^{-12} \text{ m/s}^2$ .

## 4.4 Satellitenpositionen

Bisher wurden die Beschleunigungen an einer simulierten ungestörten Satellitenposition berechnet, d. h. die Gezeitenbeschleunigungen hatten keinen Einfluss auf die Bahn des Satelliten. Im Folgenden soll der Einfluss der unterschiedlichen Modellierung der Gezeiten auf die Bahn des simulierten Satelliten gezeigt werden. Die Integration des Orbits erfolgt also unter Berücksichtigung der Gezeitenbeschleunigung  $\ddot{a}$  in Formel (2.8).

Durch die in Abschnitt 4.3 vorgestellten Varianten in der Modellierung der Gezeiten, unterscheidet sich die Gezeitenbeschleunigung  $\ddot{a}$  und somit auch die Position des Satelliten in der Integration. Die Abbildung 4.21 zeigt eine Zusammenstellung dieser Fälle. Die Änderung der Satellitenkoordinate bedingt durch eine unterschiedliche Anzahl der Himmelskörper bei gleicher Berechnungsmethode der Himmelskörperpositionen ist in Abbildung 4.21a dargestellt. Den Einfluss auf die Satellitenposition durch den Grad der Gezeitenberechnung und die Modellierung der Planetenpositionen zeigen die Abbildungen 4.21b und 4.21c.

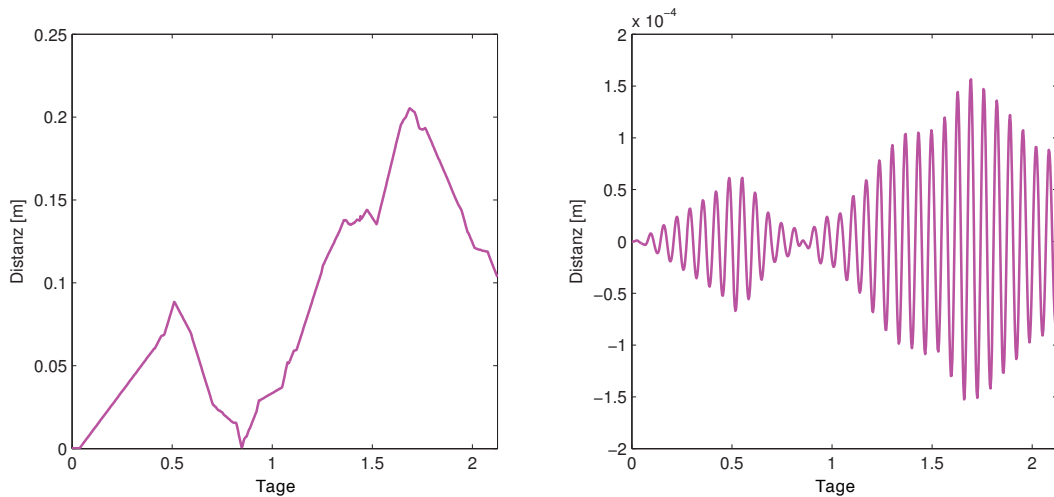
In Abbildung 4.21a wird zunächst die Integration einer Satellitenbahn unter dem Einfluss von Sonne und Mond und ein weiteres mal unter Beteiligung aller Himmelskörper durchgeführt. Der Zeitraum der Integration beträgt zwei Tage. Die Positionen der Himmelskörper werden mit der MICE Methode berechnet. Daher sind die Positionen von Sonne und Mond jeweils identisch und der einzige Unterschied ist die Anzahl der Himmelskörper. Der Unterschied der Gezeitenbeschleunigung ist in der Größenordnung von  $10^{-12} \text{ m/s}^2$ . Die Abbildung 4.21a zeigt den Unterschied der integrierten Satellitenposition in zwei Darstellungen. In der linken wird der Abstand der beiden simulierten Satelliten zu gleichen Zeitpunkten zueinander gezeigt (Betrag der Koordinatendifferenz) und auf der rechten Seite der Unterschied der Satellitenhöhe (Differenz der Koordinatenbeträge). In der letztgenannten Darstellung ist ein periodischer Effekt aufgrund des Bahnumlaufes zu erkennen. Des Weiteren sind die Variationen der Höhe relativ gering.

<sup>1</sup>Die Schwingungen in dem Plot der Differenz der indirekten Erdgezeiten in Abbildung 4.20a sind auf Erreichen der Rechengenauigkeit zurückzuführen.

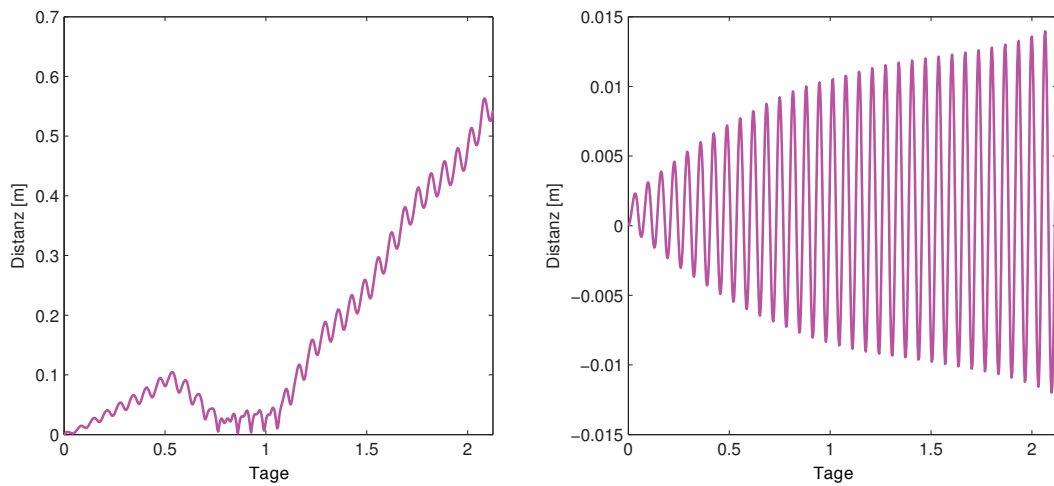
Die Abbildungen 4.21b und 4.21c sind jeweils unter Berücksichtigung der gravitativen Kräfte aller Himmelskörper entstanden. Die Differenz der Satellitenpositionen bei Berechnung der indirekten Gezeiten bis Grad 2 und Grad 4 ist in Abbildung 4.21b dargestellt. Der Unterschied der Gezeitenbeschleunigung beträgt  $10^{-9} \text{ m/s}^2$  (siehe Abbildung 4.19).

Des Weiteren wird die Satellitenbahn berechnet, so dass zwar die Anzahl der enthaltenen Himmelskörper und die Berechnung der indirekten Gezeiten identisch sind, die Positionen der Himmelskörper jedoch unterschiedlichen Verfahren entstammen. Dies ist in Abbildung 4.21c dargestellt. Die Positionen der Himmelskörper werden mit den MICE und Chebyshev Verfahren bestimmt. Die daraus resultierende Differenz der Gezeitenbeschleunigungen liegt bei  $10^{-17} \text{ m/s}^2$  (siehe Abbildung 4.20).

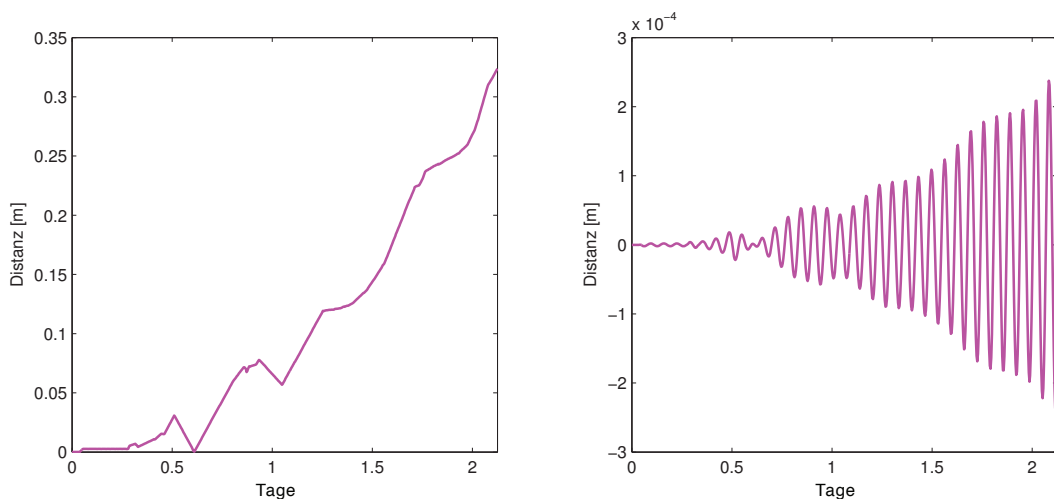
Der Vergleich der Abbildungen 4.21a, 4.21b und 4.21c ergibt erwartungsgemäß, dass die Abweichungen in den Positionen von dem Unterschied in den Gezeitenbeschleunigungen abhängt. Der Unterschied zwischen den Gezeiten aus der Entwicklung bis Grad 2 und Grad 4 ist aus den drei betrachteten Fällen der größte. Im Verlauf der zwei dargestellten Tage wird auch die Differenz der berechneten Satellitenpositionen deutlich größer als in den anderen Fällen. In den beiden anderen Fällen zeigt sich, dass der Effekt durch eine unterschiedliche Anzahl an Himmelskörper in der Berechnung der Gezeiten zu größeren Differenzen in der Satellitenkoordinate führt. Innerhalb eines halben Tages oder sieben Umläufen beträgt der Unterschied zwischen den simulierten Satellitenbahnen etwa 10 cm. Der Unterschied bei der Berechnung der Himmelskörper hat zunächst nur einen geringen Einfluss auf die Satellitenpositionen. Der Unterschied von 10 cm wird erst nach über einem Tag erreicht. In Anbetracht des wesentlich geringeren Unterschiedes zwischen den Gezeiten der beiden simulierten Satellitenbahnen, ist dies auch zu erwarten. Die Abbildung A.9 auf Seite 74 zeigt dies noch einmal für einen Zeitraum von 30 Tagen.



(a) Unterschiedliche Anzahl der Himmelskörper.



(b) Unterschiedliche Gezeitenentwicklung.



(c) Unterschiedliche Berechnung der Himmelskörper.

**Abbildung 4.21:** Unterschiede in Satellitenpositionen aufgrund unterschiedlicher Gezeitenbeschleunigungen mit Betrag der Koordinatendifferenz (links) und Differenz der Koordinatenbeträge (rechts).

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Berechnung des gravitativen Einflusses in Form von direkten und indirekten Gezeiten von Himmelskörpern auf Low Earth Orbiter und Satelliten im Allgemeinen dargestellt. Dazu wurden Funktionen in MATLAB programmiert, die zukünftig in Integratoren zur Berechnung von Satellitenbahnen eingesetzt werden können.

Zunächst wurden theoretische Grundlagen zu den verwendeten Verfahren, wie die Chebyshev Interpolation, den auftretenden Zeitskalen – Terrestrial Time (TT) und Temps Dynamique Barycentrique (TDB) – und der Berechnung von Satellitenbahnen aufgeführt.

Die Modellierung der direkten und indirekten Gezeiten erfordert die Kenntnis der Positionen der Himmelskörper. Für die Bestimmung der Koordinaten der Himmelskörper zu beliebigen Zeitpunkten wurden eigene Verfahren auf Grundlage der Ephemeriden des Jet Propulsion Laboratory (JPL) und zwei durch das JPL zur Verfügung gestellte Lösungen gezeigt. Eine dieser Lösungen – die MICE Software – wurde dabei zum direkten Vergleich mit den eigenen Methoden verwendet. Des Weiteren wurde die Berechnung der Gezeitenkräfte dritter Körper näher erläutert. Am Beispiel eines einfachen Orbitintegrators in MATLAB wurde die Kombination der Berechnungen von Koordinaten und Gezeiten dargestellt.

Abschließend wurden die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren der Positionsbestimmung und Gezeitenberechnung aufgeführt und diskutiert. Zuerst konnte ein Zusammenhang zwischen den verwendeten Zeittransformationen von TDB zu TT und Unterschieden in den berechneten Koordinaten der Himmelskörper mit eigenen Methoden und der JPL Software MICE gefunden werden.

Die eigene Umsetzung der Chebyshev Interpolation variiert um bis zu 8 cm für den innersten Planeten Merkur und deutlich unter einem Zentimeter für die äußeren Planeten. Die Abweichungen erreichen maximale Werte, wenn der Unterschied in der Transformation der Zeitskala zwischen der eigenen Methode und MICE ebenfalls maximal wird. Die in dieser Arbeit zum Vergleich gewählte MICE Methode setzt jedoch eine sehr einfache Näherung der Zeittransformation zwischen TDB und TT ein. Die bestmögliche Berechnung, die in dieser Arbeit umgesetzt wurde, sind die Time Ephemerides (TE) nach Irwin und Fukushima (1999). Auch diese Methode ist wiederum Zeitaufwendig. Die Methode nach Montenbruck und Gill (2000) bietet eine deutlich bessere Näherung als die Zeittransformation mittels MICE oder nach Seidelmann (1992) und reduziert die Rechenzeit deutlich.

Das zweite selbst realisierte Verfahren nutzt die Approximation der Bahnen der Himmels-

körper durch Splines. Diese Splines werden aus den JPL Ephemeriden berechnet, haben im Gegensatz dazu jedoch eine an die Satellitenorbitintegration angepasste Gültigkeit. Dies reduziert die Rechenzeit durch Reduktion von Speicher- und Dateizugriffen. Der Unterschied zwischen den Spline und Chebyshev interpolierten Positionen ist abhängig von dem Stützstellenabstand in der Spline Approximation. Für einen Stützstellenabstand von einer Stunde erreichen die Differenzen zwischen genauer Berechnung durch Chebyshev Interpolation und Spline Interpolation für Merkur maximal 6 cm, den Mond 1.5 cm und die äußeren Planeten unter einem Zentimeter. Bei größerem Stützstellenabstand steigen diese Unterschiede jedoch schnell in den Bereich einiger Meter.

Die geschätzten Genauigkeiten, mit denen die Positionen von Himmelskörpern mit den JPL Ephemeriden berechnet werden können, liegen bei mehreren hundert Metern bis zu Kilometern für die Planeten und unter einem Meter für die Position des Mondes. Im Gegensatz dazu sind die hier genannten Unterschiede in den Koordinaten aus den eigenen Methoden und denen des JPL sehr gering.

Die Positionen der Himmelskörper werden zu der Modellierung der direkten und indirekten Gezeiten verwendet. Daher haben die angesprochenen Koordinatenunterschiede auch Einfluss auf die Gezeiten. Die Summe aus direkten und indirekten Gezeiten stimmen bei der Chebyshev Interpolation und der Berechnung mit MICE bis auf etwa  $0.5 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$  überein. Bei Nutzung der Spline Interpolation mit einer Stunde Stützstellenabstand anstelle der Chebyshev Interpolation ist die Übereinstimmung noch bei  $3 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$ . Diese Werte sind deutlich unter dem Effekt von etwa  $4 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2$ , der durch die Himmelskörper außer Sonne und Mond entsteht. Der Unterschied in der indirekten Gezeitenbeschleunigung, der durch die Entwicklung der Gezeiten bis Grad 4 anstelle von Grad 2 entsteht, beträgt sogar  $2 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$

Es konnte gezeigt werden, dass sich diese Variationen in den Gezeiten in der Integration der Satellitenbahn bemerkbar machen. Der Einfluss auf die Satellitenposition richtet sich nach dem Unterschied in der Beschleunigung. In dem in der Arbeit implementiertem einfachen Bahnintegrator ist dies der einzige Bestandteil der Satellitenbahnintegration, der sich ändert. So hat die Methode der Berechnung der Positionen der Himmelskörper, aus denen die Gezeiten berechnet werden, sehr deutlich den geringsten Einfluss.

Aus diesen Ergebnisse kann geschlossen werden, dass es möglich ist, die Positionen der Himmelskörper durch eigene Splines zu berechnen. Bei einer Stunde Abstand der Stützstellen, die aus JPL Ephemeriden berechnet werden, sind die Unterschiede in den resultierenden Gezeitenkräften so gering, dass die Auswirkung auf die Satellitenposition über den Zeitraum mehrerer Stunden unter einem Zentimeter bleibt.



# Anhang A

## Ergänzende Bilder

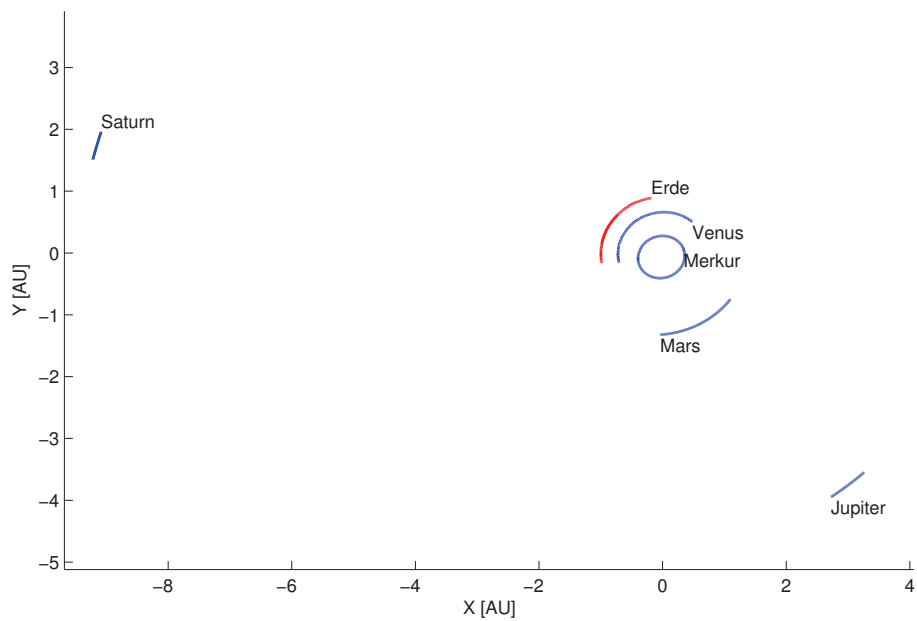
### A.1 Ergänzung zu Kapitel 2

Die Abbildung A.3 zeigt den Betrag der Summe aus direkten und indirekten Erdgezeiten  $\ddot{a}$  für das Jahr 2009. Diese werden durch jeweils einen einzelnen Himmelskörper an einer unbewegten geozentrischen Position 470 km über der Erdoberfläche verursacht. In den Störbeschleunigungen zeigen sich Perioden aus dem Umlauf des Planeten und der Erde um die Sonne, sowie im Fall des Mondes des Umlaufs um die Erde. Die Abbildung A.1 zeigt noch einmal die Lage der inneren Planeten mit Jupiter und Saturn im Zeitraum Januar bis März 2009 in der x-y-Ebene.

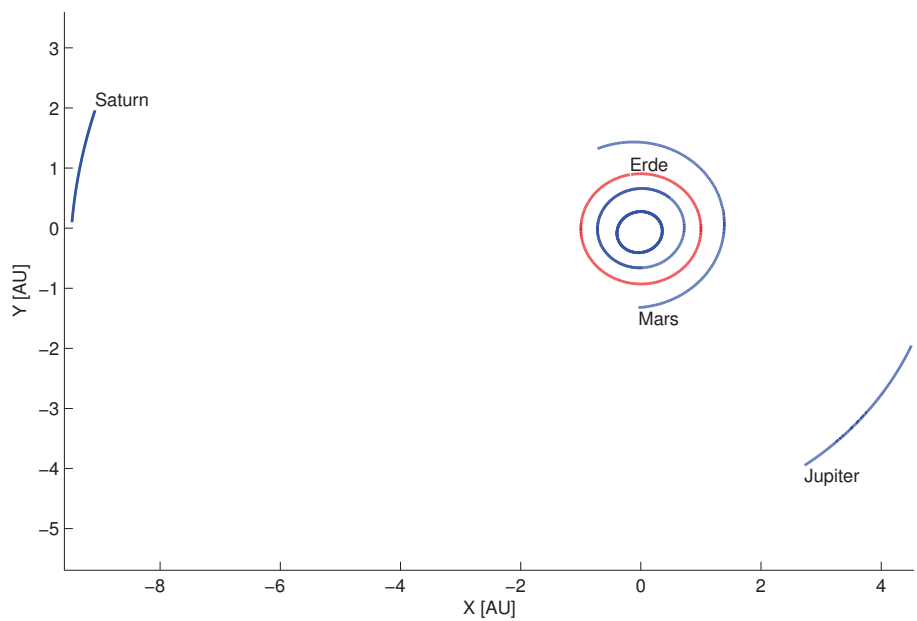
Die Abbildung A.2 zeigt die Lage der selben Planeten für den Zeitraum des ganzen Jahres 2009. Der Merkur hat vier Umläufe um die Sonne durchgeführt und dabei die Erde drei mal passiert. Die Venus hat etwa 1.6 Umläufe um die Sonne durchgeführt und dabei die Erde einmal passiert. Die Erde hat einen Umlauf um die Sonne durchgeführt. Der Mars hat – mit einer Umlaufperiode von 687 Tagen – etwas mehr als einen halben Umlauf um die Sonne durchgeführt. Die Darstellung erweckt den Anschein, dass der Mars die Erde bereits passiert hat. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die Erde den Mars auf ihrer Umlaufbahn einholt und nicht umgekehrt.

Zwischen diesen Positionen und den Beschleunigungen sind deutliche Zusammenhänge zu erkennen. Da der simulierte Satellit sich im geozentrischen System nicht bewegt, variiert der Abstand von Mond und Satellit nur durch die monatliche Umdrehung des Mondes um die Erde. Daher sind in einem Monat zwei unterschiedlich stark ausgeprägte Maxima in der durch den Mond verursachten Beschleunigung. In einem Fall ist der Satellit auf einer Achse bzw. in einer Ebene zwischen Mond und Erde, also näher am Mond, und im zweiten Fall ist der Satellit auf dieser Achse mit der Erde zwischen Satellit und Mond, also weiter entfernt vom Mond. Der Merkur passiert zwischen Januar und März die Erde einmal und verursacht einen Anstieg in den Gezeiten. Im weiteren Verlauf des Jahres passiert der Merkur die Erde zwei weitere Male, davon in der Jahresmitte deutlich näher als bei den anderen beiden Umläufen. Die Venus erreicht Ende März ihre einzige Annäherung an die Erde in dem Jahr. Im Verlauf des Jahres nähert sich die Erde dem Mars an, daher nimmt die Gezeitenbeschleunigung im Verlauf des Jahres zu. Für die gezeigten äußeren Planeten sind die Gezeiten in erster Linie von der Bewegung der Erde bestimmt. Die Gezeiten für Jupiter, Saturn und Pluto zeigen daher eine fast jährliche Periode, da die Bewegung der äußeren Planeten im Vergleich zur Erde gering

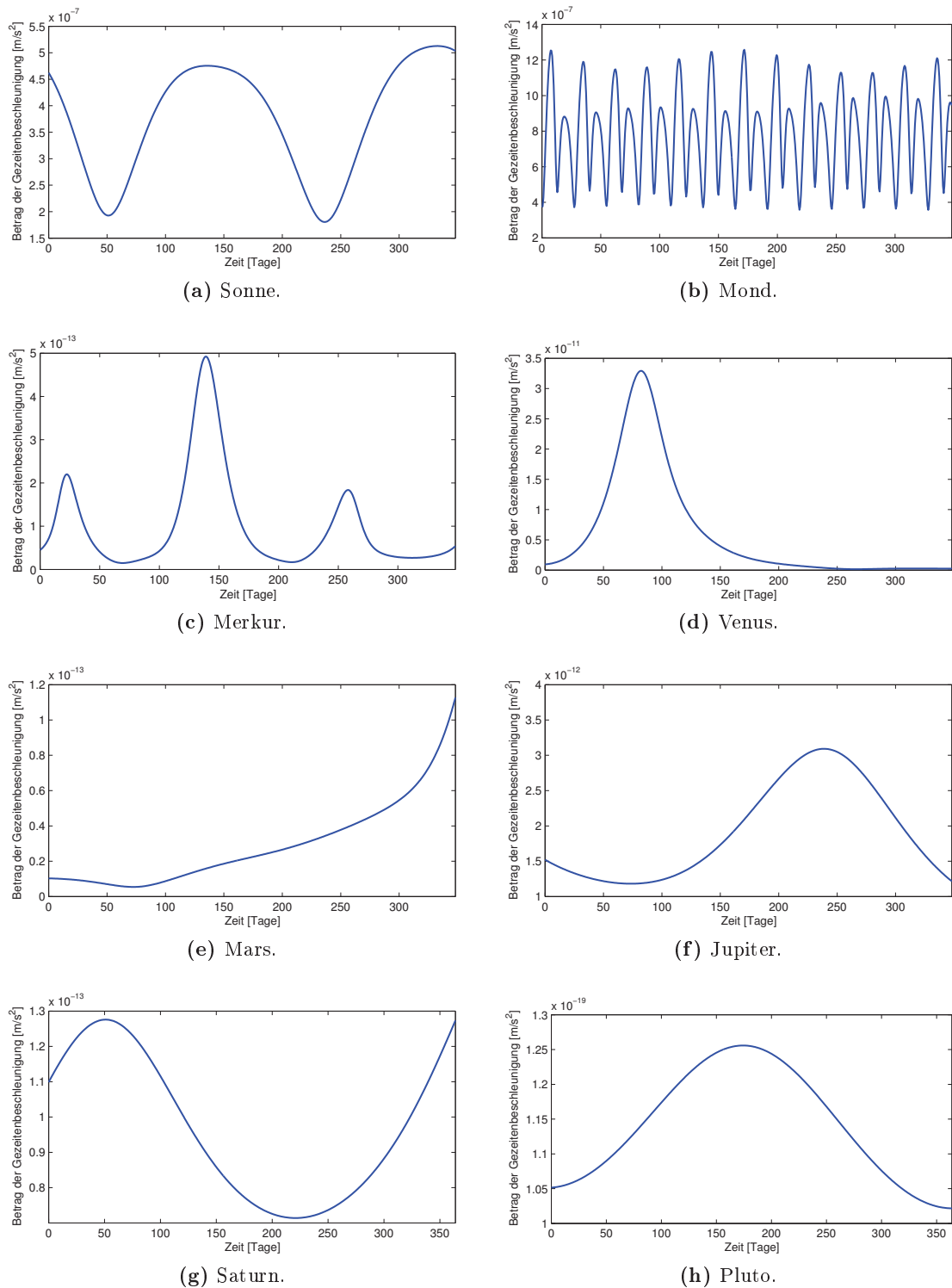
ist. Die Beschleunigungen der Planeten sind jedoch um mehrere Größenordnungen kleiner als die von Sonne oder Mond.



**Abbildung A.1:** Planeten des inneren Sonnensystems mit Jupiter und Saturn für Januar bis März 2009 im BCRS. Die Bezeichnung des Himmelskörpers ist an der Position des Planeten am 01.01.2009.



**Abbildung A.2:** Planeten des inneren Sonnensystems mit Jupiter und Saturn für das Jahr 2009 im BCRS. Die Bezeichnung des Himmelskörpers ist an der Position des Planeten am 01.01.2009.



**Abbildung A.3:** Durch einzelne Himmelskörper verursachte direkte und indirekte Erdgezeiten im Verlauf des Jahres 2009. Die Darstellung zeigt den Betrag der Beschleunigung an einer unbewegten Position oberhalb der Erdoberfläche in der Höhe der GRACE Satelliten.

## A.2 Ergänzung zu Kapitel 4

Die Abbildung A.4 zeigt die Koordinatendifferenzen der inneren Planeten zwischen JPL Ephemeriden und MICE im Verlauf eines Jahr. Für die inneren Planeten betragen diese Differenzen mehrere Zentimeter mit einer jährlichen Periode.

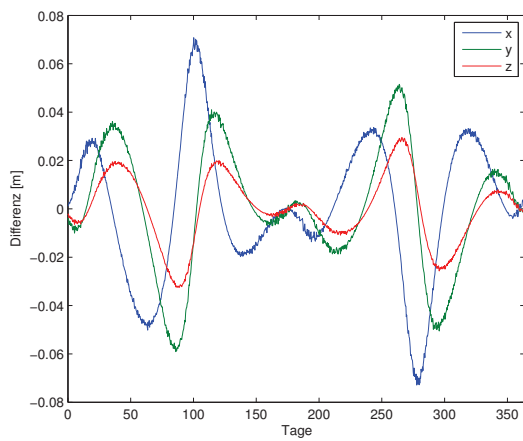
Die Abbildung A.5 zeigt analog zu Abbildung A.4 die Differenzen für die äußeren Planeten Jupiter, Saturn und Uranus. Die Größenordnung der Unterschiede sind für die äußeren Planeten wesentlich geringer. Die jährliche Periode ist weiterhin enthalten.

Die Abbildung A.6 zeigt die Differenz aus Positionen mittels Splines mit einer Stunde Stützstellenabstand und MICE Berechnung. Die hier gezeigten Differenzen sind die Summe der in Abbildung 4.5 auf Seite 43 gezeigten Differenzen zwischen MICE und Chebyshev Interpolation und den Differenzen zwischen Chebyshev Interpolation und der Spline Interpolation in Abbildung 4.8 auf Seite 46.

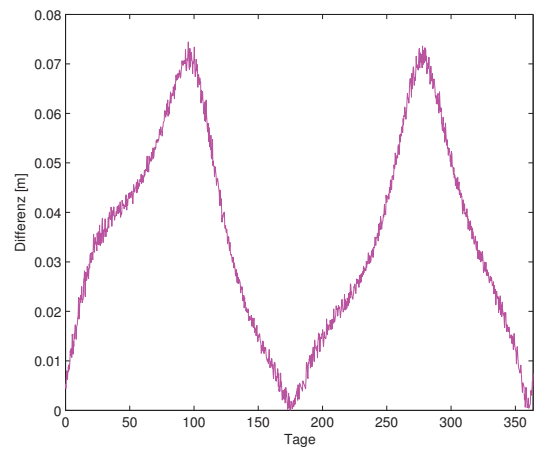
Die Abbildung A.7 zeigt die Differenzen der geozentrischen Koordinaten aus der MICE Software und Chebyshev Interpolation für das Jahr 2009.

Die Abbildung A.8 zeigt die Unterschiede in der Modellierung der indirekten Erdzeiten bei Entwicklung der Gezeiten bis Grad 2 und Grad 4 bei unterschiedlicher Berechnung der Positionen der Himmelskörper. Dargestellt werden 4 Umläufe des Satelliten. Zusätzlich ist die Differenz der Unterschiede der indirekten Grad 2 und Grad 4 Gezeiten dargestellt. Mit größerem Stützstellenabstand steigen auch die Differenzen in der Modellierung der Gezeiten.

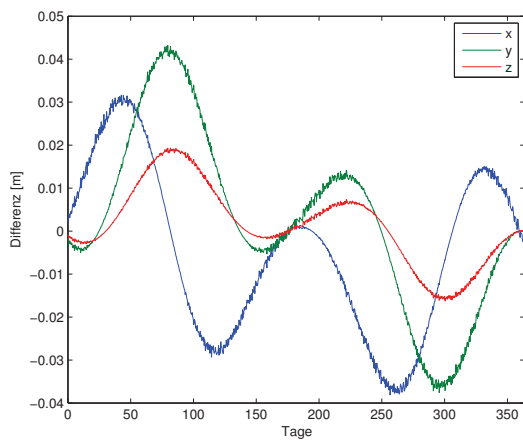
Die Abbildung A.9 zeigt an drei Beispielen den Unterschied in der Satellitenposition, der durch eine Änderung in der Berechnung der Gezeiten im Verlauf von 30 Tagen verursacht wird. Abbildung A.9a liegt eine unterschiedliche Anzahl der Himmelskörper in der Gezeitenberechnung zu Grunde. Abbildung A.9b zeigt den Unterschied zwischen Positionen bei abweichendem Grad der Gezeitenentwicklung. Bei Abbildung A.9c kommen zwei Methoden der Positionsbestimmung der Himmelskörper zum Einsatz.



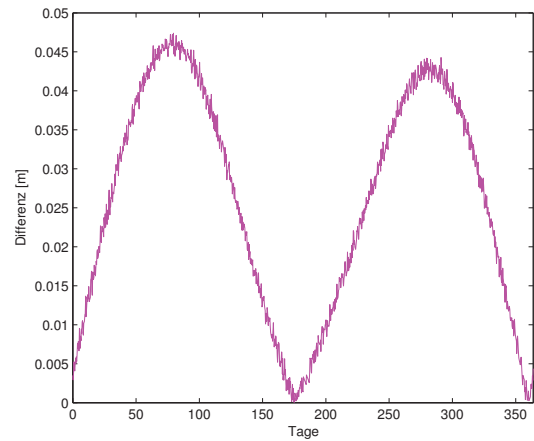
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



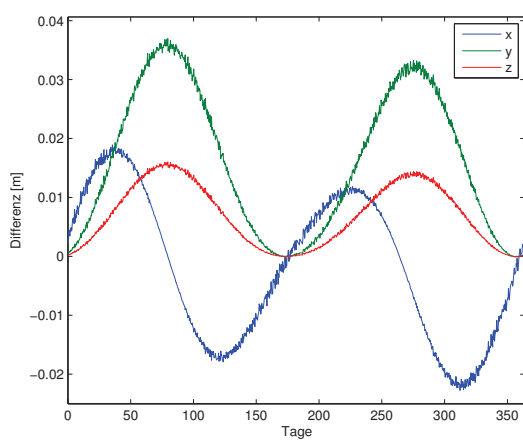
(b) Merkur – Betrag.



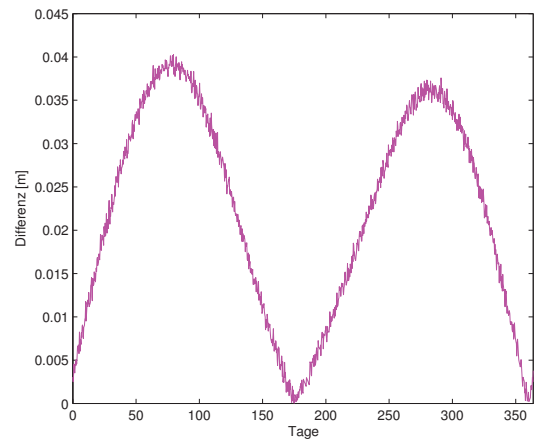
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

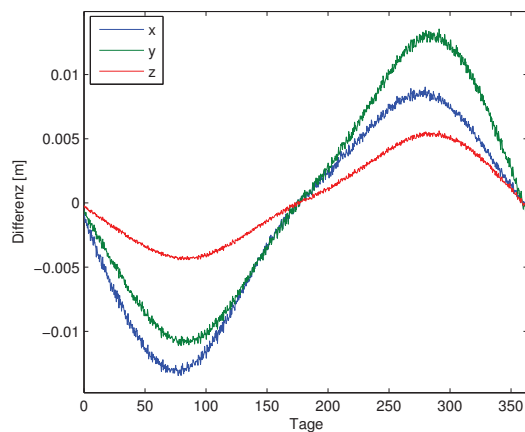


(e) Erde – einzelne Koordinaten.

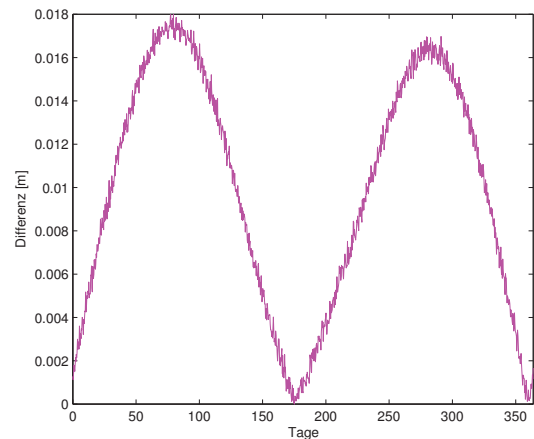


(f) Erde – Betrag.

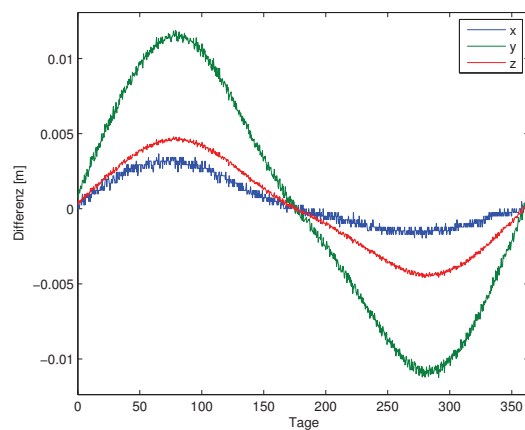
**Abbildung A.4:** Differenz der baryzentrischen Positionen innerer Planeten für das Jahr 2009 aus der Berechnung der MICE Software und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.



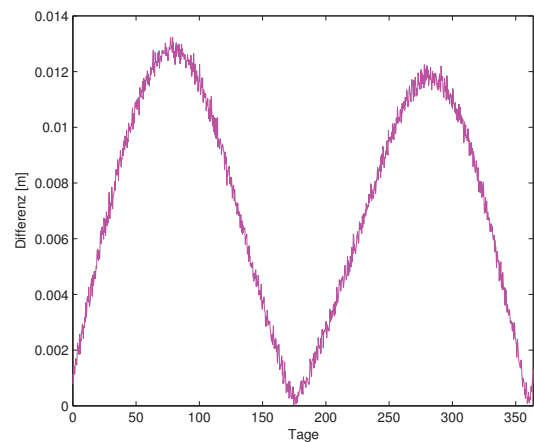
(a) Jupiter – einzelne Koordinaten.



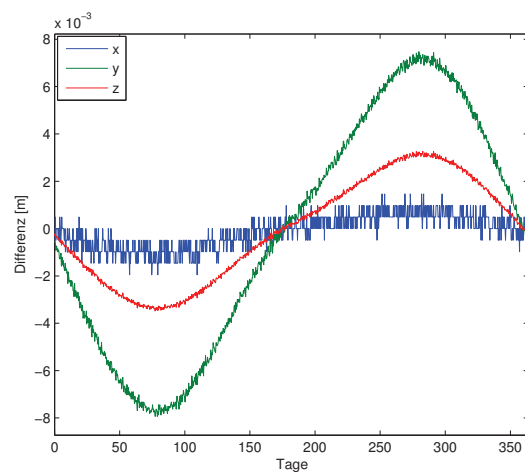
(b) Jupiter – Betrag.



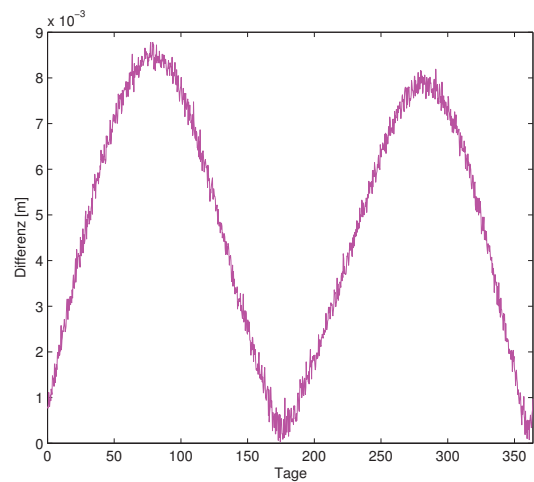
(c) Saturn – einzelne Koordinaten.



(d) Saturn – Betrag.

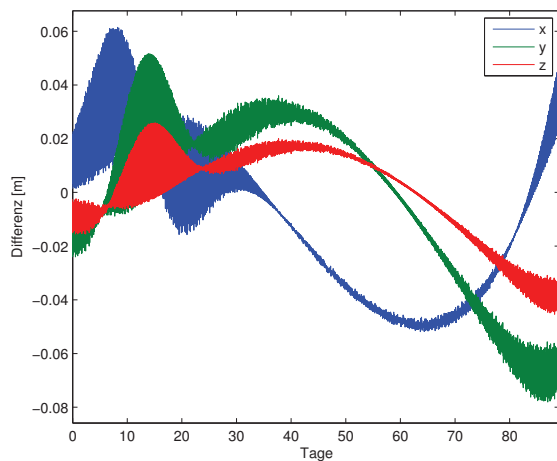


(e) Uranus – einzelne Koordinaten.

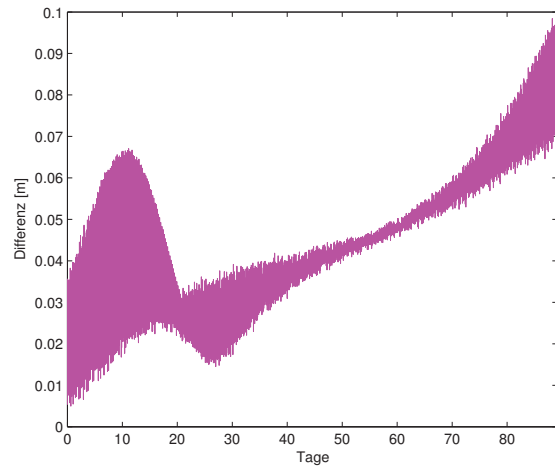


(f) Uranus – Betrag.

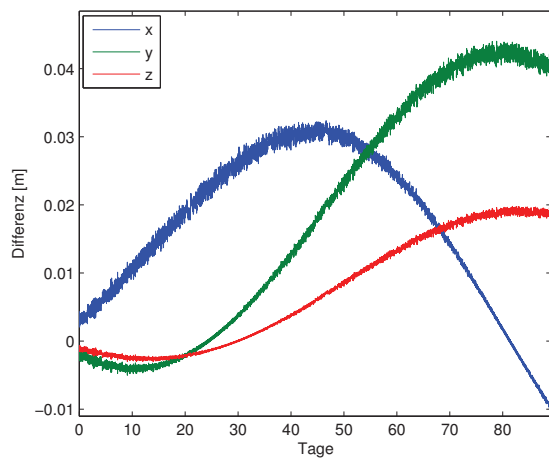
**Abbildung A.5:** Differenz der baryzentrischen Positionen äußerer Planeten für das Jahr 2009 aus der Berechnung der MICE Software und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.



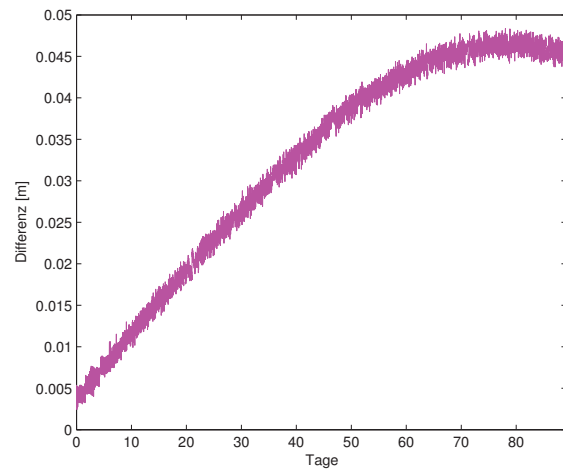
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



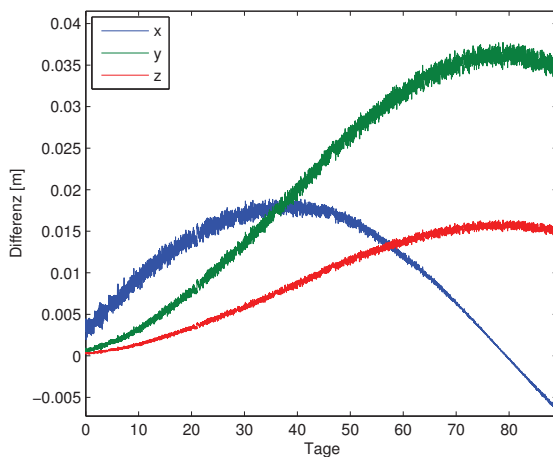
(b) Merkur – Betrag.



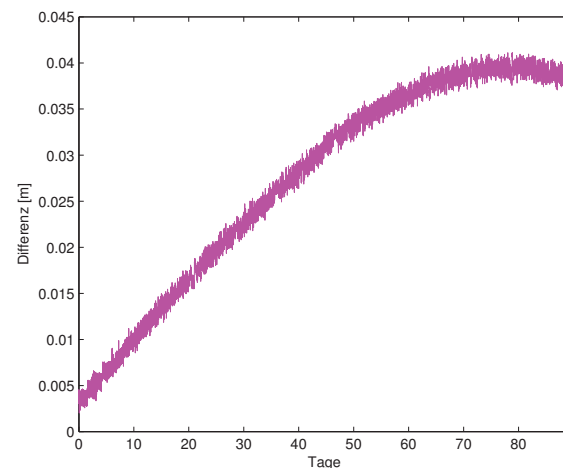
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.

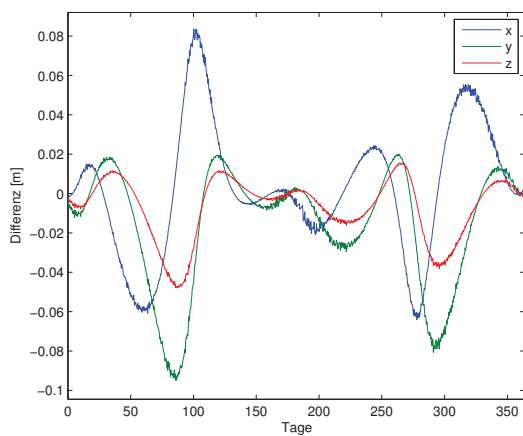


(e) Erde – einzelne Koordinaten.

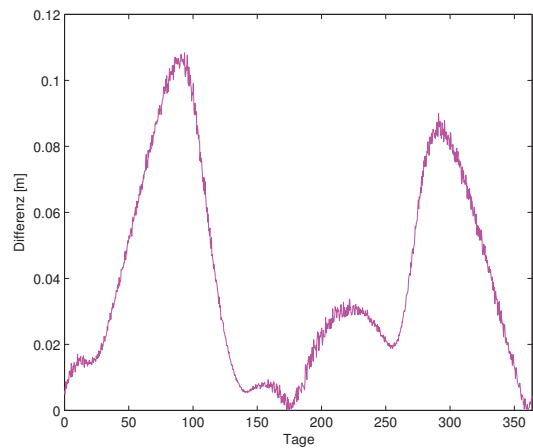


(f) Erde – Betrag.

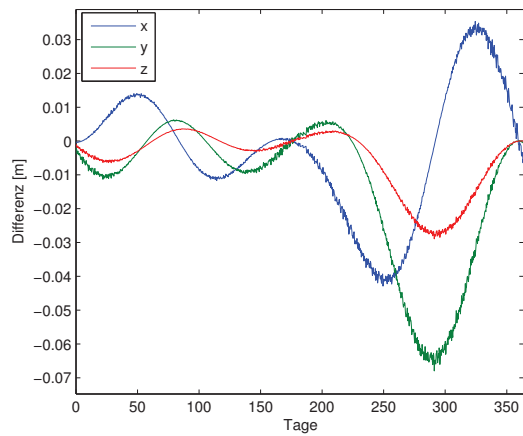
**Abbildung A.6:** Differenz der baryzentrischen Planetenpositionen für den Zeitraum Januar bis März 2009 aus der Berechnung eigener Splines mit einer Stunde Stützstellenabstand und der MICE Software.



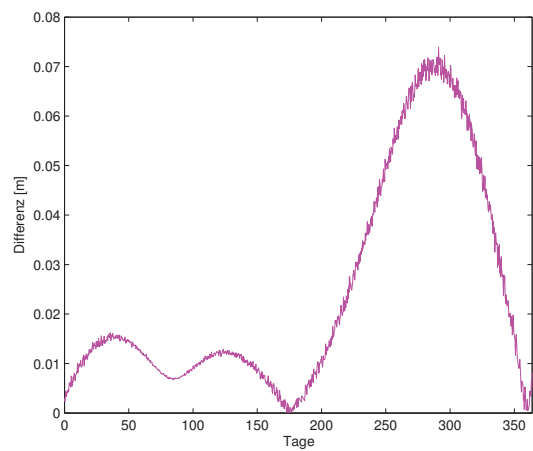
(a) Merkur – einzelne Koordinaten.



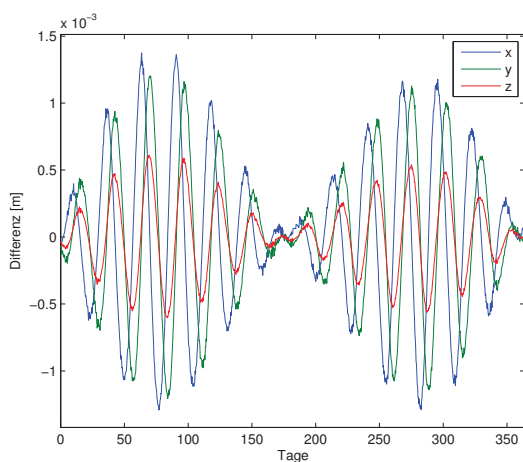
(b) Merkur – Betrag.



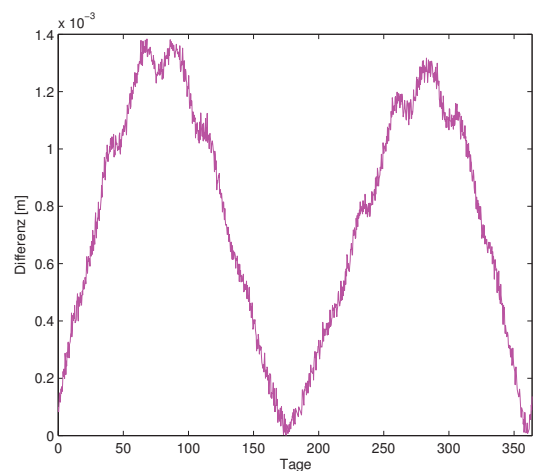
(c) Venus – einzelne Koordinaten.



(d) Venus – Betrag.



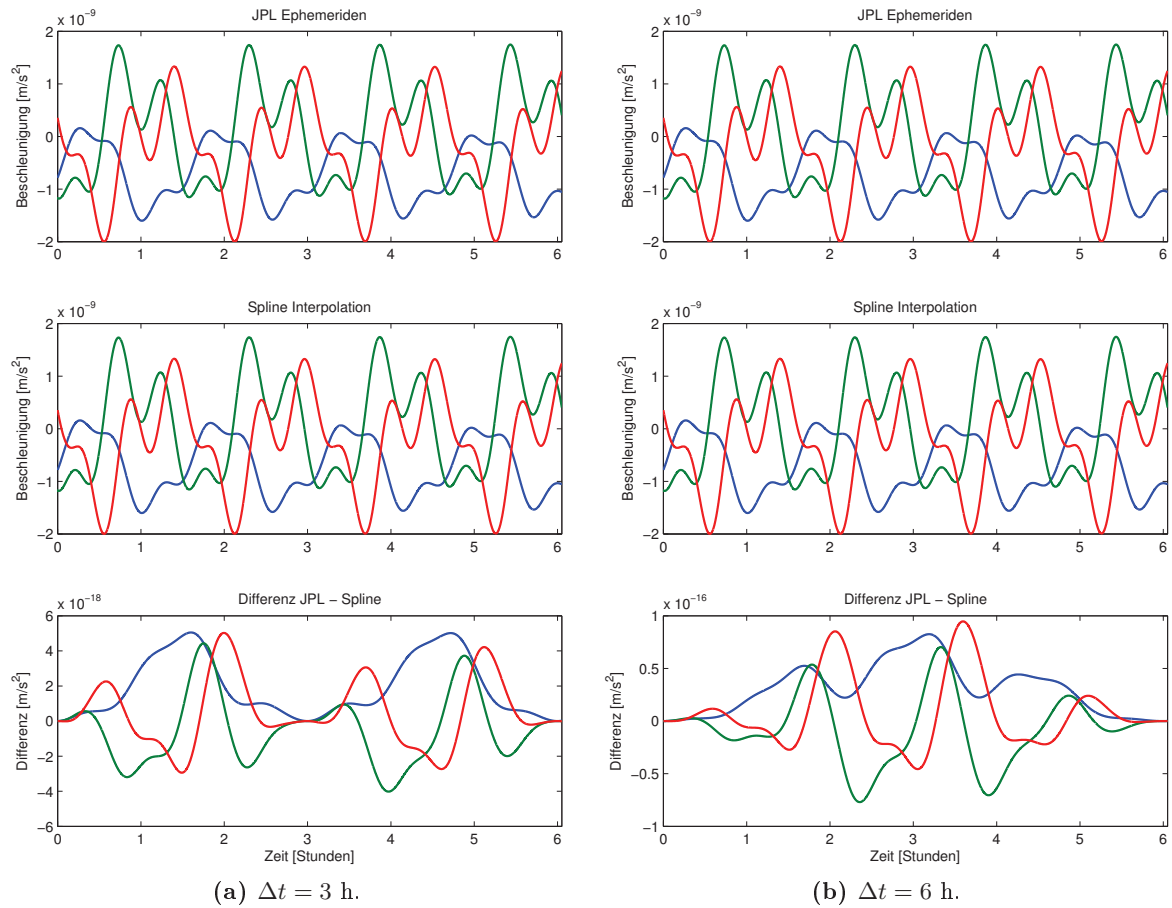
(e) Mond – einzelne Koordinaten.



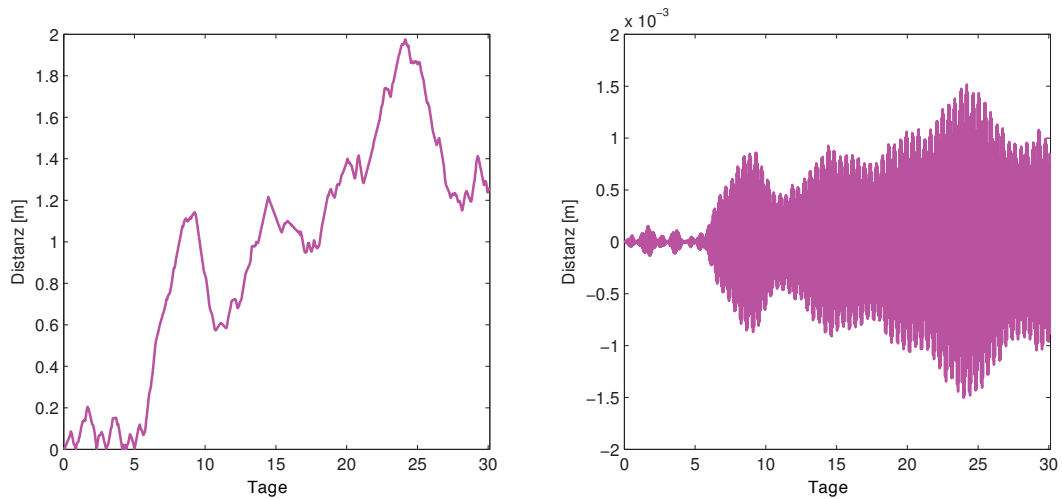
(f) Mond – Betrag.

**Abbildung A.7:** Differenz der geozentrischen Planeten- und Mondpositionen für das Jahr 2009 aus der Berechnung der MICE Software und der eigenen Umsetzung der Chebyshev Polynominterpolation.

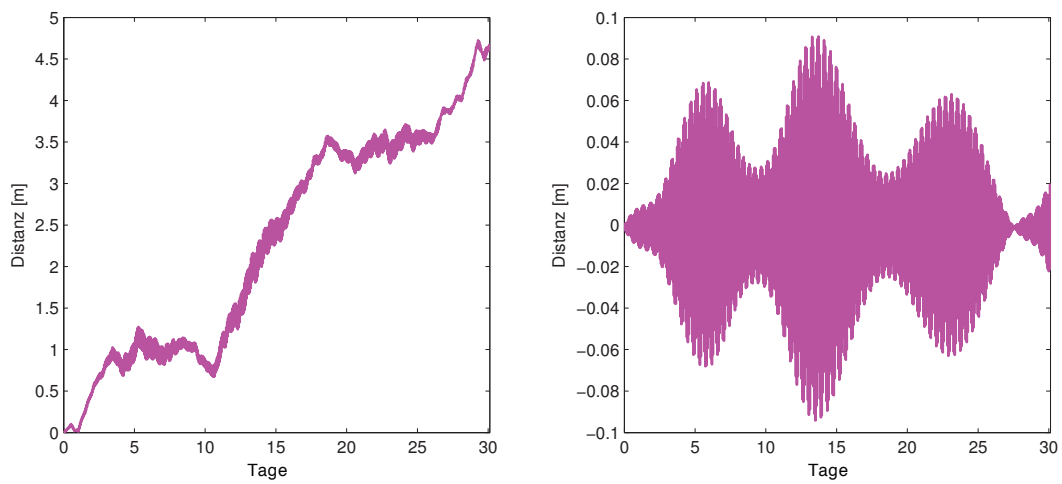




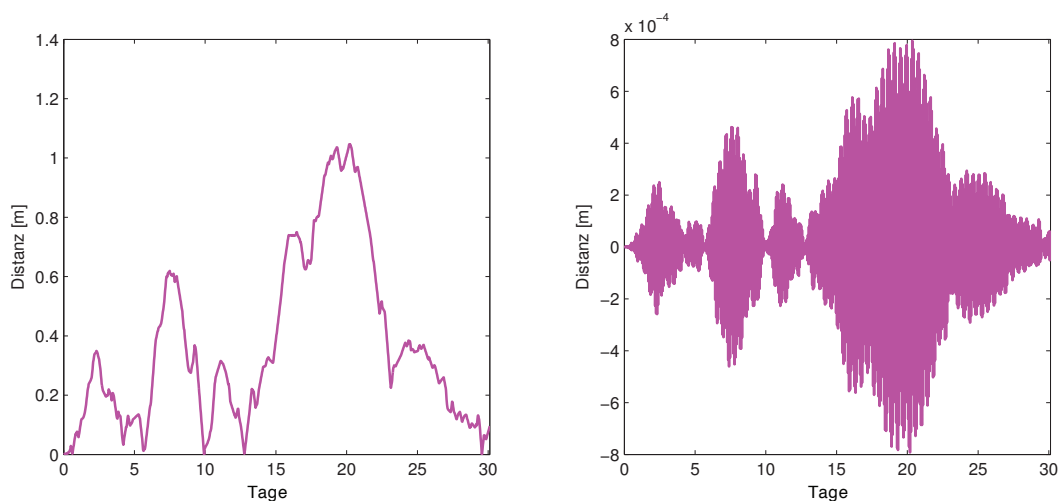
**Abbildung A.8:** Differenz der Modellierung der indirekten Gezeiten bis Grad 2 und Grad 4 mit Himmelskörperpositionen aus Chebyshev Interpolation und Spline Interpolation mit 3 und 6 Stunden Stützstellenabstand.



(a) Unterschiedliche Anzahl der Himmelskörper.



(b) Unterschiedliche Gezeitenentwicklung.



(c) Unterschiedliche Berechnung der Himmelskörper.

**Abbildung A.9:** Unterschiede in Satellitenpositionen aufgrund unterschiedlicher Gezeitenbeschleunigungen mit Betrag der Koordinatendifferenz (links) und Differenz der Koordinatenbeträge (rechts) in einem Zeitraum von 30 Tagen.

## Anhang B

# Ableitung des Deformationspotentials

Dieser Anhang enthält die Ableitungen des Deformationspotentials  $V_{Def}$  nach den Satellitenkoordinaten im raumfesten geozentrischen System. Hier werden die Ableitungen bis einschließlich Grad  $n = 4$  mit den in Abschnitt 2.4 eingeführten Bezeichnungen dargestellt.

Das Deformationspotential außerhalb Erdoberfläche wird gemäß

$$V_{Def} = \sum_i \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi_i) \quad (\text{B.1})$$

mit

$$r = \|\vec{r}\|,$$

$a_e$  : mittlerer Erdradius,

$k_n$  : Lovezahl von Grad  $n$ ,

$\vec{r}$  : geozentrischer Positionsvektor des Satelliten,

$\vec{r}_i$  : geozentrischer Positionsvektor des dritten Körpers,

$GM_i$  : Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des dritten Körpers

berechnet. Die Love Zahlen für Grad 2, 3, 4 nach Wang (1997) sind:

$$k_2 = 0.298009,$$

$$k_3 = 0.092025,$$

$$k_4 = 0.041425.$$

Die Störbeschleunigung  $\ddot{a}_{indirekt}$  ergibt sich aus der Ableitung des Deformationspotentials nach den Satellitenkoordinaten:

$$\ddot{a}_{indirekt} = \frac{\partial V_{Def}}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{Def}}{\partial x} \\ \frac{\partial V_{Def}}{\partial y} \\ \frac{\partial V_{Def}}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Im Folgenden werden die Ableitungen der Summanden der Summe aus (B.1) dargestellt mit:

$$f(n) = k_n \left(\frac{a_e}{r_i}\right)^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi_i).$$

Der Winkel  $\psi_i$  wird durch das Skalarprodukt der Positionsvektoren in Richtung des Satelliten und des Himmelskörpers ausgedrückt:

$$\cos \psi_i = \frac{\langle \vec{r}, \vec{r}_i \rangle}{r r_i}.$$

Für  $n = 2$  ergibt sich

$$f(2) = k_2 \left( \frac{a_e}{r_i} \right)^2 \left( \frac{a_e}{r} \right)^3 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi_i - 1)$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(2)}{\partial x} &= \frac{3a_e^5 k_2}{r_i^2 r^4} \left( \frac{x_i}{r_i} \cos \psi_i - \frac{x}{r} \cos^2 \psi_i - \frac{x}{2r} (3 \cos^2 \psi_i - 1) \right), \\ \frac{\partial f(2)}{\partial y} &= \frac{3a_e^5 k_2}{r_i^2 r^4} \left( \frac{y_i}{r_i} \cos \psi_i - \frac{y}{r} \cos^2 \psi_i - \frac{y}{2r} (3 \cos^2 \psi_i - 1) \right), \\ \frac{\partial f(2)}{\partial z} &= \frac{3a_e^5 k_2}{r_i^2 r^4} \left( \frac{z_i}{r_i} \cos \psi_i - \frac{z}{r} \cos^2 \psi_i - \frac{z}{2r} (3 \cos^2 \psi_i - 1) \right). \end{aligned}$$

Für  $n = 3$  ergibt sich

$$\begin{aligned} f(3) &= k_3 \left( \frac{a_e}{r_i} \right)^3 \left( \frac{a_e}{r} \right)^4 \frac{1}{2} (5 \cos^3 \psi_i - 3 \cos \psi_i), \\ \frac{\partial f(3)}{\partial x} &= -\frac{a_e^7 k_3}{r_i^3 r^5} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{x_i}{r_i} - \frac{x}{r} \cos \psi_i - 5 \frac{x_i}{r_i} \cos^2 \psi_i + 5 \frac{x}{r} \cos^3 \psi_i \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{2x}{r} (5 \cos^3 \psi_i - 3 \cos \psi_i) \right), \\ \frac{\partial f(3)}{\partial y} &= -\frac{a_e^7 k_3}{r_i^3 r^5} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{y_i}{r_i} - \frac{y}{r} \cos \psi_i - 5 \frac{y_i}{r_i} \cos^2 \psi_i + 5 \frac{y}{r} \cos^3 \psi_i \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{2y}{r} (5 \cos^3 \psi_i - 3 \cos \psi_i) \right), \\ \frac{\partial f(3)}{\partial z} &= -\frac{a_e^7 k_3}{r_i^3 r^5} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{z_i}{r_i} - \frac{z}{r} \cos \psi_i - 5 \frac{z_i}{r_i} \cos^2 \psi_i + 5 \frac{z}{r} \cos^3 \psi_i \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{2z}{r} (5 \cos^3 \psi_i - 3 \cos \psi_i) \right). \end{aligned}$$

Für  $n = 4$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f(4) &= k_4 \left( \frac{a_e}{r_i} \right)^4 \left( \frac{a_e}{r} \right)^5 \frac{1}{8} (3 - 30 \cos^2 \psi_i + 35 \cos^4 \psi_i), \\
 \frac{\partial f(4)}{\partial x} &= -\frac{5a_e^9 k_4}{r_i^4 r^6} \left( \frac{3x_i}{2r_i} \cos \psi_i - \frac{3x}{2r} \cos^2 \psi_i - \frac{7x_i}{2r_i} \cos^3 \psi_i + \frac{7x}{2r} \cos^4 \psi_i + \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{1x}{8r} (3 - 30 \cos^2 \psi_i + 35 \cos^4 \psi_i) \right), \\
 \frac{\partial f(4)}{\partial y} &= -\frac{5a_e^9 k_4}{r_i^4 r^6} \left( \frac{3y_i}{2r_i} \cos \psi_i - \frac{3y}{2r} \cos^2 \psi_i - \frac{7y_i}{2r_i} \cos^3 \psi_i + \frac{7y}{2r} \cos^4 \psi_i + \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{1y}{8r} (3 - 30 \cos^2 \psi_i + 35 \cos^4 \psi_i) \right), \\
 \frac{\partial f(4)}{\partial z} &= -\frac{5a_e^9 k_4}{r_i^4 r^6} \left( \frac{3z_i}{2r_i} \cos \psi_i - \frac{3z}{2r} \cos^2 \psi_i - \frac{7z_i}{2r_i} \cos^3 \psi_i + \frac{7z}{2r} \cos^4 \psi_i + \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{1z}{8r} (3 - 30 \cos^2 \psi_i + 35 \cos^4 \psi_i) \right).
 \end{aligned}$$



# Anhang C

## Programmbeschreibung

In diesem Anhang sollen die im Rahmen dieser Arbeit erstellten MATLAB Funktionen näher beschrieben werden. Die Funktionen wurden zum Test in einem einfachen Orbitintegrator zusammengefasst.

### C.1 Allgemeine Beschreibung

Die Abbildung C.1 zeigt den schematischen Aufbau eines Programmes zur Integration eines Satellitenorbits. In dem Programm werden alle Zeiten in TT angegeben. Die Zeit wird in Sekunden bzw. Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr gezählt.

Die Auswahl der Himmelskörper, die bei der Berechnung der direkten und indirekten Gezeiten berücksichtigt werden sollen, geschieht durch das Setzen von  $GM_i = 0$  für die Himmelskörper, die nicht berücksichtigt werden sollen<sup>1</sup>. Einige Optionen, die mehrere Funktionen benötigen, werden mit der Funktion `set_spline_options.m` in einer MATLAB mat-Datei gespeichert. Dies sind

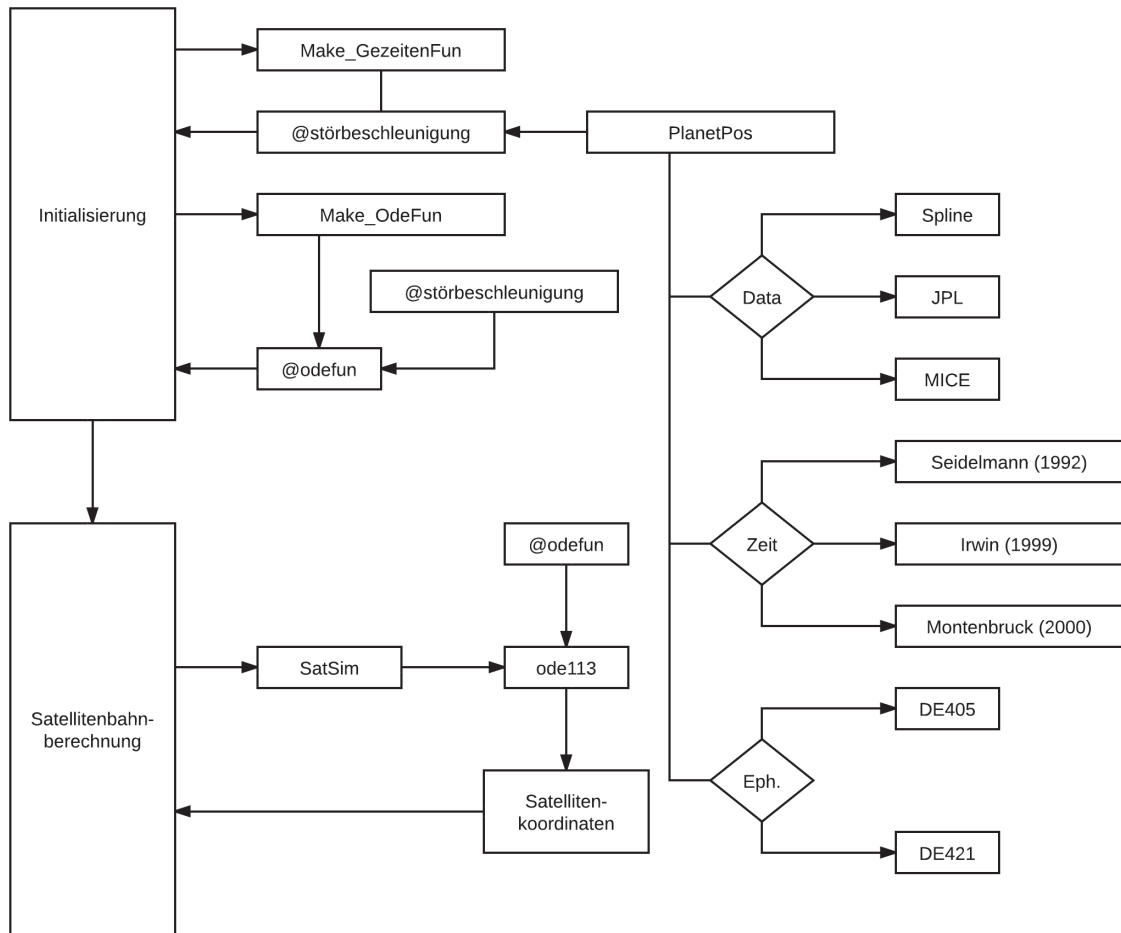
- die Methode der Transformation  $TDB - TT$ ,
- die Ephemeriden Reihe und
- der Stützstellenabstand der Spline Interpolation.

Als erster Schritt in Abbildung C.1 wird eine Initialisierung durchgeführt, in der notwendige Parameter, wie die Methode der Positionsbestimmung der Himmelskörper, die zu verwendende Methode der Zeittransformation  $TDB - TT$ , sowie die Ephemeriden Reihe festgelegt werden. Diese Parameter werden in der Funktion `Make_GezeitenFun.m` verwendet, die die Berechnung der Beschleunigungen aufgrund der direkten und indirekten Gezeiten beinhaltet. Die Positionen der Planeten werden in der Funktion `PlanetPos.m` bestimmt.

Bei einem Aufruf der Funktion `Make_GezeitenFun.m` werden die Parameter der Berechnung von Himmelskörperkoordinaten oder die zuvor berechneten Spline Koeffizienten der Bahnen sowie die Gravitationskonstanten der Himmelskörper übergeben. Das Ergebnis dieser Funktion ist das function handle `@störbeschleunigung`. Mit diesem function handle kann in der

---

<sup>1</sup>Dies geschieht in der Funktion `getOrbit_plantes.m`, bereitgestellt durch Dipl.-Ing. Markus Antoni, Institut für Erdmessung.



**Abbildung C.1:** Schematische Darstellung wesentlicher Schritte des Orbitintegrators. Der Orbitintegrator ist in zwei Abschnitte zur Initialisierung und Satellitenbahnberechnung geteilt. Unter Angabe der drei Parameter *Data*, *Zeit* und *Eph.* kann in der Funktion *PlanetPos* eine Auswahl unter den jeweils angegebenen Methoden getroffen werden.

Integration, unter Übergabe eines Zeitpunktes und einer Satellitenposition die direkte und indirekte Gezeitenbeschleunigung bis maximal Grad 2 oder bis Grad 4 an der Satellitenposition berechnet werden.

Die Funktion *Make\_OdeFun.m* dient der Definition der Bewegungsgleichung (2.8). Dieser Funktion wird das function handle *@störbeschleunigung* übergeben, mit dem der Störterm  $\ddot{a}_{Gezeiten} = \ddot{a}_{direkt} + \ddot{a}_{indirekt}$  der Bewegungsgleichung berechnet wird. Das Ergebnis der Funktion *Make\_OdeFun.m* ist das function handle *@odefun*, das durch einen in MATLAB enthaltenem Integrator verwendet wird. In der Integration erfolgt die Berechnung der Gezeiten ohne die Übergabe weiterer Parameter.

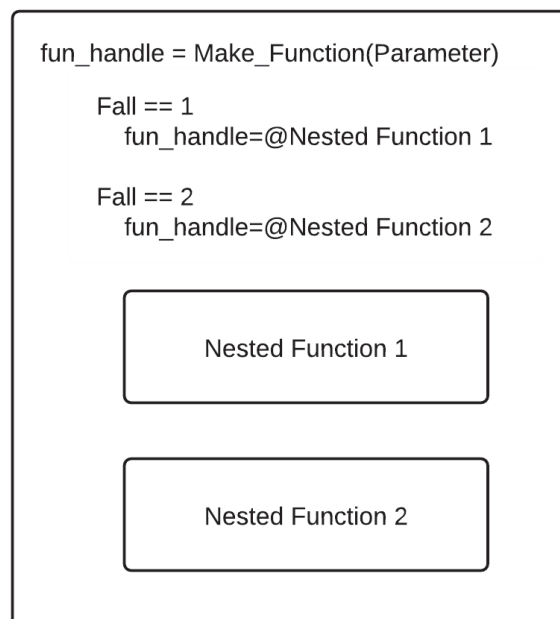
Nach der Initialisierung erfolgt die eigentliche Satellitenbahnberechnung für jeden gewünschten Zeitpunkt durch numerische Integration mit der Funktion *SatSim.m*. Die Integration der Bewegungsgleichung (2.8) wird mit dem in MATLAB enthaltenem Löser für Differentialgleichungen *ode113.m* unter Angabe von relativen und absoluten Genauigkeiten der Integration, sowie des function handles *@odefun* durchgeführt. Das Ergebnis der Funktion *ode113.m* sind die Satellitenkoordinaten zu den angegebenen Zeitpunkten.



Der hier dargestellte und in Abbildung C.1 gezeigte Ablauf kann für andere Orbitintegratoren verwendet werden. Der Abschnitt der Initialisierung erfordert den einmaligen Aufruf der Funktion `Make_GezeitenFun.m` mit den notwendigen Parametern zur Berechnung der Himmelskörperpositionen. Das mit dem Funktionsaufruf erzeugte `function handle @störbeschleunigung` kann dann in dem jeweiligem m-file, das die Bewegungsgleichung des Orbitintegrators definiert, eingesetzt werden.

## C.2 Funktionsbeschreibung

In dem hier gezeigten Beispiel werden in MATLAB Funktionen zur Erzeugung von *function handles* benutzt, mit denen auf *nested functions* zugegriffen wird. Dies betrifft die Funktionen `Make_GezeitenFun.m` und `Make_OdeFun.m`. Die Abbildung C.2 zeigt ein Schema, wie diese Funktionen eingesetzt werden. Bei dem Aufruf der `Make_Function.m` werden einige Parameter übergeben, die im weiteren Verlauf der Berechnungen keine Änderungen erfahren. Dies können zum Beispiel die  $GM_i$  von Himmelskörpern sein. Die eigentliche Berechnung – wie die Gezeitenbeschleunigung – wird in einer nested function bzw. Unterfunktion und nicht in der Hauptfunktion (`Make_Function.m`) durchgeführt. Da Unterfunktionen auf den Speicher der Hauptfunktion zugreifen, müssen die Parameter nicht an die Unterfunktion übergeben werden.



**Abbildung C.2:** *Nested functions und function handles.*

Über den Datentyp *function handle* können in MATLAB Funktionen aufgerufen werden (Schweizer, 2009). In Beispiel C.2 enthält die Hauptfunktion zwei Unterfunktionen (`Nested Function 1` und `Nested Function 2`). Die Hauptfunktion erhält als einen der übergebenen Parameter die Variable `Fall`. Mit dieser Variable wird eine Fallunterscheidung getroffen, welche der Unterfunktionen als `function handle` das Rückgabeargument der Hauptfunktion ist.

Mit dem `function handle`, das auf diese Weise von der Funktion `Make_Function.m` erzeugt

wird, kann somit direkt eine der Unterfunktionen aufgerufen werden. Bei Aufruf dieser Unterfunktion müssen nur noch zeitlich variable Parameter übergeben werden, da die notwendigen konstanten Parameter bereits einmalig der Hauptfunktion übergeben wurden.

## Make\_GezeitenFun.m

Die Funktion `Make_GezeitenFun.m` erzeugt ein function handle, das in der Integration der Satellitenbahn dazu dient, die direkten und indirekten Erdgezeiten zu berechnen. Der Aufruf der Funktion erfolgt mit:

```
fhandle=make_gezeitenfun(GM, ae, grad, art, {spkcoeff})
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

- GM:**  $10 \times 1$  Vektor der Produkte aus Masse und Gravitationskonstante der Himmelskörper in  $\text{m}^3/\text{s}^2$ ,
- ae:** Mittlerer Erdradius in Meter,
- grad:** Grad der Entwicklung der indirekten Erdgezeiten:
  - 1: Reihenentwicklung bis Grad 2,
  - 2: Reihenentwicklung bis Grad 4,
- art:** Art der Positionsbestimmung der Himmelskörper:
  - 1: Interpolation eigener Splines (erfordert Übergabe der Koeffizienten),
  - 2: Chebyshev Interpolation der JPL Ephemeriden,
  - 3: MICE,
- {spkcoeff}:** {optional} bei der Positionsbestimmung durch Splines werden an dieser Stelle die Splinekoeffizienten übergeben.

Das Rückgabeargument ist:

**fhandle:** function handle der Unterfunktion zur Berechnung der Gezeiten.

Soll die Berechnung der Gezeiten nur unter Berücksichtigung bestimmter Himmelskörper durchgeführt werden, so müssen die  $GM_i$  der anderen Himmelskörper in der Funktion `getOrbits_planet.m` auf Null gesetzt werden. Die Funktion `Make_GezeitenFun.m` enthält zwei Unterfunktionen, von denen eine als function handle durch die Funktion zurück gegeben wird. Die Entscheidung, welche der Unterfunktionen gewählt wird, erfolgt durch den Parameter `grad`. Die Methode der Positionsbestimmung wird durch den Parameter `art` bestimmt. Bei der Nutzung eigener Splines müssen mit `spkcoeff` die Splinekoeffizienten übergeben werden.

Der Aufruf der Unterfunktion über das function handle erfolgt, wenn dieses `stoerfun` genannt wird, mittels:

```
a=stoerfun(t, r_s)
```

Mit dem function handle werden die folgenden Parameter übergeben:

- t:** Zeitpunkt der Berechnung in Sekunden seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT
- r\_s:** geozentrischer Positionsvektor des Satelliten in Meter.

Das Rückgabeargument ist:

- a:** Vektor der Summe der direkten und indirekten Gezeiten in  $\text{m}/\text{s}^2$ .

## PlanetPos.m

Die für die Berechnung der Gezeiten notwendigen geozentrischen Planetenpositionen werden mit der Funktion `PlanetPos.m` berechnet. Die Funktion `PlanetPos.m` wird aus den Unterfunktionen der Funktion `Make_GezeitenFun.m` aufgerufen mittels:

```
pos=PlanetPos(MT,art,{spkoeff})
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

**MT:** Zeitpunkt der Berechnung in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT  
**art:** Art der Positionsbestimmung der Himmelskörper:  
 1: Interpolation eigener Splines (erfordert Übergabe der Koeffizienten),  
 2: Chebyshev Interpolation der JPL Ephemeriden,  
 3: MICE,  
**{spkoeff}:** {optional} bei der Positionsbestimmung durch Splines werden an dieser Stelle die Spline Koeffizienten übergeben.

Das Rückgabeargument ist:

**pos:** Position aller Himmelskörper in Meter in einer  $10 \times 3$  Matrix.

In Abhängigkeit des Parameters **art** wird die Methode der Berechnung der Koordinaten der Himmelskörper ausgewählt. Die Berechnung durch Spline Koeffizienten (**art** = 1) erfolgt unmittelbar in der Funktion `PlanetPos.m`. Die Spline Koeffizienten müssen zuvor mit der Funktion `Fun_ObjPosVel.m` berechnet werden. Die Berechnung der Positionen aus JPL Ephemeriden (**art** = 2) erfolgt mittels der Unterfunktion `fun_jpl_pos`. Die MICE Software (**art** = 3) wird durch die Unterfunktion `fun_mice_pos` aufgerufen.

### PlanetPos.m > fun\_jpl\_pos

Diese Unterfunktion von `PlanetPos.m` berechnet die baryzentrischen Positionen aller Himmelskörper für einen Zeitpunkt. Die Funktion wird innerhalb von `PlanetPos.m` aufgerufen durch:

```
pos=fun_jpl_pos(MT)
```

Die Funktion erhält den folgenden Parameter übergeben:

**MT:** Zeitpunkt der Berechnung in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT.

Das Rückgabeargument ist:

**pos:** Position aller Himmelskörper in Meter in einem Struct.

Innerhalb der Funktion werden die Funktionen `zeittransfer.m` zur Transformation von TT zu TDB und die Funktion `read_koeff_one.m` zum Einlesen der JPL Ephemeriden für den Zeitpunkt MT aufgerufen.

### PlanetPos.m > fun\_mice\_pos

Dies ist eine Unterfunktion von `PlanetPos.m` und dient dem Aufruf der MICE Routinen. Der Aufruf erfolgt innerhalb von `PlanetPos.m` mittels:

```
pos=fun_mice_pos(target,epoch,obs)
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

**target**: Ziel Himmelskörper,  
**epoch**: Zeitpunkt oder Vektor der Berechnungspunkte,  
**obs**: Ursprung des Koordinatensystems.

Das Rückgabeargument ist:

**pos**: Position des Himmelskörpers in Meter in einem Vektor.

Eine Zusammenfassung der Installation sowie der notwendigen Initialisierung der MICE Software erfolgt in Abschnitt C.3.

## Make\_OdeFun.m

In der Funktion `Make_OdeFun.m` wird die in Abschnitt 2.3 dargestellte Bewegungsgleichung des Orbitintegrators definiert:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{GM}{r(t-\Delta t)^3}\vec{r}(t-\Delta t) + \ddot{\vec{a}}(t). \quad (2.8)$$

Die Funktion erzeugt ein function handle, das in der Funktion `SatSim.m` dem MATLAB Löser `ode113.m` übergeben wird (siehe Abschnitt 2.5). Der Anteil  $\ddot{\vec{a}}(t)$  wird dabei mit einer der in der Funktion `Make_GezeitenFun.m` definierten Unterfunktionen berechnet. Die Funktion `Make_OdeFun.m` wird aufgerufen mittels:

```
fhandle=make_odefun(@stoerfun)
```

Die Funktion erhält den folgenden Parameter übergeben:

**@stoerfun**: Function handle der Funktion zur Berechnung der Gezeiten, das durch Aufruf der Funktion `Make_GezeitenFun.m` erzeugt wird.

Das Rückgabeargument ist:

**fhandle**: Function handle der Differentialgleichung.

Dieses function handle wird im weiteren Verlauf des Programms nicht aufgerufen sondern ausschließlich an `ode113.m` übergeben. Durch die konsequente Nutzung von function handles wurde erreicht, dass die einzige Variable in der Berechnung der Gezeiten an der Position eines Satelliten die Zeit ist. In der Integration der Bewegungsgleichung durch die Funktion `ode113.m` müssen keine weiteren Parameter übergeben werden.

## Zeittransfer.m

Diese Funktion dient der Transformation der Zeitskala TT zu TDB. Es stehen die drei in Abschnitt 2.2 vorgestellten Methoden nach Seidelmann (1992), Irwin und Fukushima (1999) und Montenbruck und Gill (2000) zur Auswahl. Der Aufruf der Funktion erfolgt durch:

```
MT_TDB=zeittransfer(MT_TT)
```

Die Funktion erhält den folgenden Parameter übergeben:

**MT\_TT**: Zeitpunkt oder Vektor in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT.

Das Rückgabeargument ist:

**MT\_TDB**: Zeitpunkt oder Vektor in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr TDB.

Die Auswahl der zu verwendenden Methode muss nicht an die Funktion übergeben werden, da dies mit der Funktion `set_spline_options.m` in einer `mat`-Datei gespeichert wurde.

### Read\_koeff\_one.m

Diese Funktion liest die JPL Ephemeriden eines Zeitpunktes aus den Daten Dateien aus. Zusätzlich werden die Konstanen sowie Meta Daten der Koeffizienten und der komplette Daten String für 32 Tage bereitgestellt. Der Aufruf erfolgt durch:

```
[koeff konst meta data]=read_koeff_one(JD_TDB)
```

Die Funktion erhält den folgenden Parameter übergeben:

`JD_TDB`: Zeitpunkt der Berechnung im Julianischen Datum in TDB.

Die Rückgabeargumente sind:

`koeff`: Koeffizienten des Berechnungszeitpunktes für alle Himmelskörper in einem Struct,  
`konst`: Konstanten der Ephemeriden,  
`meta`: Meta Daten der Koeffizienten,  
`data`: Kompletter Satz Koeffizienten für 32 Tage.

### SatSim.m

Mit dieser Funktion wird die Integration der Satellitenbahn durch Aufruf der Funktion `ode113.m` gestartet. Der Aufruf von `SatSim.m` erfolgt durch:

```
pos=satsim(MT,start,@odefun)
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

`MT`: Zeitpunkt oder Zeitreihe der Berechnung in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT,  
`start`: Startposition des Satelliten in Meter und Geschwindigkeit in m/s,  
`@odefun`: Function handle der Bewegungsgleichung, dass durch Aufruf der Funktion `Make_OdeFun.m` erzeugt wird.

Das Rückgabeargument ist:

`pos`: Geozentrische Koordinaten des Satelliten in Meter.

Die Funktion `ode113.m` kann z. B. wie folgt aufgerufen werden:

```
sol=ode113(@odefun,[t(1) t(end)],y0,options)
```

Die folgenden Parameter werden übergeben:

`@odefun`: Function handle der Bewegungsgleichung,  
`t(1)`: Startzeitpunkt der Berechnung in Sekunden seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT,  
`t(end)`: Endzeitpunkt der Berechnung in Sekunden seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT,  
`y0`: Vektor der Startbedingung mit Geschwindigkeit in m/s und Position in Meter,  
`options`: Optionen der Integration, die mittels `odeset` festgelegt wurden

Das Rückgabeargument ist:

`sol`: Lösung der Integration als Struct, das mittels `deval` für Zeitpunkte zwischen `t(1)` und `t(end)` ausgewertet werden kann.

## Fun\_ObjPosVel.m

Die Berechnung der Spline Koeffizienten für den gesamten Zeitraum der Integration der Satellitenbahnen erfordert nur einmalig den Zugriff auf die JPL Ephemeriden. Mit der Funktion `fun_ObjPosVel.m` werden die Spline Koeffizienten der geozentrischen Positionen der Himmelskörper und die Geschwindigkeit der Erde im baryzentrischen System berechnet. Der Aufruf der Funktion erfolgt mittels:

```
[spkoeff GM sp_vel]=fun_ObjPosVel(MT_start, MT_stop)
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

`MT_start`: Startzeitpunkt in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT,  
`MT_stop`: Endzeitpunkt der Berechnung.

Die Rückgabeargumente sind:

`spkoeff`: Spline Koeffizienten für alle geozentrischen Bahnen der Himmelskörper,  
`GM`: GM aller Himmelskörper in einzelnen Variablen,  
`sp_vel`: Spline Koeffizienten der Geschwindigkeit der Erde im baryzentrischen System.

Die Funktion nutzt die Funktion `fun_ObjPos_bcrs.m`, die die baryzentrischen Positionen aller Himmelskörper für den gesamten Integrationszeitraum berechnet.

## Fun\_ObjPos\_bcrs.m

Diese Funktion berechnet Spline Koeffizienten für beliebig lange Zeiträume aus den JPL Ephemeriden. Die Transformation der Zeitskala von TT nach TDB wird mit der Funktion `zeittransfer.m` durchgeführt. Der Aufruf von `fun_ObjPos_bcrs.m` erfolgt durch:

```
[pos konst]=fun_ObjPos_bcrs(MT)
```

Die Funktion erhält den folgenden Parameter übergeben:

`MT`: Zeitreihe der Berechnung in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT.

Die Rückgabeargumente sind:

`pos`: Baryzentrische Positionen der Himmelskörper in Meter in einem Struct,  
`konst`: Konstanten der Ephemeriden Serie in einem Struct.

Die Funktion ruft `read_koeff_all.m` auf.

## Read\_koeff\_all.m

Die Chebyshev Koeffizienten aller Himmelskörper für den gesamten Zeitraum werden mit der Funktion `read_koeff_all.m` ausgelesen. Die Funktion wird aufgerufen durch:

```
[koeff konst meta]=read_koeff_all(JD_start, JD_stop)
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

`JD_start`: Startzeitpunkt der Berechnung in Julianischem Datum in TDB,  
`JD_stop`: Endzeitpunkt der Berechnung in Julianischem Datum in TDB.

Die Rückgabeargumente sind:

`koeff`: Koeffizienten aller Himmelskörper für gesamten Zeitraum in einem Struct,

**konst:** Konstanten der Ephemeriden Serie in einem Struct,  
**meta:** Meta Daten der Koeffizienten.

Die Funktion `read_koeff_all.m` nutzt die Funktion `read_koeff_one.m`, um die Koeffizienten für jeweils ein 32 Tage Intervall auszulesen.

### GetOrbit\_planets.m

Die Funktion ergibt die  $GM_i$  ausgewählter Himmelskörper und die Spline Koeffizienten für die geozentrische Position aller Himmelskörper und baryzentrische Geschwindigkeit der Erde. Die Funktion wird bereitgestellt durch Dipl.-Ing. Markus Antoni, Institut für Erdmessung. Der Aufruf erfolgt durch:

```
[GM spkoeff sp_vel] = getOrbit_planets(bodies, MT_start, MT_stop)
```

Die Funktion erhält die folgenden Parameter übergeben:

**bodies:** Cell-Variable der Himmelskörper, die in der Berechnung der Gezeiten berücksichtigt werden sollen,  
**MT\_start:** Startzeitpunkt in Dezimaltagen seit dem 01.01.2000 0:00 Uhr in TT,  
**MT\_stop:** Endzeitpunkt der Berechnung.

Die Rückgabeargumente sind:

**GM:**  $1 \times 10$  Vektor der GM der Himmelskörper in einzelnen Variablen, mit  $GM = 0$  für Himmelskörper, die nicht in `bodies` aufgeführt sind,  
**spkoeff:** Spline Koeffizienten für alle geozentrischen Bahnen der Himmelskörper,  
**sp\_vel:** Spline Koeffizienten der Geschwindigkeit der Erde im baryzentrischen System.

## C.3 MICE Software

In Abschnitt 3.1.4 wurde bereits die MICE Software der Navigation and Ancillary Information Facility (NAIF)<sup>2</sup> vorgestellt. Die Software kann für verschiedene Betriebssysteme und Programmiersprachen heruntergeladen werden. An dieser Stelle soll die Einbindung in MATLAB vorgestellt werden.

Die Software wird als Archiv Datei runtergeladen und auf der Festplatte entpackt. Damit die MICE Funktionen in MATLAB zur Verfügung stehen, müssen drei Verzeichnisse in die Pfadangaben von MATLAB aufgenommen werden:

- `.../mice/data/`
- `.../mice/lib/`
- `.../mice/src/mice/`

Die Daten, die MICE benötigt, sollten in dem Verzeichnis `.../mice/data/` gespeichert werden. Diese Daten werden bei MICE als *Kernel* bezeichnet. Für den Anwendungszweck dieser Arbeit werden zwei solcher Kernels benötigt<sup>3</sup>:

- Binärdatei der Ephemeriden (z.B. `de405.bsp`)

<sup>2</sup><http://naif.jpl.nasa.gov/naif/index.html>.

<sup>3</sup>[http://naif.jpl.nasa.gov/naif/data\\_generic.html](http://naif.jpl.nasa.gov/naif/data_generic.html)

- Schaltsekunden (`naif009.tls.pc`)

Diese Kernels müssen mit einer MICE Funktion geladen werden. Dies wird durch die Funktion `cspice_furnsh.m` übernommen. Dieser Funktion wird eine Textdatei (MICE *meta kernel*) mit den Angaben der zu ladenden Kernels übergeben

```
cspice_furnsh(' ../Pfad des Meta Kernel/Dateiname')
```

Ein solcher Meta Kernel kann wie folgt aussehen:

```
\begintext
    Beispiel eines MICE meta Kernel
\begindata
    PATH_VALUES      = ( '\$Pfad der MICE Installation\$mice\data' )
    PATH_SYMBOLS     = ( 'KERNELS' )
    KERNELS_TO_LOAD = ( '$KERNELS\naif0009.tls.pc',
                        '$KERNELS\de405.bsp' )
```

Durch das Laden dieser Beispieldatei stehen die Kernels den MICE Funktionen zur Verfügung. Die Kernels sind so lange im Speicher vorhanden bis MATLAB beendet oder diese durch eine Anweisung gelöscht werden. Die Berechnung von Planetenpositionen mittels MICE wird in zwei Schritten in der Funktion `PlanetPos.m` > `fun_mice_pos` durchgeführt.

Zuerst wird eine Transformation der Zeit mittels der Funktion `cspice_str2et.m` durchgeführt. Diese Funktion transformiert zwischen einer Vielzahl an Zeitskalen und Zeitformaten. Nach der Transformation zwischen TT und TDB berechnet die Funktion `cspice_spkezzr.m` die Positionen und Geschwindigkeiten der Himmelskörper. Koordinatensystem und -ursprung können ebenfalls aus einer großen Anzahl an Möglichkeiten gewählt werden.

Wenn die MICE Kernels nicht mehr benötigt werden, können diese mittels

```
cspice_kclear
```

wieder aus dem Speicher gelöscht werden.



# Anhang D

## JPL Ephemeriden Dateien

Dieser Anhang soll kurz den Aufbau der JPL Ephemeriden Dateien darstellen. Die Serien DE421 und DE405 unterscheiden sich an dieser Stelle nicht voneinander. Die Reihenfolge der Himmelskörper in den Ephemeriden ist: Merkur, Venus, Erde-Mond Baryzentrum (EMB), Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto, Mond (geozentrisch), Sonne, Nutation, Libration. Die eigentlichen Koeffizienten in der Daten Datei stehen ohne weitere Formatierung in drei Spalten hintereinander. Für die Zuordnung der Koeffizienten werden aus der Header Datei einer Ephemeriden Reihe die in GROUP 1050 enthaltenen Daten benötigt:

GROUP	1050											
3	171	231	309	342	366	387	405	423	441	753	819	899
14	10	13	11	8	7	6	6	6	13	11	10	10
4	2	2	1	1	1	1	1	1	8	2	4	4

Die erste Zeile dieser Meta Daten enthält den Startindex der Koeffizienten eines Himmelskörpers. Die Koeffizienten des Merkur beginnen mit dem dritten Wert eines Datensatzes, die Koeffizienten der Venus mit dem Wert Nummer 171 usw.. In der zweiten Zeile stehen die Anzahl der Koeffizienten – jeweils für X, Y und Z – und in der dritten Zeile die Anzahl der Subintervalle. Der Merkur verfügt somit über  $3 \times 14 \times 4 = 168$  Koeffizienten, die Venus über  $3 \times 10 \times 2 = 60$  Koeffizienten und für die anderen Himmelskörper gilt dies analog. Die Koeffizienten der Himmelskörper sind in Kilometer gespeichert. Für die Nutation sind  $2 \times 10 \times 4 = 80$  Koeffizienten ( $\delta\psi, \delta\epsilon$ ) und für die Libration  $3 \times 10 \times 4 = 120$  Koeffizienten (Euler Winkel) im Bogenmaß enthalten. Die Koeffizienten für Nutation und Libration werden im Verlauf dieser Arbeit nicht genutzt. Die letzte Zeile eines Datensatzes ist mit Nullen aufgefüllt

Die Abbildung D.1 zeigt den Aufbau eines Datensatzes der Koeffizienten. Die Koeffizienten für ein 32 Tage Intervall werden durch die laufende Nummer und die Anzahl der nachfolgenden Werte eingeleitet. Bei den Serien DE405 und DE421 besteht ein Datensatz aus 1018 Werten. Dies sind 1016 Koeffizienten, sowie das Julianische Datum in TDB der Intervallgrenzen. Der Start- und Endzeitpunkt der Gültigkeit des Datensatzes folgen der Angabe der Anzahl der Werte. Die 1016 Koeffizienten folgen den Grenzen des Intervalls. Zuerst kommen für den Merkur die 14 X-Koeffizienten, dann 14 Y-Koeffizienten und danach 14 Z-Koeffizienten des ersten Subintervalls. Dann folgen die 14 X-, 14 Y- und 14 Z-Koeffizienten des zweiten Subintervalls. Nach dem zweiten Subintervall folgen das dritte und vierte Subintervall des Merkur. Die

Intervallgrenzen der Subintervalle sind nicht explizit in den Koeffizienten enthalten sondern ergeben sich aus der 32 tägigen Gesamtlänge eines Intervalls und der Anzahl der Subintervalle.

Im Anschluss an das vierte Subintervall des Merkur folgt das erste Subintervall der Venus, bestehend aus zuerst 10 X-Koeffizienten und dann jeweils 10 Y- und Z-Koeffizienten. Für die anderen Himmelskörper setzt sich dies entsprechend fort.

Laufende Nummer	Anzahl der Koeffizienten	Start- und Endzeitpunkt dieses Datensatzes	
64	1018		
0.245355250000000000d+07	0.245358450000000000d+07	-0.492808251437702999d+08	Subintervall 1
0.735585746887757909d+07	0.688427813804649166d+06	-0.277534245859072580d+05	
0.171476945946239283d+03	0.351 X Koeffizienten 28d+01	-0.110890548646374532d+01	
0.635768707839897002d-01	-0.303 Y Koeffizienten 90d-02	0.103930870148436516d-03	
-0.179956898350729007d-05	-0.877501795501738817d-07	0.118416518720030590d-07	
-0.790781957152340555d-09	-0.390740871638261527d+08	-0.103803980974568855d+08	
0.537380191708325758d+06	0.152017728008052400d+05	-0.744603104510088542d+03	
0.311141406181043294d+02	-0.110 Y Koeffizienten 19d+01	0.185949837241155790d-01	
0.475853697217956640d-03	-0.877 Z Koeffizienten 41d-02	0.583424369106597303d-05	
-0.292764339581652918d-06	0.106788015888937078d-07	-0.206863653469882356d-09	
-0.157294761085793711d+08	-0.630817979280067980d+07	0.215663703459604032d+06	Subintervall 2
0.109983309957671663d+05	-0.415 X Koeffizienten 50d+03	0.162553522424240953d+02	
-0.476517456824276264d+00	0.334 Y Koeffizienten 41d-02	0.569244223035950494d-03	
-0.576246993099463381d-04	0.330310362506888294d-05	-0.147287253772882656d-06	
0.447638060662720769d-08	-0.285010160177358059d-10	-0.300843508680748753d+08	
0.115760507103913240d+08	0.370750506546472956d+06	-0.254464031150670962d+05	
0.757569931301945729d+02	-0.982 X Koeffizienten 94d+01	-0.239380524164378661d+00	
0.106633181905092800d-01	-0.703 Y Koeffizienten 95d-03	0.332036014133416744d-04	
-0.101490562263200546d-05	0.391297864820269205d-07	-0.393028664294984125d-09	
-0.463028666894585394d-11	-0.550753143442441002d+08	-0.551537935837072879d+07	
0.664678462602326064d+06	0.700486451179365486d+04	-0.345121904597335174d+03	
0.107174525660744902d+02	-0.635 Y Koeffizienten 86d+00	0.104642581863089862d-01	
-0.518379704266841586d-03	-0.226 Z Koeffizienten 115d-05	0.261435075055446372d-06	
-0.339455321980453042d-07	0.170421693506186342d-08	-0.732960457673533203d-10	
-0.262684770872822329d+08	-0.414705790728016011d+07	0.316605391861233918d+06	
0.638054994338301367d+04	-0.192 X Koeffizienten 271d+03	0.674374045713451320d+01	
-0.314893307559050151d+00	0.448 Y Koeffizienten 80d-02	-0.203935792334792318d-03	

Abbildung D.1: Aufbau eines Datensatzes der JPL Ephemeriden.

# Anhang E

## CD Inhalt

Die erstellte Software befindet sich auf einer CD mit den folgenden Verzeichnissen:

- `data`
  - `DE405` : Dateien der Serie DE405
  - `DE421` : Dateien der Serie DE421
  - `Horizons` : Beispieldateien des HORIZONS-Webdienstes
  - `Mice` : Meta Kernel von MICE
  - `TE405` : Dateien der Zeit Ephemeriden Serie TE405
- `mice`
  - `data` : MICE Daten
  - `doc` : MICE Dokumentation
- `Programm_final`
  - `Ausgabe_fun` : Funktionen zur Darstellung von Ergebnissen
  - `Func` : Funktionen
- `Programm_ohne_wahl`

Die in Abschnitt C beschriebene Software ist in dem Verzeichnis `\Programm_final` enthalten. Dort sind zwei MATLAB Skripte abgelegt, die das Ausführen aller Funktionen mit den verschiedenen Methoden erlauben. Das Skript `SatInt_final.m` führt eine vollständige Satellitenbahnintegration durch. Die nötigen Eingaben werden in dem Skript `Eingaben.m` vorgenommen. Das Skript `Planetenpositionen.m` dient der Berechnung von Planetenpositionen nach den vorgestellten Methoden.

Das Verzeichnis `\Programm_ohne_wahl` enthält eine Version der Funktionen, die eine Berechnung der Planetenposition mittels der Spline Methode durchführen, die Gezeiten bis Grad 4 berechnen und die Zeit nach Montenbruck und Gill (2000) transformieren. Das Skript `Beispiel.m` zeigt wie die Funktionen zur Berechnung der Gezeitenbeschleunigungen für ausgewählte Himmelskörper in ein Programm eingebunden werden können.



# Anhang F

## Abkürzungsverzeichnis

<b>BCRS</b>	Barycentric Celestial Reference System
<b>EMB</b>	Erde-Mond Baryzentrum
<b>FIRE</b>	Fast Interpolated Runtime Ephemeris
<b>GCRS</b>	Geocentric Celestial Reference System
<b>GRACE</b>	Gravity Recovery and Climate Experiment
<b>IAU</b>	International Astronomical Union
<b>ICRF</b>	International Celestial Reference Frame
<b>IERS</b>	International Earth Rotation and Reference Systems Service
<b>JPL</b>	Jet Propulsion Laboratory
<b>LEO</b>	Low Earth Orbiter
<b>LLR</b>	Lunar Laser Ranging
<b>MEX</b>	MATLAB Executable
<b>NAIF</b>	Navigation and Ancillary Information Facility
<b>NASA</b>	National Aeronautics and Space Administration
<b>SSB</b>	Baryzentrum des Sonnensystems
<b>TAI</b>	Temps Atomique International, bzw. Internationale Atomzeit
<b>TCB</b>	Temps Coordonné Barycentrique, bzw. Barycentric Coordinate Time
<b>TCG</b>	Temps Coordonné Geocentrique, bzw. Geocentric Coordinate Time
<b>TDB</b>	Temps Dynamique Barycentrique, bzw. Barycentric Dynamical Time
<b>TE</b>	Time Ephemerides
<b>TT</b>	Terrestrial Time
<b>VLBI</b>	Very Long Baseline Interferometry



# Literaturverzeichnis

- [Acton 1996] ACTON, C. H.: Ancillary data services of NASA's Navigation and Ancillary Information Facility. In: *Planetary and Space Science* 44 (1996), Nr. 1, S. 65 – 70. – URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0032063395001077>. – Planetary data system. – ISSN 0032-0633
- [Agnew 2007] AGNEW, D. C.: *Treatise on geophysics*. Bd. 3: *Earth tides*. S. 163–195. Siehe (Herring, 2007)
- [Ahlberg u. a. 1967] AHLBERG, J. H. ; NILSON, E. N. ; WALSH, J. L.: *Mathematics in Science and Engineering*. Bd. 38: *The theory of splines and their applications*. New York, London : Academic Press, 1967
- [Alessi u. a. 2008] ALESSI, E. M. ; FARRÉS, A. ; JORBA, À. ; SIMÓ, C. ; VIEIRO, A.: Efficient usage of self validated integrators for space applications / Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Barcelona, Spanien : ESA report, 2008. – Forschungsbericht. – URL <http://zeus.maia.ub.es/dsg/2008/0805AlessiFJSV-FR.pdf>
- [Arora und Russell 2010] ARORA, N. ; RUSSELL, R.: A fast, accurate, and smooth planetary ephemeris retrieval system. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 108 (2010), S. 107–124. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10569-010-9296-0>. – 10.1007/s10569-010-9296-0. – ISSN 0923-2958
- [Bettadpur u. a. 1992] BETTADPUR, S. V. ; SCHUTZ, B. E. ; LUNDBERG, J. B.: Spherical harmonic synthesis and least squares computations in satellite gravity gradiometry. In: *Journal of Geodesy* 66 (1992), S. 261–271. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02033186>. – 10.1007/BF02033186. – ISSN 0949-7714
- [Boccaletti und Pucacco 1999] BOCCALETTI, D. ; PUCACCO, G.: *Theory of orbits – perturbative and geometrical Methods*. Bd. 2. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1999
- [Capitaine u. a. 2006] CAPITAINÉ, N. ; ANDREI, A. H. ; CALABRETTA, M. ; DEHANT, V. ; FUKUSHIMA, T. ; GUINOT, B. ; HOHENKERK, C. ; KAPLAN, G. ; KLIONER, S. ; KOVALEVSKY, J. u. a.: Proposed terminology in fundamental astronomy based on IAU 2000 resolutions. In: *Proceedings of the International Astronomical Union* 2 (2006), Nr. 14, S. 474–475
- [De Boor 2001] DE BOOR, C.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 27: *A practical guide to splines*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2001. – URL <http://www.springer.com/mathematics/analysis/book/978-0-387-95366-3>
- [Dreszer 1975] DRESZER, J.: *Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft*. Zürich, Frankfurt/Main, Thun : Harri Deutsch, 1975. – ISBN 387144149X

- [Fairhead und Bretagnon 1990] FAIRHEAD, L. ; BRETAGNON, P.: An analytical formula for the time transformation TB-TT. In: *Astronomy and Astrophysics* 229 (1990), März, S. 240–247
- [Folkner u. a. 2009] FOLKNER, W. M. ; WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H.: The planetary and lunar ephemeris DE 421. In: *JPL IOM 343R-08-003* (2009)
- [Giorgini u. a. 1996] GIORGINI, J. D. ; YEOMANS, D. K. ; CHAMBERLIN, A. B. ; CHODAS, P. W. ; JACOBSON, R. A. ; KEESEY, M. S. ; LIESKE, J. H. ; OSTRO, S. J. ; STANDISH, E. M. ; WIMBERLY, R. N.: JPL's on-line solar system data service. In: *Bulletin of the American Astronomical Society* Bd. 28, 1996, S. 1158
- [Hartmann und Wenzel 1995] HARTMANN, T. ; WENZEL, H.-G.: The HW95 tidal potential catalogue. In: *Geophysical research letters* 22 (1995), Nr. 24, S. 3553–3556
- [Herring 2007] HERRING, T. A. (Hrsg.): *Treatise on geophysics*. Bd. 3: *Geodesy*. Amsterdam : Elsevier, 2007
- [Irwin und Fukushima 1999] IRWIN, A. W. ; FUKUSHIMA, T.: A numerical time ephemeris of the Earth. In: *Astronomy and Astrophysics* 348 (1999), August, S. 642–652
- [Kaula 2000] KAULA, W. M.: *Theory of satellite geodesy: Applications of satellites to geodesy*. Mineola, New York : Dover Publishing, 2000
- [Longman 1959] LONGMAN, I. M.: Formulas for computing the tidal accelerations due to the Moon and the Sun. In: *Journal of Geophysical Research* 64 (1959), Nr. 12, S. 2351–2355
- [Markwardt 2001] MARKWARDT, C.: *How to read the JPL ephemeris and perform barycentering*. 2001. – URL <http://lheawww.gsfc.nasa.gov/users/craigm/bary/>
- [Mayer-Gürr 2006] MAYER-GÜRR, T.: *Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE*, Universitäts- und Landesbibliothek Bonn, Dissertation, 2006
- [McCarthy 2011] MCCARTHY, D. D.: Evolution of timescales from astronomy to physical metrology. In: *Metrologia* 48 (2011), Nr. 4, S. S132. – URL <http://stacks.iop.org/0026-1394/48/i=4/a=S03>
- [Melchior 1983] MELCHIOR, P.: The tides of the Planet Earth. In: *Oxford, Pergamon Press, 1983. 653 p.* 1 (1983)
- [Mervart 1995] MERVART, L.: Ambiguity resolution techniques in geodetic and geodynamic applications of the Global Positioning System. In: *Geod.-Geophys. Arb. Schweiz* 53 (1995). – URL <http://www.sgc.ethz.ch/publications#geodgeophys>
- [Micula und Micula 1999] MICULA, G. ; MICULA, S.: *Mathematics and its Applications*. Bd. 462: *Handbook of splines*. Dordrecht [u.a.] : Kluwer Acad. Publ., 1999 ISSN 0792355032 9780792355038
- [Montenbruck und Gill 2000] MONTENBRUCK, O. ; GILL, E.: *Satellite orbits: models, methods, and applications*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2000. – ISBN 354067280X
- [Moyer 1981a] MOYER, T. D.: Transformation from proper time on Earth to coordinate time in solar system barycentric space-time frame of reference - part one. In: *Celestial Mechanics* 23 (1981), Januar, S. 33–56



- [Moyer 1981b] MOYER, T. D.: Transformation from proper time on Earth to coordinate time in solar system barycentric space-time frame of reference - part two. In: *Celestial Mechanics* 23 (1981), Januar, S. 57–68
- [Müller u. a. 2008] MÜLLER, J. ; SOFFEL, M. ; KLIONER, S. A.: Geodesy and relativity. In: *Journal of Geodesy* 82 (2008), März, S. 133–145
- [Nesterenko u. a. 2009] NESTERENKO, M. ; PATERA, J. ; TERESZKIEWICZ, A.: Orbit functions of SU (n) and Chebyshev polynomials. In: *Arxiv preprint arXiv:0905.2925* (2009)
- [Newhall 1988] NEWHALL, X. X.: Numerical representation of planetary ephemerides. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 45 (1988), S. 305–310. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01229014>. – 10.1007/BF01229014. – ISSN 0923-2958
- [Newhall u. a. 1983] NEWHALL, X. X. ; STANDISH, E. M. ; WILLIAMS, J. G.: DE 102-A numerically integrated ephemeris of the Moon and Planets spanning forty-four centuries. In: *Astronomy and astrophysics* 125 (1983), S. 150–167. – ISSN 0004-6361
- [Petit u. a. 2010] PETIT, G. ; LUZUM, B. u. a.: IERS Conventions (2010). In: *IERS Technical Note* 36 (2010)
- [Pitjeva 2001] PITJEVA, E. V.: Modern numerical ephemerides of Planets and the importance of ranging observations for their creation. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 80 (2001), S. 249–271. – URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1012289530641>. – 10.1023/A:1012289530641. – ISSN 0923-2958
- [Pitjeva 2005] PITJEVA, E. V.: High-precision ephemerides of Planets, EPM and determination of some astronomical constants. In: *Solar System Research* 39 (2005), Nr. 3, S. 176–186. – ISSN 0038-0946
- [Pitjeva 2008] PITJEVA, E. V.: Ephemerides EPM2008: the updated model, constants, data. In: *Journées-2008. Systems de reference spatio-temporels and X. Lohrman-Kolloquium: Astrometry, Geodynamics and Astronomical Reference Systems*. Dresden, Germany, 2008
- [Press u. a. 1992] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes in C*. Bd. 994. Cambridge : Cambridge university press, 1992
- [Rivlin 1990] RIVLIN, T. J.: *Chebyshev polynomials: from approximation theory to algebra and number theory*. Wiley, 1990
- [Rothacher 1992] ROTHACHER, M.: Orbits of satellite systems in space geodesy. In: *Geod.-Geophys. Arb. Schweiz* 46 (1992). – URL <http://www.sgc.ethz.ch/publications#geodgeophys>
- [Schneider 1988] SCHNEIDER, M.: *Satellitengeodäsie*. Mannheim, Wien, Zürich : Wissenschaftsverlag, 1988
- [Schumaker 1982] SCHUMAKER, L. L.: Optimal spline solutions of systems of ordinary differential equations. In: *Differential Equations* Bd. 957. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1982, S. 272–283. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0066243>. – 10.1007/BFb0066243
- [Schweizer 2009] SCHWEIZER, W.: *Matlab kompakt*. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2009

- [Seeber 2003] SEEBER, G.: *Satellite geodesy*. Berlin, New York : Walter De Gruyter Inc, 2003
- [Seidelmann 1992] SEIDELMANN, P. K. (Hrsg.): *Explanatory supplement to the astronomical almanac – A revision to the explanatory supplement to the astronomical ephemeris and the American ephemeris and nautical almanac*. Bd. 1. Mill Valley, CA (USA) : University Science Books, 1992. – 780 S
- [Soffel u. a. 2003] SOFFEL, M. ; KLIONER, S. A. ; PETIT, G. ; WOLF, P. ; KOPEIKIN, S. M. ; BRETAGNON, P. ; BRUMBERG, V. A. ; CAPITAIN, N. ; DAMOUR, T. ; FUKUSHIMA, T. ; GUINOT, B. ; HUANG, T.-Y. ; LINDEGREN, L. ; MA, C. ; NORDTVEDT, K. ; RIES, J. C. ; SEIDELMANN, P. K. ; VOKROUHLICKY, D. ; WILL, C. M. ; XU, C.: The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement. In: *The Astronomical Journal* 126 (2003), Nr. 6, S. 2687. – URL <http://stacks.iop.org/1538-3881/126/i=6/a=2687>
- [Späth und Meier 1990] SPÄTH, H. ; MEIER, J.: *Eindimensionale Spline-Interpolations- Algorithmen*. R. Oldenbourg, 1990
- [Standish 1998a] STANDISH, E. M.: JPL planetary and lunar ephemerides, DE 405/LE 405. In: *JPL IOM* 312 (1998), S. 98–048
- [Standish 1998b] STANDISH, E. M.: Time scales in the JPL and CfA ephemerides. In: *Astronomy and Astrophysics* 336 (1998), S. 381–384. – ISSN 0004-6361
- [Standish 2000] STANDISH, E. M.: Dynamical reference frame – current relevance and future prospects / DTIC Document. 2000. – Forschungsbericht
- [Standish u. a. 1995] STANDISH, E. M. ; NEWHALL, X. X. ; WILLIAMS, J. G. ; FOLKNER, W. M.: JPL planetary and lunar ephemerides, DE 403/LE 403. In: *JPL IOM* 314 (1995), S. 10–127
- [Torge 2001] TORGE, W.: *Geodesy*. 3. Auflage. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 2001
- [Wang 1997] WANG, R.: *Lecture Notes in Earth Sciences*. Bd. 66: *Tidal response of the solid Earth*. S. 27–57. Siehe (Wilhelm u. a., 1997). – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0011456>
- [Wenzel 1997] WENZEL, H.-G.: *Lecture Notes in Earth Sciences*. Bd. 66: *Tide-generating potential for the Earth*. S. 9–26. Siehe (Wilhelm u. a., 1997). – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0011455>
- [Wilhelm u. a. 1997] WILHELM, H. (Hrsg.) ; ZÜRN, W. (Hrsg.) ; WENZEL, H.-G. (Hrsg.): *Lecture Notes in Earth Sciences*. Bd. 66: *Tidal phenomena*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1997. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0011455>
- [Xu 2008] XU, G.: *Orbits*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2008

## Liste der Berichte/List of Reports

1	2011	Manuel Schilling	Berechnung der Gezeiteneffekte für einen Low Earth Orbiter
---	------	------------------	--