

**Erzeugung und Untersuchung  
dunkler Solitonen  
in Bose-Einstein Kondensaten**

Von dem Fachbereich Physik  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
– Dr. rer. nat. –  
genehmigte Dissertation

von

Sven Burger, Dipl. Phys.,  
geboren am 28. Januar 1969 in Kiel.

2000

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Ertmer  
Koreferent: Prof. Dr. Karsten Danzmann  
Tag der Promotion: 26. Juni 2000

## Zusammenfassung

Die Realisierung der Bose-Einstein Kondensation in verdünnten atomaren Gasen ermöglicht die Untersuchung von fundamentalen makroskopischen Quantenphänomenen, wie den Interferenzen zwischen zwei unabhängig voneinander entstandenen Kondensaten und kollektiven Anregungszuständen in Bose-Einstein Kondensaten. Das Studium dieser Phänomene liefert wichtige Aspekte im Verständnis der Quantenmechanik von Vielteilchensystemen.

Nach den Beobachtungen von kollektiven Schwingungsmoden und Schallausbreitung in Bose-Einstein Kondensaten ist es im letzten Jahr erstmalig gelungen, auch Vortices und Solitonen-Zustände anzuregen und zu untersuchen.

In Vortices treten die suprafluiden Eigenschaften von Bose-Einstein Kondensaten direkt zutage. Solitonen sind formstabil propagierende, lokalisierte Wellen, die in nichtlinearen Systemen auftreten können. Ihre Untersuchung in Bose-Einstein Kondensaten bietet Verbindungen dieses fundamentalen quantenmechanischen Systems zu anderen Bereichen intensiver naturwissenschaftlicher Forschung, wie zu der nichtlinearen Optik, der Fluidmechanik und ebenfalls der Suprafluidität.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden erstmals dunkle Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten aus  $^{87}\text{Rb}$  erzeugt und analysiert. Die Ergebnisse geben über den Entstehungsprozess, die Dynamik und die Dissipation dunkler Solitonen in Materiewellen Aufschluss. Erste Untersuchungen zur Wechselwirkung von Solitonen wurden in Experimenten mit kollidierenden Solitonen durchgeführt.

Für die Erzeugung der Solitonen wurde die Methode der Phasenaufprägung an Materiewellen entwickelt und eingesetzt. Möglichkeiten und Grenzen der Phasenaufprägungsmethode wurden mit Hilfe numerischer Simulationen analysiert. Die Methode der Bragg-Spektroskopie von Materiewellen wurde in das Experiment integriert. Dies ermöglichte eine spektroskopische Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsstromdichte in den betrachteten Solitonenzuständen.

Weitere Schwerpunkte dieser Arbeit waren die Planung und Realisierung des Experiments zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten und die Entwicklung und Charakterisierung von atomoptischen Elementen zur kohärenten Manipulation von Bose-Einstein Kondensaten und Atomlasern. Verschiedene atomoptische Elemente wurden mit Hilfe der Dipolpotentiale weit verstimmter Lichtfelder realisiert. Insbesondere wurden Experimente mit Spiegeln, Strahlteilern, Wellenleitern und Linsen für Materiewellen durchgeführt.

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse der Untersuchung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten stellen einen Beitrag zum Verständnis der Physik nichtlinearer kohärenter Materiewellen dar. Mit den Kombinationsmöglichkeiten der atomoptischen Elemente und Methoden, die in dieser Arbeit entwickelt worden sind, lässt sich eine Vielzahl weiterer fundamentaler Fragestellungen untersuchen. Von hohem Interesse sind u.a. der Einfluss der Dimensionalität des Systems auf Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten und interferometrische Messungen mit Bose-Einstein Kondensaten als Quellen kohärenter Materiewellen.

**Schlagwörter:** *Bose-Einstein Kondensation, Solitonen in Materiewellen, Atomoptik*

## Abstract

The experimental realization of Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases opens a new way to the investigation of fundamental macroscopical quantum phenomena, e.g., the interference between two independently created Bose-Einstein condensates. The study of such phenomena gives an important insight into quantum mechanics of many-body systems.

In recent experiments, collective modes of Bose-Einstein condensates and the propagation of sound in Bose-Einstein condensates have been observed. During the last year, experiments on the excitation and investigation of vortices and solitons in Bose-Einstein condensates succeeded for the first time.

The occurrence of quantized vortices manifests the superfluid behaviour of Bose-Einstein condensates. Solitons are localized waves propagating without changing their shape in nonlinear systems. The study of solitons in Bose-Einstein condensates links this fundamental quantum mechanical system to other areas of scientific research, e.g., to nonlinear optics, fluid mechanics, and suprafluidity.

Within the scope of this thesis dark solitons in Bose-Einstein condensates of  $^{87}\text{Rb}$  have been created and analysed for the first time. The results give information on the creation process, the dynamics, and the dissipation of solitons in matter waves. First investigations on the interaction of solitons have been performed in experiments with pairs of colliding dark solitons.

The method of phase imprinting in matter waves has been developed and used for the creation of dark solitons. Numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation have been performed in order to analyse possibilities and limitations of the applicability of this method. Moreover, the method of Bragg deflection of matter waves has been implied in the experiment. This enabled the spectroscopic investigation of the quantum mechanical probability current density in soliton-states.

Further main points of this thesis were the design and realization of an experiment on Bose-Einstein condensation in a dilute gas of  $^{87}\text{Rb}$  and the investigation of atom-optical elements for the coherent manipulation of Bose-Einstein condensates and atom lasers. Far detuned light fields have been used to realize various atomoptical elements, like mirrors, beam splitters, waveguides, and lenses for matter waves.

The results achieved in this thesis represent a contribution to research on coherent, nonlinear matter waves. By the combination of the various atomoptical elements and methods developed throughout this work, a variety of fundamental questions may be investigated. Of specific interest are investigations of Bose-Einstein condensates in different dimensionalities and interferometric measurements using coherent matter waves originating from Bose-Einstein condensates.

**Key words:** *Bose-Einstein condensation, Solitons in matter waves, Atom optics*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bose-Einstein Kondensation</b>	<b>6</b>
2.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	6
2.1.1	Das ideale Bose-Gas im harmonischen Fallenpotential . . . . .	6
2.1.2	Bose-Gase unter Berücksichtigung interatomarer Wechselwirkungen . . . . .	10
2.2	Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten . . . . .	16
2.2.1	Die Konzeption eines BEC-Experiments . . . . .	18
2.2.2	Laserkühlung neutraler Atome . . . . .	19
2.2.3	Magnetische Speicherung neutraler Atome . . . . .	24
2.2.4	Evaporative Kühlung . . . . .	25
2.2.5	Detektion von Bose-Einstein Kondensaten . . . . .	27
2.2.6	Atomlaser . . . . .	30
2.2.7	Bragg-Beugung von Bose-Einstein Kondensaten . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Solitonen</b>	<b>36</b>
3.1	Definition . . . . .	36
3.2	Optische Solitonen . . . . .	38
3.2.1	Erzeugung optischer dunkler Solitonen . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Solitonen in Materiewellen</b>	<b>43</b>
4.1	Die Wellenfunktion dunkler Solitonen . . . . .	43
4.2	Eigenschaften dunkler Solitonen . . . . .	48
4.2.1	Solitonenoszillationen . . . . .	48
4.2.2	Stabilität von Solitonen in Materiewellen . . . . .	49
4.2.3	Bandlücken-Solitonen . . . . .	50
4.3	Erzeugungsmöglichkeiten dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten . . . . .	51
4.3.1	Die Phasenaufprägungsmethode . . . . .	52
4.3.2	Erzeugung dunkler Solitonen mit der Phasenaufprägungsmethode . . . . .	53
4.3.3	Numerische Simulationen zur Erzeugung dunkler Solitonen mit der Phasenaufprägungsmethode . . . . .	54
4.3.4	Erzeugung von Vortices mit der Phasenaufprägungsmethode . . . . .	64

<b>5 Experimentelle Erzeugung von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten</b>	<b>66</b>
5.1 Experimenteller Aufbau . . . . .	66
5.1.1 Präparation des Bose-Einstein Kondensats . . . . .	66
5.1.2 Das Dipolpotential zum Aufprägen der Phase . . . . .	67
5.1.3 Erzeugung dunkler Solitonen . . . . .	69
5.2 Untersuchung der Solitonengeschwindigkeiten . . . . .	72
5.3 Bragg-Spektroskopie an Solitonzuständen . . . . .	74
5.4 Untersuchung der Lebensdauer dunkler Solitonen . . . . .	79
5.5 Wechselwirkung kollidierender Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten . . . . .	81
<b>6 Experimente zur Atomoptik mit Bose-Einstein Kondensaten</b>	<b>86</b>
6.1 Atomoptische Linsen . . . . .	87
6.2 Fokussierung eines Atomlaserstrahles . . . . .	90
6.3 Atomoptische Spiegel, Strahlteiler und Wellenleiter . . . . .	93
6.3.1 Anhang zu Kapitel 6 . . . . .	94
<b>7 Ausblick</b>	<b>117</b>
<b>A Die Dipolkraft</b>	<b>120</b>
<b>B Die verwendeten Lasersysteme</b>	<b>122</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Mit den ersten Beobachtungen der Bose-Einstein Kondensation (BEC) in schwach wechselwirkenden atomaren Gasen vor knapp fünf Jahren wurde ein sehr fundamentaler Effekt mit nachhaltigen Auswirkungen auf viele Bereiche der Physik experimentell zugänglich gemacht [1, 2, 3]. Die Untersuchung der Eigenschaften der Bose-Einstein Kondensate liefert wichtige Erkenntnisse über die Grundlagen der Quantenmechanik und bietet enge Verknüpfungen mit Quantenphänomenen wie der Supraleitung, der Suprafluidität und der Quantenstatistik. In einem Bose-Einstein Kondensat befindet sich ein großer Anteil aller Teilchen in einem identischen quantenmechanischen Zustand, dem Grundzustand des Systems. Bose-Einstein Kondensate bieten daher einen idealen Ausgangspunkt für viele Anwendungen und grundlegende Experimente. Unter anderem sind wichtige aktuelle Entwicklungen in der Atomoptik durch den Einsatz von Bose-Einstein Kondensaten möglich geworden: Verschiedene Realisierungen von Atomlasern auf BEC-Basis werden in atomoptischen Experimenten als Quelle kohärenter Atome eingesetzt [4, 5, 6, 7] und versprechen vergleichbar wichtige Anwendungsmöglichkeiten in der Atomoptik, wie sie der Laser in der Optik gefunden hat. Mit der Untersuchung nichtlinearer Effekte wie der Vier-Wellen-Mischung von Materiewellen [8], Selbstinterferenzen in reflektierten Bose-Einstein Kondensaten [9] und bosonischer Verstärkung von Atomen [10] wurden erste Experimente einer *nichtlinearen* Atomoptik durchgeführt. Die Demonstration der Reduzierung der Lichtgeschwindigkeit in einem Bose-Einstein Kondensat auf  $c < 20$  m/s [11] bildet eine Grundlage für experimentelle Untersuchungen relativistischer, bisher nur in der Astrophysik zugänglicher Effekte in Laborsystemen.

Die theoretischen Grundlagen zur Bose-Einstein Kondensation wurden schon in den 20er Jahren des vergangenen Jahrhunderts gelegt: Bose stellte eine Statistik zur Erklärung des Energiespektrums in elektromagnetischen Strahlungsfeldern auf [12], die als neue, grundlegende Annahme die Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen voraussetzt. De Broglie entwickelte das Konzept eines Wellencharakters der Materie [13]. Von de Broglies Idee ge-

leitet wandte Einstein nun Boses Statistik auf ideale Gase aus Atomen an und fand, dass bei dem Absenken der Temperatur des Gases unter eine kritische Temperatur ein Phasenübergang stattfindet [14]. Dieser ist dadurch charakterisiert, dass eine makroskopische Zahl von Teilchen in den energetischen Grundzustand des Systems gelangt. Die erste Anwendung des Modells dieses Phasenübergangs fand bei der Erklärung der Übergangstemperatur von flüssigem  $^4\text{Helium}$  in den superflüssigen Zustand statt. Die bedeutenden theoretischen Arbeiten zur Suprafluidität führten daher auch zu einem erweiterten Verständnis der Bose-Einstein Kondensation. Insbesondere wurde das Konzept einer *makroskopischen Wellenfunktion* entwickelt, das sowohl auf Superflüssigkeiten als auch auf Bose-Einstein Kondensate nur schwach wechselwirkender Teilchen anzuwenden ist <sup>1</sup>.

Die experimentelle Realisierung der Bose-Einstein Kondensation in *schwach* wechselwirkenden atomaren Gasen galt als „heiliger Gral“ der Quantenphysik, in dem die Bestätigung umfangreicher theoretische Arbeiten auf diesem Gebiet, die Klärung umstrittener Fragestellungen und eine Fülle neuer physikalischer Phänomene erwartet wurden. Lange Zeit wurde allerdings angenommen, die Bose-Einstein Kondensation in atomaren Gasen sei nicht erreichbar – unter anderem, weil die Abkühlung atomarer Gase bei moderaten Drücken zum Übergang in einen flüssigen oder festen Aggregatzustand führt, lange bevor die kritische Temperatur erreicht wird.

Als 1976 bekannt wurde, dass spinpolarisierter Wasserstoff – als einzige Ausnahme unter den Atomen – keine Molekülbindungen eingeht, also auch bei ultratiefen Temperaturen gasförmig bleibt, begannen intensive experimentelle Bestrebungen, die Bose-Einstein Kondensation in diesem System zu erreichen. Nach der erstmalig realisierten Speicherung von  $\text{H}\uparrow$  in einem inhomogenen Magnetfeld im Jahr 1980 folgten Experimente zur Kühlung des Gases mit kryogenischen Methoden und zur Verdampfungskühlung, die im Jahr 1998 schließlich zur Bose-Einstein Kondensation von spinpolarisiertem Wasserstoff führten [16] <sup>2</sup>. Der hohe apparative Aufwand, der mit der Kühlung verbunden ist, erschwert bisher allerdings die Untersuchung und Manipulation der  $\text{H}\uparrow$ -Kondensate wesentlich.

Das experimentell realisierte System, das Einsteins Konzept eines idealen Gases am nächsten kam, bevor die Bose-Einstein Kondensation in atomaren Gasen erreicht wurde, sind laserinduzierte Exzitonen in Kupferoxid [18]. Bei geeignet gewählten Parametern ist es hier möglich, Thermalisierungsraten der Ensembles von Exzitonen zu erreichen, die die Verlusten durch Rekombinationen dieser Elektronen-Loch-Paare überwiegen. So lässt sich über eine Kühlung des Metalloxids mit kryogenischen Methoden das „Exzitonen-Gas“ auf tiefe Temperaturen und bis zur Bose-Einstein Kondensation bringen.

---

<sup>1</sup>Die historische Entwicklung der theoretischen Konzepte im Zusammenhang mit der Bose-Einstein Kondensation wird ausführlich in [15] dargestellt.

<sup>2</sup>Die Entwicklung der Experimente an  $\text{H}\uparrow$  bis zur BEC wird in [17] zusammengefasst.



Ein ähnlicher Effekt macht es möglich, auch in atomaren Gasen extrem tiefe Temperaturen zu erreichen: Durch starke Verdünnung eines Gases lässt sich ein Regime erreichen, in dem die Thermalisierungsrate wesentlich größer als die Verlustrate durch Molekülbildung ist. In den 80er und 90er Jahren wurden bahnbrechende Methoden der Manipulation von Atomen durch Laserstrahlung entwickelt, die es möglich machen, sehr tiefe Temperaturbereiche in Gasen niedriger Teilchendichte zu erreichen. Durch die Kombination der Laserkühlung mit der im Zusammenhang mit Experimenten an spinpolarisiertem Wasserstoff entwickelten Verdampfungskühlung gelang es erstmals 1995, die Bose-Einstein Kondensation in verdünnten Gasen aus Rubidium [1], Natrium [2] und Lithium [3] zu erreichen <sup>3</sup>.

Die vielfältigen Fragestellungen und Anwendungen im Zusammenhang mit der Bose-Einstein Kondensation haben seitdem zu einer rasanten Entwicklung sowohl auf experimentellem Gebiet als auch in der theoretischen Beschreibung und Vorhersage geführt. Weltweit werden atomare Bose-Einstein Kondensate inzwischen in über 20 Laboratorien erzeugt und untersucht [21]; im Durchschnitt der letzten fünf Jahre wurde etwa täglich eine theoretische Arbeit zur Bose-Einstein Kondensation veröffentlicht.

Besonderes Interesse gilt der Untersuchung der Eigenschaften der Bose-Einstein Kondensate, die im engen Zusammenhang mit den Phänomenen der Supraleitung und Suprafluidität und mit der Quantenstatistik stehen. In Experimenten treten Verbindungen zur Supraleitung in der Beobachtung makroskopischer Quanteninterferenz in Analogie zum Josephson-Effekt [5] zutage, Verbindungen zur Superfluidität in der Beobachtung von Vortices [22, 23], von Solitonen [24, 25] und einer kritischen Geschwindigkeit dissipationslosen Flusses [26], Verbindungen zur Quantenstatistik im Kondensationsprozess selbst, in der stimulierten Verstärkung von Materiewellen [27, 10] und in den Korrelationen der Kondensatome [28].

Ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die Charakterisierung nichtlinearer Eigenschaften von Bose-Einstein Kondensaten mit Hilfe der Untersuchung von Solitonen in diesen Systemen. Solitonen sind ein fundamentales, nichtlineares Wellenphänomen. Mit der Untersuchung von Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten treten grundlegende Zusammenhänge zwischen der Bose-Einstein Kondensation und anderen Bereichen der Physik zutage: Der Entstehungsprozess dunkler Solitonen beinhaltet Analogien und Vergleichsmöglichkeiten zur nichtlinearen Optik. Die Dynamik der Wellenfunktion dunkler Solitonenzustände ist eng mit der Suprafluidität verbunden. Dissipation und Wechselwirkungen von Solitonen bieten Zusammenhänge zur Elementarteilchenphysik.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden erstmals dunkle Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten erzeugt. Zur Erzeugung der dunklen Solitonen wurde mit der *Phasenaufprägungsmethode* eine holographische atomoptische Methode entwickelt und eingesetzt, die auch zur Erzeu-

---

<sup>3</sup>Ausführliche Berichte zur experimentellen Realisierung der BEC in Alkali-Gasen finden sich in [19, 20].

gung weiterer „topologischer Texturen“ in Bose-Einstein Kondensaten verwendet werden kann [29]. Die Entstehung und die Dynamik dunkler Solitonen wurde in Messungen der Evolution des Solitonenzustandes detailliert untersucht [24].

Das quantenmechanische Konzept einer Wahrscheinlichkeitsstromdichte, die sich aus dem Phasengradienten der Wellenfunktion ergibt, ist ein direkter Ausdruck des friktionslosen Transports in Superflüssigkeiten. Mit Hilfe der Spektroskopie der Geschwindigkeitsverteilung von Solitonenzuständen in Bose-Einstein Kondensaten wurde die Wahrscheinlichkeitsstromdichte direkt untersucht. Hierzu wurde erstmals die Methode der Bragg-Spektroskopie von Materiewellen [30] zur Spektroskopie niedrigliegender angeregter Zustände angewendet.

Diese Arbeit ist in ein Projekt des Sonderforschungsbereichs 407 „Quantenlimitierte Messungen mit Atomen, Molekülen und Photonen“ der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* eingebunden. Zu den Zielen des Projekts im Zeitraum dieser Arbeit gehörten die stabile Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten und die Entwicklung atomoptischer Elemente zur kohärenten Manipulation von Materiewellen. Diese besitzen wichtige Anwendungsmöglichkeiten in der Materiewelleninterferometrie und in der Atomlitographie. Weitere Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit bilden somit die Konzeption und Umsetzung des Experiments zur Bose-Einstein Kondensation von  $^{87}\text{Rb}$  und atomoptische Experimente mit kohärenten Ensembles.

Laserinduzierte Dipolpotentiale lassen sich sehr kontrollierbar und flexibel in BEC-Experimenten einsetzen. Sie wurden im Rahmen dieser Arbeit genutzt, um verschiedene atomoptische Elemente zu realisieren. Entwickelt und in Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten und Atomlasern eingesetzt wurden u.a. atomoptische Spiegel [9], Strahlteiler, Wellenleiter [31, 32] und Linsen. Möglichkeiten der Kombination dieser Elemente zur Realisierung neuer Atomlaser- und Atominterferometer-Geometrien werden diskutiert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst wird eine Einleitung in die theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation gegeben. Dabei wird insbesondere der Einfluss der geringen Restwechselwirkungen in Bose-Einstein Kondensaten atomarer Gase berücksichtigt, da hierin die Ursprünge nichtlinearer Phänomene dieser Systeme – wie das Auftreten von Solitonen – begründet liegen. In Abschnitt 2.2 folgt eine kurze Beschreibung des im Rahmen der Promotionsarbeit von K. Bongs [31] und dieser Arbeit geplanten und umgesetzten Experiments. Ergebnisse zur Bose-Einstein Kondensation, zur Auskopplung von Atomen aus dem Kondensat und zur Bragg-Beugung von Bose-Einstein Kondensaten werden vorgestellt.

Im darauf folgenden Kapitel wird das Konzept dunkler Solitonen anhand des Beispiels dunkler optischer Solitonen diskutiert. Kapitel 4 behandelt die Beschreibung und die Eigenschaften dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten sowie Methoden der Erzeugung. Die im Experiment genutzte Phasenaufprägungsmethode, die eine holographische, atom-

optische Methode darstellt, wird detailliert diskutiert. Dieses Kapitel stellt auch das in der Gruppe von M. Lewenstein entwickelte Modell zur numerischen Simulation der Gross-Pitaevskii Gleichung vor. In einer engen Zusammenarbeit wurde dieses Modell angewandt, um die experimentellen Bedingungen unserer physikalischen Realisierung der Erzeugung von Solitonen zu simulieren. Ergebnisse der Modellierungen fundieren die Diskussion der Phasenaufprägungsmethode.

In Kapitel 5 werden die experimentellen Ergebnisse zur im Rahmen dieser Arbeit realisierten Erzeugung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten analysiert und zusammengefasst. Insbesondere wurden die Dynamik der Solitonen, Wechselwirkungen kollidierender Solitonen und Dissipationsprozesse der Solitonen untersucht sowie der den Solitonen zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsdichtefluss mit Hilfe der Bragg-Beugung von Materiewellen spektroskopiert. Durch an die jeweilige experimentelle Situation angepasste Parameter kann mit Hilfe der numerischen Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung das Verhalten der dunklen Solitonen direkt mit der Theorie verglichen werden.

Kapitel 6 befasst sich mit atomoptischen Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten und Atomlasern. Ergebnisse zu atomoptischen Linsen, Spiegeln, Strahlteilern und Wellenleitern werden zusammengefasst und mit theoretischen Modellen verglichen. Ein Ausblick diskutiert u.a. Möglichkeiten fundamentaler Untersuchungen des Verhaltens von Solitonen in eindimensionalen Geometrien, die sich mit Hilfe von Wellenleitern und Spiegeln realisieren lassen.

# Kapitel 2

## Bose-Einstein Kondensation

### 2.1 Theoretische Grundlagen

#### 2.1.1 Das ideale Bose-Gas im harmonischen Fallenpotential

Zur Beschreibung der theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation wird in diesem Abschnitt zunächst das Verhalten eines wechselwirkungsfreien Gases aus bosonischen Teilchen diskutiert. Die Betrachtung des wechselwirkungsfreien Falls erlaubt einige wichtige qualitative Aussagen zu den Eigenschaften von Bose-Einstein Kondensaten, wie zu Temperatur- und Dichtebereichen, in denen die Kondensation eintritt, und zu experimentellen Signaturen der BEC.

In fast allen experimentellen Realisierungen der Bose-Einstein Kondensation verdünnter atomarer Gase ist das Gas in einem nahezu harmonischen Potential eingeschlossen. Dieses kann als

$$V(\vec{r}) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.1)$$

geschrieben werden. Die Teilchen der Masse  $m$  befinden sich in Zuständen der Bewegungsfreiheitsgrade, die durch die positiven Quantenzahlen  $n_x, n_y, n_z$  und die entsprechenden Energien  $\epsilon_{n_x, n_y, n_z}$  charakterisiert sind;

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z. \quad (2.2)$$

Bei der Temperatur  $T$  ist die Wahrscheinlichkeit  $p$  der Besetzung eines Zustandes

$(n_x, n_y, n_z)$  durch die Bose-Verteilung gegeben [12] <sup>1</sup>:

$$p(n_x, n_y, n_z) = \left( \exp \left[ \frac{\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu}{kT} \right] - 1 \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Das chemische Potential  $\mu$  und die Temperatur  $T$  sind dabei freie Parameter, die die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl  $N$  und der Gesamtenergie  $E$  ermöglichen <sup>2</sup>:

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left( \exp \left[ \frac{\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu}{kT} \right] - 1 \right)^{-1} \quad (2.4)$$

und

$$E = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{\epsilon_{n_x, n_y, n_z}}{\exp \left[ \frac{\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu}{kT} \right] - 1}. \quad (2.5)$$

Wenn für ein festes  $N$  die Temperatur des Systems abgesenkt wird, so steigt das chemische Potential an, wodurch die Teilchenzahlerhaltung gewährleistet wird (Gleichung 2.4). Das chemische Potential als negative Änderung der Energie des Systems mit der Teilchenzahl kann allerdings nicht größer als der niedrigste Energiezustand des Systems werden (Gleichung 2.3 ergibt für  $(\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu) < 0$  negative Werte). Der Grenzwert wird beim Absenken der Temperatur bis auf einen endlichen Wert  $T = T_c > 0$  erreicht:  $\mu \rightarrow \mu(T_c) \equiv \mu_c = \frac{3}{2} \hbar \bar{\omega}$ , wobei  $\bar{\omega}$  das arithmetische Mittel der Oszillationsfrequenzen angibt,  $\bar{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ .

Für Temperaturen  $T < T_c$  wird der Grundzustand mit einem Großteil der Teilchen besetzt,  $N_0(T) = \mathcal{O}(N)$ . Der Übergang des Systems von Temperaturen oberhalb  $T_c$  in diesen Bereich ist ein thermodynamischer Phasenübergang und wird als Bose-Einstein Kondensation bezeichnet [34, 14].

Zur Berechnung der Zahl von Teilchen in den angeregten Zuständen überführt man die Summe 2.4 in ein Integral, wobei man die Besetzung des Grundzustands ausschließt und eine große Teilchenzahl sowie einen geringen Abstand der Energieniveaus ( $\hbar\omega_{ho} \ll kT$ ,  $\omega_{ho} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ ) annimmt, und erhält als analytische Lösung (siehe z.B. [35, 36])

$$N - N_0 = \zeta(3) \left( \frac{kT}{\hbar\omega_{ho}} \right)^3, \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Die Bose-Verteilung lässt sich aus dem Grundpostulat der statistischen Mechanik – der Annahme, dass alle Mikrozustände gleich wahrscheinlich besetzt werden – und aus der (für Teilchen mit ganzzahligem Gesamtspin gegebenen) Möglichkeit, dass sich mehrere Teilchen in einem Zustand befinden, ableiten [33].

<sup>2</sup>Dies entspricht einer Betrachtung in der Großkanonischen Gesamtheit [33].

mit der Riemann'schen  $\zeta$ -Funktion. Durch die Bedingung, dass der Grundzustand direkt am Phasenübergang noch mikroskopisch besetzt ist,  $N_0(T_c) \approx 0$ , erhält man aus Gl. 2.6 die kritische Temperatur  $T_c$ ,

$$kT_c = \hbar\omega_{ho} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.941 \hbar\omega_{ho} N^{1/3} . \quad (2.7)$$

Nimmt man oberhalb der Bose-Einstein Kondensation eine Gaußsche Dichteverteilung mit einer Breite  $a_{th} = 2kT/m\omega_{ho}$  an,

$$n_{th}(\vec{r}) = \frac{N}{(2\pi a_{th})^{3/2}} \exp \left[ -\frac{r^2}{2a_{th}^2} \right] , \quad (2.8)$$

so sieht man mit Gleichung 2.7, dass die Bose-Einstein Kondensation dann eintritt, wenn die zentrale Phasenraumdichte  $\rho_{ps}(\vec{r}_0)$  die Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  erreicht. Die exakte Berechnung der Phasenraumdichte bei der kritischen Temperatur ergibt [35]:

$$\rho_{ps}(\vec{r}_0) \equiv n(\vec{r}_0) \lambda_{dB}^3 \approx 2.612 . \quad (2.9)$$

Die dimensionslose Dichte im Phasenraum ist dabei das Produkt aus der Teilchendichte und dem Volumen, das die thermische de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{dB} = (2\pi\hbar^2/mkT)^{1/2}$  in den drei Raumdimensionen einnimmt.

Aus den Gleichungen 2.6 und 2.7 erhält man auch die Abhängigkeit der relativen Besetzung des Grundzustands von der Temperatur:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 . \quad (2.10)$$

Der Verlauf dieser Abhängigkeit ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Der abrupte und starke Anstieg von  $N_0/N$  unterhalb von  $T_c$  macht deutlich, dass durch den thermodynamischen Phasenübergang der Grundzustand mit einem Großteil der Teilchen besetzt wird, obwohl die Temperatur mit  $kT \gg \hbar\omega_{ho}$  noch relativ hoch ist. Intuitiv, d.h. nach der Boltzmann-Statistik, wäre eine starke Besetzung des Grundzustands erst bei Temperaturen  $kT \approx \hbar\omega_{ho}$  zu erwarten. Insofern ist die Bose-Einstein Kondensation ein „Hochtemperatur-Phänomen“ in der Physik extrem tiefer Temperaturen. Im folgenden werden die Teilchen im gemeinsamen Grundzustand als „Bose-Einstein Kondensat“, die Teilchen in den höheren Zuständen als „thermische Wolke“ bezeichnet.

Während die Bedingung, dass die Phasenraumdichte bei der Kondensationstemperatur die Größenordnung von 1 erreicht haben muss, nicht von der Form des einschließenden Potentials abhängt, wird der Verlauf der relativen Besetzung des Grundzustands stark hiervon

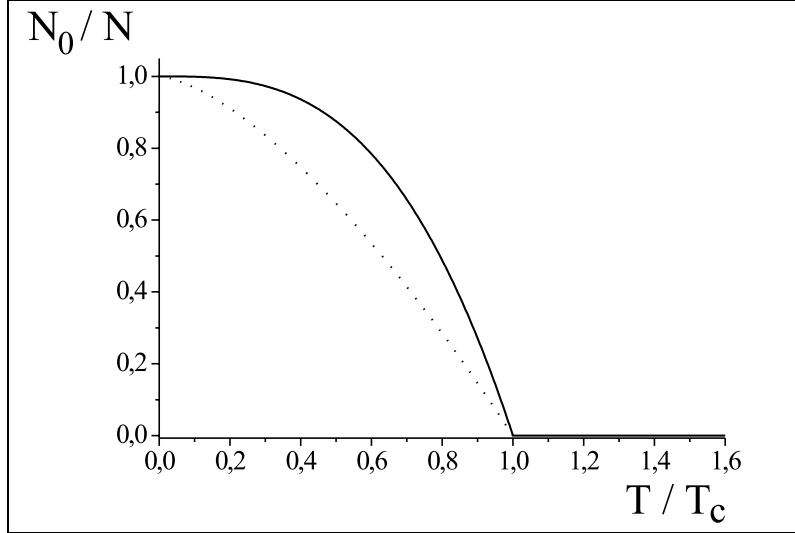


Abbildung 2.1: Die relative Besetzung des Grundzustands eines bosonischen Gases in Abhängigkeit von der Temperatur. Dargestellt sind die Verläufe für zwei verschiedene Formen des einschließenden Potentials (durchgezogene Linie: harmonisches Potential; gepunktet: Kastenpotential).

beeinflusst. Die gepunktete Kurve in Abb. 2.1 gibt die Abhängigkeit für ein Kastenpotential wieder; die Gleichung 2.10 entsprechende Abhängigkeit lautet hier [37]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}. \quad (2.11)$$

Mit der Abhängigkeit 2.10 lässt sich aus den experimentell gut bestimmbaren Teilchenzahlen im Grundzustand und in den angeregten Zuständen (in der „thermischen Wolke“) die Temperatur des Ensembles bestimmen; so folgt für einen Anteil im Grundzustand eines harmonischen Oszillatorpotentials von  $N_0/N > 90\%$  eine Temperatur von  $T < \sqrt[3]{10\%}T_c \approx 0.45T_c$ .

Für die typischen experimentellen Parameter im BEC-Experiment in Hannover von  $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_\perp = 2\pi \cdot 425 \text{ Hz}$ ,  $\omega_z = 2\pi \cdot 14 \text{ Hz}$ ,  $N = 10^6$ , folgt eine Übergangstemperatur von  $T_c \approx 0.6 \mu\text{K}$ .

Die quantenmechanische Wellenfunktion des Bose-Einstein Kondensats aus  $N$  *wechselwirkungsfreien* Teilchen ist das Produkt der Einteilchenzustände jeweils niedrigster Energie ( $n_{x,y,z} = 0$ ):  $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \prod_i \varphi_0(\vec{r}_i)$ , mit der Grundzustandsfunktion im harmonischen Potential (siehe z.B. [38]),

$$\varphi_0(\vec{r}) = \left(\frac{m\omega_{ho}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right]. \quad (2.12)$$

Ein Bose-Einstein Kondensat als makroskopisch besetzter Grundzustand hat damit eine Dichteverteilung  $n(\vec{r}) = N|\varphi_0(\vec{r})|^2$ , deren typische Ausdehnung  $a_{ho} = (\hbar/m\omega_{ho})^{1/2}$  nicht von der Teilchenzahl abhängt, sondern nur durch das Potential 2.1 bestimmt ist.

Die Breite der thermischen Wolke ist nach Gl. 2.8 um einen Faktor  $(kT/\hbar\omega_{ho})^{1/2}$  größer als die Ausdehnung des Kondensats (für  $\omega_{ho} = 2\pi \cdot 130$  Hz und  $T = 600$  nK beträgt  $kT/\hbar\omega_{ho} \approx 100$ ). Die typische Signatur der Bose-Einstein Kondensation ist also eine plötzliche, starke Erhöhung der Dichte in einem kleinen Raumbereich und gleichzeitig eine stark anisotrope Impulsverteilung, da sich ein großer Anteil der Atome in einem einzelnen – dem niedrigsten – Impulszustand des Systems befindet. Das Erscheinen des Kondensats in einem kleinen ausgezeichneten Bereich sowohl im Orts- als auch im Impulsraum ist eine spezielle Eigenschaft gefangener Bose-Gase; in freien Gasen findet die Kondensation nur im Impulsraum statt, da alle Impulszustände den gleichen Raumbereich einnehmen.

Auch experimentell gehört das Auftreten eines zentralen „Peaks“ in der Impulsverteilung [1, 2] und in der Ortsverteilung [3, 39] der Wolke zu den klaren Hinweisen auf die Bose-Einstein Kondensation (siehe auch Abb. 2.8).

## 2.1.2 Bose-Gase unter Berücksichtigung interatomarer Wechselwirkungen

In Gasen in den betrachteten Regimes sind die Wechselwirkungen so schwach, dass ihre *statistischen* Eigenschaften nur im Prozentbereich beeinflusst werden (vergleiche [35]), sodass sie im thermodynamischen Sinn *schwach wechselwirkende Gase* bilden. Dennoch bestimmen die interatomaren Wechselwirkungen entscheidend die Evolution von Bose-Einstein Kondensaten neutraler atomarer Gase.

Erst die Wechselwirkungen erlauben Regimes der nichtlinearen Physik, die in den reinen, „*störstellenfreien*“ Systemen, die Bose-Einstein Kondensate darstellen, experimentell zugänglich sind und sich in der theoretischen Betrachtung gut beschreiben lassen. Beispiele hierfür sind verschiedene Experimente der nichtlinearen Atomoptik [40, 8, 9], zu der auch die Untersuchung von solitonenartigen Materiewellen, die in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden, gezählt werden kann. Weiterhin wird erst durch die Wechselwirkungen der Atome untereinander experimentell die Thermalisierung der Ensembles, die in „*temperaturlosen*“ Fallen von der thermalisierenden Außenwelt entkoppelt sind, möglich.

Auf den ersten Blick scheinen atomare Wechselwirkungen das Auftreten der Bose-Einstein Kondensation zu verhindern, da sie bei Temperaturen schon weit oberhalb der Kondensationstemperatur  $T_c$  zu Molekülbindungen und damit zur Kondensation jedes atomaren Gases in einen flüssigen oder festen Aggregatzustand führen (mit der Ausnahme von spinpolarisiertem Wasserstoff). Allerdings können extrem tiefe Temperaturen in stark



verdünnten Gasen in einem metastabilen Zustand erreicht werden, wenn die Zeitdauer, die die Atome zur Bildung von Molekülen benötigen, wesentlich länger als die Zeitdauer ist, in der das Gas in das thermodynamische Gleichgewicht gelangt. Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung sind bei Stößen, die zur Bildung eines Moleküls führen, mindestens drei Stoßpartner notwendig, während die Thermalisierung der Impulszustände auch mit Zwei-Körper-Stößen möglich ist. Die Rate für thermalisierende Prozesse ist also direkt proportional zur Dichte des Gases, während die Rate für Verlustprozesse proportional zum Quadrat der Dichte ist; daher lässt sich durch ausreichende Verdünnung des Gases immer ein Regime erreichen, in dem Bose-Einstein Kondensate erzeugt werden können <sup>34</sup>.

Im folgenden werden die Auswirkungen atomarer Wechselwirkungen auf die Wellenfunktion eines Bose-Einstein Kondensats diskutiert.

Der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  in zweiter Quantisierung für ein System aus  $N$  Bosonen in einem externen Potential  $V_{trap}$  und unter Berücksichtigung der Zwei-Körper Wechselwirkungen über das Potential  $V(\vec{r}' - \vec{r})$  lautet [45]

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(\vec{r}) \right) \hat{\psi} d\vec{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\psi}' \hat{\psi} d\vec{r}' d\vec{r}. \quad (2.13)$$

Hierbei sind  $\hat{\psi}^\dagger = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t)$  und  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\vec{r}, t)$  die Operatoren zur Erzeugung und zur Vernichtung eines Bosons im Zustand  $\psi(\vec{r}, t)$ ; ( $\hat{\psi}' = \hat{\psi}'(\vec{r}', t)$ ). In einem Bose-Einstein Kondensat ist die Besetzung des Grundzustands des Systems,  $\psi_0(\vec{r}, t)$ , sehr hoch, und die Erzeugung oder Vernichtung eines einzelnen Bosons in diesem Zustand ändert die physikalische Situation praktisch nicht. Deshalb können in der verallgemeinerten Bogolubov-Beschreibung [46, 45] diese Operatoren in guter Näherung als Summe einer komplexen Grundzustandswellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t)$  und eines Operators  $\hat{\theta}(\vec{r}, t)$  geschrieben werden, dessen Erwartungswert klein gegenüber  $\Psi(\vec{r}, t)$  ist und der störungstheoretisch behandelt werden kann;

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) \approx \Psi(\vec{r}, t) + \hat{\theta}(\vec{r}, t). \quad (2.14)$$

Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung (siehe z.B. [38]) für den Operator  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  lautet mit dem Hamiltonoperator 2.13 [45]:

<sup>3</sup>Experimentelle Beschränkungen durch inelastische Zwei-Körper-Stöße, die – wie im Fall von Caesium [41] – für den Verlust der Atome aus der Magnetfalle sorgen, sind kein prinzipielles Problem und lassen sich z.B. durch rein optische Kühlung zur Bose-Einstein Kondensation [42] oder durch evaporative Kühlung in einer Dipolfalle umgehen.

<sup>4</sup>Für das Isotop <sup>87</sup>Rubidium beträgt die Rate für elastische Stöße,  $\Gamma_{el} = 32a_{sc}^2 n \sqrt{kT\pi/m} \approx 1.4 \times 10^{-11} \text{s}^{-1} \text{cm}^3 n \sqrt{T/[\mu\text{K}]}$  [43, 31], die inelastische Zwei-Körper-Stoßrate beträgt  $\Gamma_{dip} = G_{dip} n \approx 10^{-14} \text{s}^{-1} \text{cm}^3 n$  [44], und die Drei-Körper-Stoßrate beträgt  $\Gamma_{3b} = L_{3b} n^2 \approx 4 \times 10^{-29} \text{s}^{-1} \text{cm}^6 n^2$  [28]. Bei Temperaturen im Mikrokkelvin-Bereich und Dichten  $< 10^{14} \text{cm}^{-3}$  sind elastische Zwei-Körper-Stöße daher die bei weitem wichtigsten interatomaren Prozesse; Drei-Körper-Stöße treten um einen Faktor  $> 10^3$  seltener auf.

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t) &= \frac{\delta \hat{H}(\vec{r}, t)}{\delta \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t)} \\
&= \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') d\vec{r}' \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t) .
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Unter der Annahme, dass die interatomaren Abstände groß gegenüber der Länge sind, auf der sich das Wechselwirkungspotential  $V(\vec{r}' - \vec{r})$  signifikant ändert <sup>5</sup>, können die Operatoren  $\hat{\theta}(\vec{r}, t)$  in Gl. 2.15 vernachlässigt werden [35], und es ergibt sich mit  $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)$  die Gross-Pitaevskii Gleichung [47, 48]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\vec{r}) + U_0 |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) . \tag{2.16}$$

Das Wechselwirkungspotential (“*mean-field*”-Potential) geht hier über die Kopplungskonstante  $U_0$  ein, die im Fall ultrakalter Gase, d.h. bei dominierender s-Wellen Streuung mit der Streulänge  $a_{sc}$ , wie folgt geschrieben werden kann <sup>6</sup>:

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a_{sc}}{m} . \tag{2.17}$$

Die Gross-Pitaevskii Gleichung 2.16, eine nichtlineare Schrödingergleichung, beschreibt – in einer in den experimentell relevanten Parameterbereichen sehr guten Näherung [35, 45, 49] – die Zeitentwicklung der Grundzustandswellenfunktion.

Von entscheidender Bedeutung für das Verhalten von Bose-Einstein Kondensaten ist das Vorzeichen der Streulänge  $a_{sc}$ . Für eine negative Streulänge bzw. eine *attraktive* Wechselwirkung, wie z.B. für das Isotop <sup>7</sup>Lithium, wirkt der nichtlineare Term in der Gross-Pitaevskii Gleichung,  $U_0 |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ , destabilisierend, weil er in der Zeitentwicklung der Wellenfunktion für eine Dichteerhöhung sorgt, die zum Kollaps des Kondensats durch Drei-Körper-Stöße führt. Die Kondensate im Experiment mit <sup>7</sup>Lithium an der *Rice University* sind durch diesen Effekt auf Teilchenzahlen  $N_0 < \mathcal{O}(10^3)$  beschränkt [50] <sup>7</sup>. Analog hat das *mean-field*-Potential bei *repulsiven* Wechselwirkungen eine stabilisierende Wirkung, da es bei großen Teilchenzahlen im Kondensat verhindert, dass sich zu hohe Dichten aufbauen können.

<sup>5</sup>Bei typischen atomaren Dichten in Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation liegt der interatomare Abstand im Bereich von  $\mu\text{m}$ , während sich das Wechselwirkungspotential im Bereich der s-Wellen-Streulänge  $a_{sc}$  ändert.

<sup>6</sup>Für das in den Experimenten dieser Arbeit verwandte Element <sup>87</sup>Rubidium ergibt sich mit der Masse  $m = 1.45 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  und der Streulänge  $a_{sc} = 5.77 \text{ nm}$  [43] eine Kopplungskonstante von  $U_0/\hbar \approx 5.40 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^3/\text{s}$ .

<sup>7</sup>Durch die Ausnutzung magnetfeldinduzierter Feshbach-Resonanzen ist es möglich, den Betrag von  $a_{sc}$  um Größenordnungen zu ändern und das Vorzeichen von  $a_{sc}$  umzukehren [51, 52]. Dies ermöglichte kürzlich die Beobachtung langlebiger Bose-Einstein Kondensate aus <sup>85</sup>Rubidium mit bis zu  $N = 10^4$  Atomen [53].

Das Vorzeichen von  $a_{sc}$  hat auch entscheidenden Einfluss auf die Eigenschaften von Solitonenlösungen zu Gl. 2.16; so treten in Bose-Einstein Kondensaten aus Atomen mit attraktiven Wechselwirkungen nur „helle“ Solitonen, bei solchen mit repulsiven Wechselwirkungen nur „dunkle“ Solitonen auf (siehe Kapitel 4.1).

Mit dem Separationsansatz  $\Psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp(-i\mu t / \hbar)$  ergibt sich aus Gl. 2.16 die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung:

$$\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) + U_0 \phi^2(\vec{r}) \right) \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}) . \quad (2.18)$$

Das chemische Potential  $\mu$  bestimmt hier die Entwicklung der ortsunabhängigen Phase; die Terme der linken Seite der Gleichung entsprechen der kinetischen Energie des Impulsspektrums der Wellenfunktion („Quantendruck“), der potentiellen Energie im Fallenpotential und der Wechselwirkungsenergie auf ein Atom im effektiven Potential der umgebenden Atomwolke mit der Dichteverteilung  $\phi^2(\vec{r})$ .

Aus den Beiträgen dieser nichtlinearen Gleichung kann die „Ausheillänge“,  $l_0$  („*healing length*“), eine charakteristische Länge wechselwirkender Bose-Einstein Kondensate, ermittelt werden: Wenn die Dichte aufgrund einer Randbedingung oder einer Singularität in der Wellenfunktion an einem Ort verschwindet, so erhöht sich die kinetische Energie des Kondensats, je *schneller* die Dichte wieder auf den Wert  $n$  ansteigt. Andererseits erhöht sich die Wechselwirkungsenergie im Kondensat, je *langsamer* die Dichte ansteigt, da die Atome so ein kleineres effektives Volumen zur Verfügung haben. Das lokale Minimum der Gesamtenergie des Kondensats ist gegeben, wenn Dichteänderungen auf der Längenskala von  $l_0$  „ausheilen“. Die Ausheillänge erhält man dabei durch Gleichsetzen der kinetischen und der Wechselwirkungsenergie:

$$\frac{\hbar^2}{2ml_0^2} = U_0 n \quad \rightarrow \quad l_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_{sc} n}} . \quad (2.19)$$

Mit steigender Teilchenzahl im Kondensat wächst die Wechselwirkungsenergie; dies führt (für  $a_{sc} > 0$ ) zu einer Expansion der atomaren Wolke in Regionen höheren Fallenpotentials. Hierbei nimmt der Quantendruck ab, wie auch direkt aus der Heisenbergschen Unschärferelation gefolgert werden kann, denn mit räumlicher Ausdehnung der Wellenfunktion muss die Impulsunschärfe abnehmen. Dies wurde in einem Experiment, in dem das Impulsspektrum eines Kondensats ermittelt wurde, bestätigt [30].

Im Fall repulsiver Wechselwirkungen und sehr hoher Teilchenzahlen ( $Na_{sc}/a_{ho} \gg 1$ ), der in den meisten experimentellen Realisierungen vorliegt, kann für die Berechnung des Grundzustands von Gleichung 2.18 der Term kinetischer Energie vernachlässigt werden (*Thomas-Fermi Regime*). Dies führt zu einer einfachen analytischen Lösung von Gl. 2.18, und es ergibt sich die Dichte  $n(\vec{r})$ :

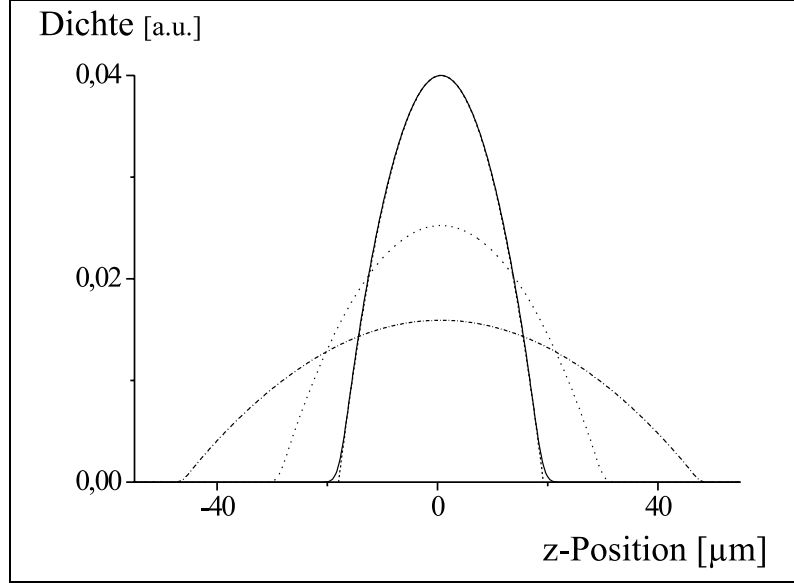


Abbildung 2.2: Ergebnisse numerischer Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung zur Dichteverteilung in einem  $^{87}\text{Rubidium}$ -BEC für verschiedene Teilchenzahlen (durchgezogene Kurve:  $N = 10^3$ , gepunktete Kurve:  $N = 10^4$ , strich-gepunktete Kurve:  $N = 10^5$ ). Die Fallenfrequenzen sind  $\omega_z = 2\pi \cdot 14 \text{ Hz}$  und  $\omega_{ho} = 2\pi \cdot 130 \text{ Hz}$  (die Dichten sind jeweils auf 1 normiert). Die gestrichelte Kurve entspricht dem Dichteverlauf nach der Thomas-Fermi Näherung (Gleichung 2.20); für  $N = 10^3$  sind Abweichungen nur in den Flanken der Verteilung zu erkennen. Für höhere Teilchenzahlen kommt der Dichteverlauf dem einer invertierten Parabel immer näher. Die numerische Simulation wird in Kapitel 4.3.3 näher beschrieben.

$$n(\vec{r}) = \phi^2(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu - V_{trap}(\vec{r})}{U_0} & \text{für } \mu - V_{trap} > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Dieses Dichteprofil entspricht in jeder Raumrichtung einer invertierten Parabel, die sich bis zu den durch  $V_{trap}(R_i) = \mu$ ,  $i = x, y, z$  definierten Radien  $R_i$  erstreckt. In Abb. 2.2 sind Dichteverläufe für verschiedene Teilchenzahlen, die aus numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung ermittelt wurden, dargestellt. Der Vergleich der numerischen Lösungen mit dem Dichteprofil in der Thomas-Fermi Näherung zeigt, dass diese für experimentell zugängliche Bereiche eine sehr gute Beschreibung darstellt.

Aus Gl. 2.20 und der Normalisationsbedingung  $\int d\vec{r} n(\vec{r}) = N$  erhält man eine Beziehung zwischen dem chemischen Potential und der Teilchenzahl:

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{ho}}{2} \left( \frac{15Na_{sc}}{a_{ho}} \right)^{2/5}. \quad (2.21)$$

Die Radien  $R_i$  ergeben sich hiermit zu

$$R_i = a_{ho} \frac{\omega_{ho}}{\omega_i} \left( \frac{15Na_{sc}}{a_{ho}} \right)^{1/5}, \quad (2.22)$$

und bei der Kenntnis der fundamentalen Frequenzen des Fallenpotentials lässt sich so aus der Messung von  $R_i$  die Zahl der Atome im Kondensat bestimmen. Die maximale Teilchendichte im Kondensat folgt aus Gl. 2.20 zu

$$n(0) = \frac{\mu}{U_0} = \frac{m\omega_{ho}}{8\pi\hbar a_{sc}} \left( \frac{15Na_{sc}}{a_{ho}} \right)^{2/5}. \quad (2.23)$$

In einem in zwei Richtungen stark und in der dritten Richtung schwach harmonisch einschließenden Potential, wie es in typischen in BEC-Experimenten verwendeten Fallen (siehe Kap. 2.2) gegeben ist,  $\omega_{\perp} \equiv \omega_x = \omega_y \gg \omega_z$ , nimmt das Bose-Einstein Kondensat eine sogenannte „Zigarrenform“ an. Das Aspektverhältnis der Achsen ist dabei durch das Verhältnis der Fallenfrequenzen,  $\lambda$ , gegeben:

$$\frac{R_{\perp}}{R_z} = \frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} \equiv \lambda. \quad (2.24)$$

Anschaulich gesehen kompensiert im Thomas-Fermi Regime die Wechselwirkungsenergie an jedem Ort die potentielle Energie im Fallenpotential. Die Atome befinden sich bis auf einen Randbereich überall in einem effektiv „flachen“ Potential. Wird das Fallenpotential nichtadiabatisch ausgeschaltet, so ändert sich das effektive Potential zu dem invertierten Potential der Falle [54]. Die Wechselwirkungsenergie wird so in kinetische Energie in Richtung der Gradienten des Fallenpotentials umgesetzt, und aus einem anisotropen Fallenpotential folgt eine anisotrope Geschwindigkeitsverteilung. Dies steht im krassen Gegensatz zur Expansion einer thermischen Wolke aus einem beliebigen Potential, die isotrop erfolgen muss, wie im Gleichverteilungssatz formuliert wird. Die Änderung der räumlichen Verteilung des expandierenden Gases von einer prolaten in eine oblate Form ist daher eine weitere experimentelle Signatur der Bose-Einstein Kondensation (siehe Abb. 2.9).

Im Gegensatz zum Bose-Einstein Kondensat im Thomas-Fermi Regime beträgt das Aspektverhältnis eines nicht wechselwirkenden Bose-Einstein Kondensats in einer anisotropen harmonischen Falle  $a_{\perp}/a_z = \sqrt{\lambda}$  (siehe Gl. 2.12). Entsprechend dieser räumlichen Verteilung würde das Kondensat mit einer Impulsverteilung  $p_z/p_{\perp} = \sqrt{\lambda}$  expandieren.

Bose-Einstein Kondensate in verdünnten Gasen aus Alkali-Atomen werden in den typischen experimentellen Parameterbereichen sehr gut durch die Gross-Pitaevskii Gleichung beschrieben, wichtige Größen können mit ihrer Hilfe quantitativ bestimmt werden. Damit steht ein machtvolles Instrument zur theoretischen Beschreibung der Experimente und für Vorhersagen über das Verhalten von Bose-Einstein Kondensaten zur Verfügung.

## 2.2 Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten

Eine Kombination verschiedener Kühl- und Kompressionsmethoden, deren Verlauf an die jeweilige Phasenraumdichte des Gases angepasst ist, macht es möglich, ein Gas aus der „klassischen Welt“ einer Maxwell-Boltzmann Verteilung in die „Quantenwelt“ der Bose-Einstein Kondensation zu überführen.

Um ein Bose-Einstein Kondensat in einem verdünnten atomaren Gas zu erzeugen, wird das Ensemble in einem einschließenden Potential gespeichert und auf so tiefe Temperaturen gekühlt und zu so hohen Dichten komprimiert, dass die thermische de Broglie Wellenlänge in die Größenordnung der interatomaren Abstände gelangt (Gleichung 2.9). Während eines typischen BEC-Experiments wird die Phasenraumdichte des Gases um etwa zwanzig Größenordnungen erhöht (siehe Tabelle 2.1). Dies wird durch die Speicherung von Atomen in magnetischen oder optischen Feldern innerhalb einer Ultrahochvakuum-Apparatur ermöglicht, da hierbei jeder direkte Kontakt zu makroskopischer Materie vermieden werden kann – das Gas wird thermisch von der Umwelt entkoppelt.

Die Erhöhung der Phasenraumdichte des Gases erfolgt in allen bisher realisierten Experimenten durch eine Kombination verschiedener Kühl- und Kompressionsmethoden, deren Ablauf an die jeweilige vorhandene Dichte und Temperatur des Gases angepasst ist.

Gemeinsam ist allen bisherigen Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation die forcierte Verdampfungskühlung des in einer Magnetfalle gespeicherten Ensembles als der entscheidende Schritt, um von Phasenraumdichten der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-6})$  bis zum quanten-entarteten Regime vorzudringen <sup>8</sup>. Die Präparation vor dem Einfang in einer Magnetfalle findet im Fall von Gasen aus Alkali-Atomen (<sup>87,85</sup>Rubidium, Natrium, Lithium) mit Hilfe der Laserkühlung statt. Gase aus Wasserstoffatomen können dagegen zur Zeit nur mit herkömmlichen kryogenischen Methoden vorgekühlt werden [37]. Die verschiedenen ex-

---

<sup>8</sup>Auch in optischen Dipolfallen wurden Kondensate produziert (allerdings mit der Verdampfungskühlung in der Magnetfalle als Zwischenschritt) [55]; Schemata zum Erreichen der Bose-Einstein Kondensation ausschließlich mit Methoden der Laserkühlung wurden vorgeschlagen [42].

Phasenraumdichte in den Schritten eines BEC-Experiments (typische Werte des Hannoveraner Experiments)			
	Temperatur	Dichte [cm <sup>-3</sup> ]	Phasenraumdichte
Atomofen	420 K	10 <sup>12</sup>	10 <sup>-15</sup>
Laserkühlung	50 $\mu$ K	10 <sup>11</sup>	10 <sup>-6</sup>
Verdampfungskühlung	600 nK	7 · 10 <sup>13</sup>	1
Kondensationsprozess	$T < T_c$	10 <sup>14</sup>	10 <sup>5</sup>

Tabelle 2.1: Erhöhung der Phasenraumdichte in den verschiedenen Stufen des BEC-Experimentes.

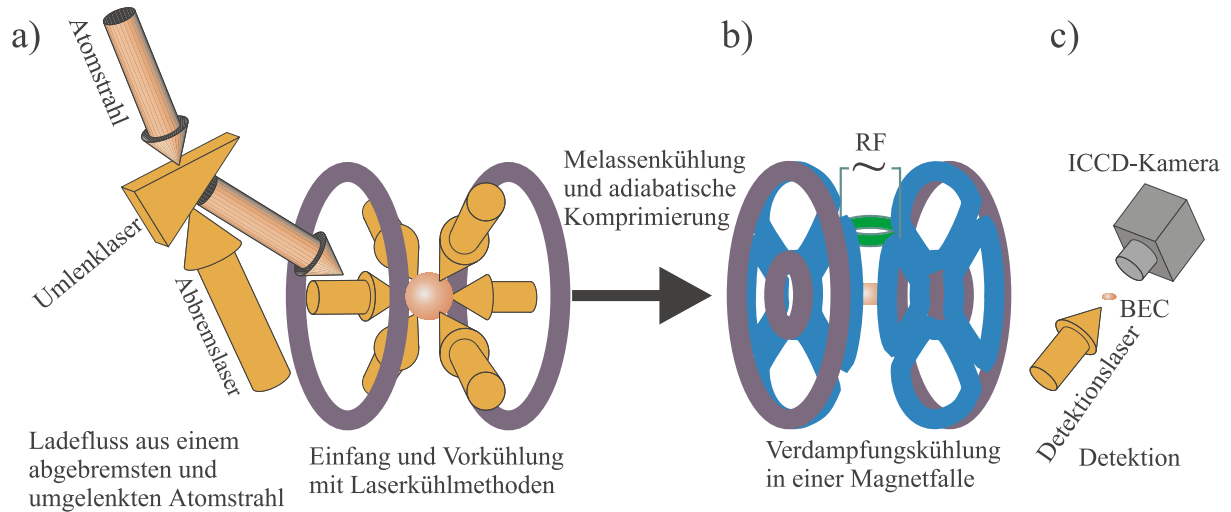


Abbildung 2.3: Schematischer Ablauf des BEC-Experiments: die magnetooptische Falle (a), die magnetische Falle (b) und das erzeugte Kondensat (c) befinden sich am gleichen Ort. Der zeitliche Ablauf ist in Tabelle 2.2 dargelegt.

perimentellen Realisierungen der Bose-Einstein Kondensation in Alkali-Gasen unterscheiden sich hauptsächlich in der Wahl der atomaren Spezies, in den Details der Präparation der atomaren Wolke, die in die Magnetfalle geladen wird, und in den Parametern der Magnetfalle. Eine Übersicht über die verschiedenen experimentellen Methoden, die in den z. Zt. weltweit etwa 25 Kondensate produzierenden Gruppen verwandt werden, findet sich in den Übersichtsartikeln [19, 20, 17].

Im Rahmen der Arbeit [31] und der vorliegenden Arbeit wurde ein Experiment zur Bose-Einstein Kondensation von  $^{87}\text{Rubidium}$  konzipiert und umgesetzt. Der experimentelle Aufbau, der auf der Kondensation von Atomen in dem stark einschließenden Potential einer statischen Magnetfalle des *Ioffe*-Typs beruht, kennzeichnet sich durch eine hohe Stabilität und eine hohe Taktrate der Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten aus. Hierdurch wird eine Vielzahl von Untersuchungen ermöglicht: Im Rahmen des Projekts wurden u.a. atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten, Experimente mit aus Bose-Einstein Kondensaten ausgekoppelten Atomen („Atomlaser“) und fundamentale Untersuchungen zu topologischen Texturen in Bose-Einstein Kondensaten durchgeführt. Atominterferometrische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten befinden sich derzeit im Aufbau [56].

Die wesentlichen Aspekte der Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten in diesem Experiment wurden bereits in der Doktorarbeit von K. Bongs dargelegt [31]. Verschiedene Diplomarbeiten, die im Rahmen des BEC-Experiments in Hannover durchgeführt wurden, befassen sich mit Aspekten der Laserkühlung [57], der Konzeption sowie der experimentellen Realisierung von Magnetfallen für neutrale Atome [58, 59], numerischen Simulationen der Verdampfungskühlung [60], der Detektion von Bose-Einstein Kondensaten [61] und mit

Zeitliche Abfolge im BEC-Experiment (typische Werte des Hannoveraner Experiments)		
Laserkühlung	Chirp-Kühlung des Atomstrahls	10 s
	Umlenkung des Atomstrahls	
	Einfang der Atome in der MOT	
	Kompression der MOT	
	Polarisationsgradientenkühlung	3 ms
Ensembletransfer	Spinpolarisation	200 $\mu$ s
Magnetische Speicherung	adiabatische Kompression	1 s
	Verdampfungskühlung	15 s
Abschalten der Falle und Detektion des BEC		200 $\mu$ s
Gesamtdauer des Experiments		$\sim$ 25 s

Tabelle 2.2: Zeitdauern der einzelnen Schritte auf dem Weg zur Bose-Einstein Kondensation.

Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten [62, 63, 56].

In den nächsten Abschnitten folgt daher nur eine kurze Zusammenfassung der im Hannoveraner Experiment unternommenen Schritte zur Kühlung eines Rubidiumgases bis zur Bose-Einstein Kondensation. Zunächst wird das zeitliche Taktschema des Experiments erläutert, danach werden die einzelnen Schritte des Experiments vorgestellt und schließlich werden experimentelle Ergebnisse zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten diskutiert.

### 2.2.1 Die Konzeption eines BEC-Experiments

Das im Experiment verwandte Element ist  $^{87}$ Rubidium. Dieses Isotop besitzt einen ganzzahligen Gesamtspin, ist also bosonisch und genügt der Bose-Einstein Statistik. Es besitzt im (elektronischen) Grundzustand ein magnetisches Moment, sodass es in einer Magnetfalle gespeichert werden kann. Außerdem ist  $^{87}$ Rubidium ein sehr geeignetes Element für die Laserkühlung und für die Verdampfungskühlung.

Die Bose-Einstein Kondensation von  $^{87}$ Rubidium findet in dem hier beschriebenen Experiment durch die Kombination von verschiedenen Methoden der Laserkühlung und der Verdampfungskühlung in einer statischen Magnetfalle (“cloverleaf“-Typ [64]) statt. Die unterschiedlichen Methoden sind in Abb. 2.3 dargestellt. Zunächst werden Atome in einer magnetooptischen Falle gefangen, bis ein Ensemble mit etwa  $10^9$  Atomen angesammelt ist. Um eine schnelle Füllung der Falle bei extrem niedrigem Hintergrundgasdruck,  $\mathcal{O}(10^{-11}$  mbar), zu gewährleisten, wird die Falle quasikontinuierlich aus einem langsamen Atomstrahl geladen. Dieser wird mit Hilfe der “chirp“-Kühlung aus einem thermischen Atomstrahl erzeugt. Eine Umlenkung des langsamen Strahls sorgt für die Verbesserung



des Hintergrundgasdruckes im Bereich der Magnetfalle.

In einer schnellen Abfolge wird die Atomwolke anschließend räumlich komprimiert und verschoben, danach mit Hilfe der Polarisationsgradientenkühlung bis zu einer Temperatur von ca.  $50\ \mu\text{K}$  gekühlt. Anschließend werden die Atome durch optisches Pumpen in den Hyperfeinzustand  $|F = 2, m_F = +2\rangle$  transferiert. Die so bei einer Phasenraumdichte von  $\rho_{ps} \approx 10^{-6}$  präparierte Atomwolke wird in einer magnetostatischen Falle gefangen. Durch eine Kompression der Falle wird ein für die evaporative Kühlung günstiger Parameterbereich, in dem die elastischen Zwei-Körperprozesse die inelastischen Zwei-Körperprozesse und die Drei-Körperprozesse weit überwiegen, eingestellt. Aufgrund der stark einschließenden Eigenschaften der verwandten Magnetfalle lässt sich die beschleunigte RF-induzierte Verdampfungskühlung bis zur Bose-Einstein Kondensation in der im Vergleich mit anderen Experimenten sehr kurzen Zeit von 10-15 s durchführen [31]. Die so erzeugten Kondensate besitzen Teilchenzahlen  $N_0 = \mathcal{O}(10^5)$  und Temperaturen  $T = \mathcal{O}(200\ \text{nK})$ , ihre Dichteverteilung kann durch ortsaufgelöste Absorptionsmessungen und mit Hilfe von Dunkelfeld- und Phasenkontrastverfahren ermittelt werden. Die Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat lässt sich mit Hilfe von Ramanübergängen zwischen verschiedenen Impulszuständen messen (Bragg-Spektroskopie [65, 30]). Die Lebensdauer des Kondensats von  $\tau > 1\ \text{s}$  erlaubt es, eine Vielzahl von Experimenten durchzuführen. Die typischen Zeitdauern der einzelnen Schritte des Experiments sind in Tabelle 2.2 dargestellt. Mit einer Repetitionsrate von zwei bis drei Kondensaten pro Minute gehört dieses Experiment im internationalen Vergleich derzeit zu den schnellsten und ermöglicht so viele systematische Messungen bei hoher Stabilität.

Im folgenden werden die experimentellen Schritte vom thermischen Atomstrahl bis zur Detektion des Bose-Einstein Kondensats im einzelnen kurz erläutert.

## 2.2.2 Laserkühlung neutraler Atome

Die Laserkühlung neutraler Atome beruht auf den mechanischen Effekten bei der Wechselwirkung von Licht mit Materie. Ausführliche Diskussionen finden sich z.B. in [66, 67].

Wenn bei Wechselwirkungen eines Lichtfeldes (Frequenz  $\omega$ , Wellenvektor  $\vec{k}$ ) mit Materie die Energie  $E = \hbar\omega$  ausgetauscht wird, so wird immer auch ein Impuls  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  übertragen<sup>9</sup>. Hieraus ergibt sich die Spontankraft als die auf ein Atom wirkende Kraft, die zur Absorption

---

<sup>9</sup>Die mechanischen Effekte bei diesem Impulsübertrag lassen sich, je nachdem, ob der Austausch kohärent oder inkohärent geschieht, in zwei Kategorien unterteilen: die *Spontankraft* wirkt bei Streuprozessen, die spontane Emissionen beinhalten; die *Dipolkraft* begleitet Prozesse, in denen Photonen nur induziert absorbiert und emittiert werden. Bei spontanen Prozessen ist die Dissipation von Energie möglich, die Laserkühlung beruht daher auf der Spontankraft; die Dipolkraft eignet sich dagegen zur kohärenten Manipulation atomarer Ensembles.

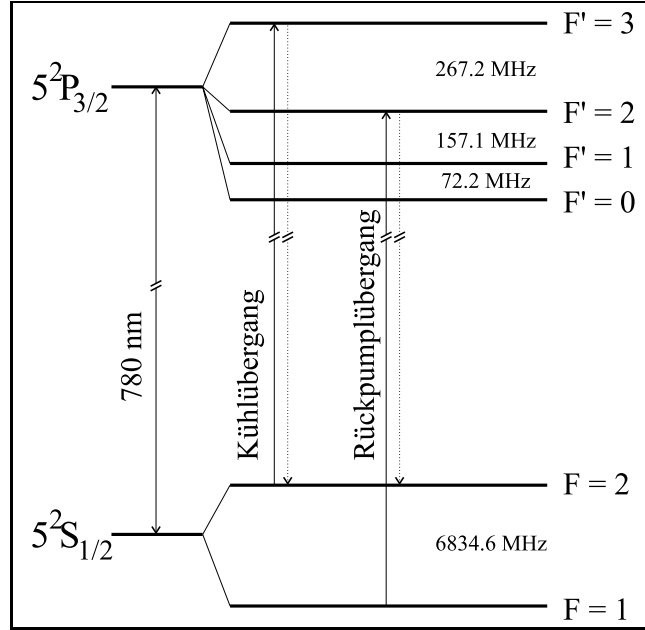


Abbildung 2.4: Ausschnitt aus dem Termschema von  $^{87}\text{Rb}$  mit der Aufspaltung der Linien der Hyperfeinstruktur in MHz.

und folgenden spontanen Emission eines Photons aus einem gerichteten Lichtfeld korrespondiert. Während die Absorptionen immer gerichtet erfolgen, sind die spontanen Emissionen isotrop verteilt, übertragen im Mittel vieler Prozesse also keinen Impuls. Die gemittelte Kraft (Spontankraft) auf ein sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegendes Zwei-Niveau-Atom in einem gegenüber der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  um  $\delta = \omega_L - \omega_0$  verstimmt Lichtfeld der Intensität  $I$  beträgt

$$\vec{F}(\vec{v}) = \frac{\hbar \vec{k}}{2\tau} \frac{I/I_0}{1 + I/I_0 + [2\tau(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})]^2}, \quad (2.25)$$

mit der Sättigungsintensität  $I_0$  und der Lebensdauer  $\tau = \Gamma^{-1}$  des atomaren Übergangs. Diese Kraft ist maximal, wenn die Verstimmung des Lichtfeldes gerade die Dopplerverschiebung kompensiert,  $(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}) = 0$ . Über die Regelung der Frequenz der (in Größenordnungen von  $\Gamma$  schmalbandigen) Laserquellen lassen sich also gezielt bestimmte Geschwindigkeitsklassen in atomaren Ensembles ansprechen. Bei hohen Lichtintensitäten geht die Spontankraft allerdings in Sättigung, weil die maximale Rate der Impulsüberträge durch die Linienbreite des Übergangs,  $\Gamma$ , begrenzt ist.

Die relativ einfache elektronische Struktur der Alkali-Atome macht diese zu geeigneten Kandidaten für die Laserkühlung; sie besitzen erstens schnelle Übergänge zwischen Grundzustand und erstem elektronisch angeregtem Übergang mit Wellenlängen in Bereichen, die mit Lasern hoher Ausgangsleistung erreichbar sind. Zweitens lassen sich durch optisches

Pumpen quasi-geschlossene Übergänge erreichen. Damit können bei hoher Spontankraft die atomaren Impulse manipuliert werden, ohne dass die Atome in Zustände gelangen, die nicht an das Lichtfeld koppeln.

Abb. 2.4 zeigt einen Ausschnitt des Energieniveauschemas von  $^{87}\text{Rb}$ . Die Manipulation der Atome mit Hilfe der Spontankraft geschieht auf dem Übergang  $(5^2S_{1/2}, F = 2) \rightarrow (5^2P_{3/2}, F' = 3)$ . Abhängig von der Frequenzverstimmung des Lichtfeldes gegenüber diesem Übergang gibt es eine Wahrscheinlichkeit der Anregung in das  $(F' = 2)$ -Niveau, von dem aus die Atome in das  $(F = 1)$ -Niveau des Grundzustands zerfallen können. Deshalb ist es notwendig, die Atome aus diesem Niveau optisch in das  $(F = 2)$ -Niveau „zurückzupumpen“.

Mit der Masse  $m = 1.45 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  und der Laserwellenlänge  $780 \text{ nm}$  ergibt sich eine Geschwindigkeitsänderung des Atoms pro absorbierten Photon von  $v_{rec} = 5.83 \text{ mm/s}$ . Um Atome von durchschnittlichen Geschwindigkeiten in thermischen Ensembles nahezu zum Ruhen zu bringen, sind also  $\mathcal{O}(10^4)$  Prozesse notwendig <sup>10</sup>.

Die in dem einfachen Modell eines Zwei-Niveau-Atoms erreichbaren Temperaturen sind durch die mit spontanen Emissionen verbundenen zufälligen Sprünge im Impulsraum nach unten begrenzt. Die Rate dieser Sprünge ist proportional zur Linienbreite; bei niedrigen Laserintensitäten und der optimalen Laserverstimmung von  $\delta_L = \Gamma/2$ , die über die Dopp- lerverschiebung zur Dämpfung der atomaren Bewegung führt, findet man für die Minimal- temperatur  $T_D$  dieses Modells den Wert  $kT_D = \hbar\Gamma/2$ .

Durch die komplexere Struktur atomarer Zustände im realen Fall sind weitere Kühlme- chanismen möglich, mit denen sich wesentlich tiefere Temperaturen erreichen lassen [68]. Mit Hilfe der Polarisationsgradientenkühlung lassen sich Temperaturen  $T$  erreichen, die im wesentlichen durch den Impuls eines einzelnen emittierten Photons begrenzt sind:  $kT_{rec} = (\hbar k)^2 / 2m$ . Die im BEC-Experiment vorhandenen atomaren Dichten von bis zu  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$  begrenzen hier die mit der Polarisationsgradientenkühlung erreichbare Tempera- tur auf  $T = \mathcal{O}(10 - 100T_{rec})$ .

## Die Magnetooptische Falle

Um ein lasergekühltes atomares Ensemble in einem Raumgebiet zu konzentrieren und ho- he Phasenraumdichten zu erreichen, ist es notwendig, ein ortsabhängiges Kraftfeld zu be- nutzen. Die magnetooptische Falle (MOT) [69], die in vielen physikalischen Laboratorien und inzwischen sogar in physikalischen Studentenpraktika etabliert ist [70], beruht darauf,

---

<sup>10</sup>Da die Lebensdauer des angeregten  $(5^2P_{3/2})$ -Niveaus nur  $\tau = 27 \text{ ns}$  beträgt, ist gegenüber der so er- reichbaren Beschleunigung von  $a_{max} = 1.1 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung zu vernachlässigen; die Atome können in einer Zeit  $\Delta t$  zum Ruhen gebracht werden, in der sie im Schwerfeld der Erde nur um Mikrometer fallen.

dass die auf Atome wirkende Spontankraft 2.25 in einem inhomogenen Magnetfeld durch die lokale Zeeman-Verschiebung der atomaren Niveaus ortsabhängig wird. Sie besteht im hier beschriebenen Experiment aus einer Anordnung aus sechs unabhängigen, zirkular polarisierten Laserstrahlen, die sich im Zentrum eines Quadrupolmagnetfeldes treffen (siehe Abb. 2.5). Für kleine atomare Geschwindigkeiten entspricht die Bewegung eines Atoms im Lichtfeld bei geeignet gewählten Parametern von Laserintensität ( $\mathcal{O}(I_{sat})$ ), -verstimmung ( $\delta_l = \mathcal{O}(\Gamma)$ ) und Magnetfeldgradient ( $\mathcal{O}(1\text{G/cm})$ ) der eines überkritisch gedämpften harmonischen Oszillators [57]. Die maximale Geschwindigkeit, bei der Atome, die in den Überlappbereich der Laserstrahlen geraten, eingefangen werden, ist außer durch diese Parameter im wesentlichen durch die Größe des Einfangvolumens gegeben. Mit den im Experiment verwandten Parametern (Strahldurchmesser  $d \approx 22\text{ mm}$ , Intensität  $I \approx 14\text{ mW/cm}^2$ ,  $\partial B/\partial x_i \approx 1\text{ G/cm}$ , Laserverstimmung  $\delta_l \approx -2.5\Gamma$ ) ergibt sich eine maximale Einfanggeschwindigkeit von  $v_{max} = 30 - 40\text{ m/s}$ <sup>11</sup>.

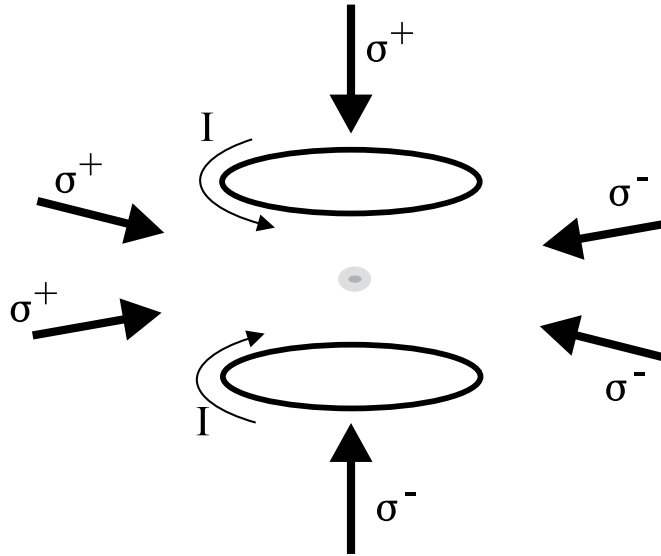


Abbildung 2.5: Schematischer Aufbau einer magneto-optischen Falle: Zwei gegensinnig durchflossene Spulen erzeugen ein Quadrupolmagnetfeld; sechs zirkular polarisierte Laserstrahlen schneiden sich im magnetischen Nullpunkt.

### Abbremsung und Umlenkung des Atomstrahls

Um die magneto-optische Falle bei einem niedrigen Hintergrundgasdruck im Bereich  $p = \mathcal{O}(10^{-11}\text{ mbar})$ <sup>12</sup> schnell laden zu können, wird ein abgebremster und umgelenkter Atomstrahl genutzt.

<sup>11</sup>Die maximale Einfanggeschwindigkeit lässt sich über die Parameter der Abbremsung des Atomstrahls direkt messen.

<sup>12</sup>Ein niedriger Hintergrundgasdruck ist für hohe Speicherzeiten in der magnetischen Falle notwendig.

Der Atomstrahl wird in einem Atomofen, der bei einer Temperatur von  $T \approx 420$  K betrieben wird, generiert und mit Hilfe von Blenden geformt. Auf einer Strecke von 70 cm wird der Strahl mit der Chirpkühlung [71] auf Geschwindigkeiten von ca. 30 m/s, also in den Einfangbereich der MOT, abgebremst.

Die Abbremsung erfolgt über die Spontankraft (Gl. 2.25), die ein dem Atomstrahl entgegengerichteter Laserstrahl auf die Atome ausübt. Die sich beim Abbremsen ändernde effektive Verstimmung der Atome wird durch eine zeitliche Änderung der Kühl- und Rückpumplaser-Frequenz kompensiert; innerhalb von 3-4 ms werden die Laserfrequenzen mit Hilfe eines elektrooptischen Modulators linear um etwa 500 MHz verstimmt (siehe Abb. B.1). Durch periodische Wiederholung wird ein quasikontinuierlicher Fluss langsamer Atome von  $Q_{Strahl} = 10^8 \dots 10^9 \text{ s}^{-1}$  erreicht [31].

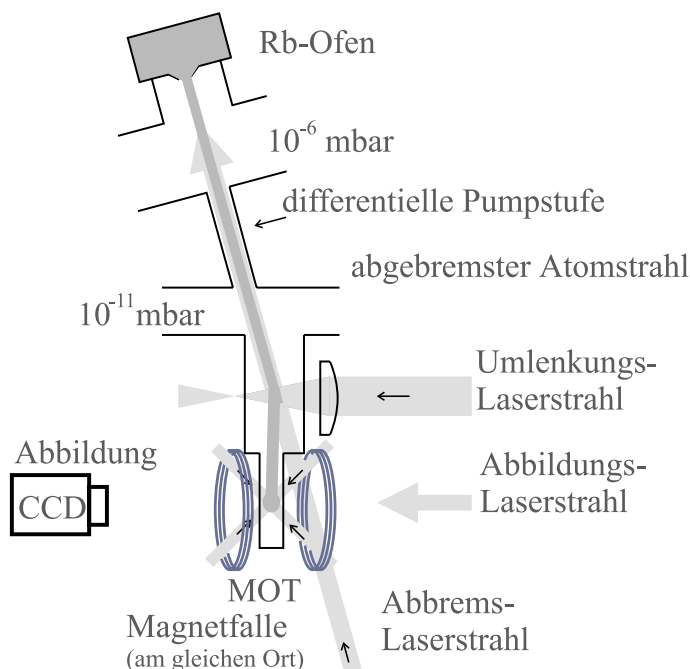


Abbildung 2.6: Schematischer Aufbau des Experiments zur Bose-Einstein Kondensation.

Um den Hintergrundgasdruck am Ort der Speicherung der Atome besonders niedrig zu halten, wird eine zusätzliche Umlenkung des langsamen Anteils des Atomstrahls vorgenommen [72] (siehe Abb. 2.6). Die Umlenkung um einen Winkel von ca.  $14^\circ$  erfolgt mit Hilfe eines zylindrisch fokussierten Laserfeldes mit den Kühl- und Rückpump-Frequenzen, dessen Wellenvektoren senkrecht zur Bewegungsrichtung der auf Kreisbahnen umgelenkten Atome stehen. Dadurch gelangen nur die langsamen, abgebremsten Atome aus dem Atomstrahl in den unteren Bereich der UHV-Apparatur, während der nicht abgebremste Anteil des Atomstrahls (u.a. die Atome des Isotops  $^{85}\text{Rb}$ , deren Anteil ca. 72% beträgt) an einer Zwischenebene der Apparatur abgehalten wird.

### 2.2.3 Magnetische Speicherung neutraler Atome

Das zeitunabhängige Potential einer Magnetfalle erlaubt es einer gespeicherten atomaren Wolke, durch Thermalisierungsprozesse in ein thermodynamisches Gleichgewicht zu gelangen. Dies macht den Einsatz der Verdampfungskühlung möglich, mit der die Bose-Einstein Kondensation erreicht werden kann.

Die Energieverschiebung  $E_{MF}$ , die ein Atom, das ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  besitzt, in einem magnetischen Feld  $\vec{B}$  erfährt, beträgt

$$E_{MF} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} . \quad (2.26)$$

Kann das magnetische Moment des Atoms dem Magnetfeld adiabatisch folgen (d.h., dass die Larmorfrequenz groß gegenüber der relativen zeitlichen Änderung des Magnetfeldes ist, siehe z.B. [59]), so gilt für kleine magnetische Feldstärken das Potential

$$U_{MF}(\vec{r}) = g_F m_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})| , \quad (2.27)$$

mit dem Landé-Faktor  $g_F$  des atomaren Hyperfeinstrukturniveaus  $|F, m_F\rangle$  und dem Bohrschen Magneton  $\mu_B$ . In dreidimensionalen Potentialminima  $U_{MF}$  lassen sich Atome fangen, wenn deren kinetische Energie nicht zum Verlassen der Potentialmulde ausreicht.

Da sich im freien Raum keine statischen 3D Magnetfeldmaxima erzeugen lassen („Wing-Theorem“) [73], können nur Atome, für die  $g_F m_F > 0$  gilt („*low field seeker*“), gespeichert werden. Für den elektronischen Grundzustand  $5^2S_{1/2}$  von  $^{87}\text{Rubidium}$  sind dies die Zustände  $|F = 2, m_F = +2\rangle$ ,  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  und  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ; im beschriebenen Experiment werden die Atome Zustand  $|F = 2, m_F = +2\rangle$  magnetisch gespeichert (siehe Abb. 2.7).

Da die Atome nach der Laserkühlung statistisch auf die fünf  $m_F$ -Zustände verteilt sind, muss zum Erreichen einer hohen Umladeeffizienz in die Magnetfalle das Ensemble vor dem Einschalten des Fallenpotentials spinpolarisiert werden. Dies geschieht im Experiment durch optisches Pumpen mit relativ zu einem Führungs-Magnetfeld zirkular polarisiertem, mit dem Übergang  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  resonantem Laserlicht (siehe Abb. 2.4, B.1). Durch die Spinpolarisation und eine Modenanpassung des Umladeprozesses [59, 31] (Verschieben und Kompression der lasergekühlten Atomwolke, Anpassung des Magnetfallenpotentials) erhält man eine Umladeeffizienz von  $\sim 50\%$  bei vernachlässigbarer Temperaturerhöhung des Ensembles.

Als Magnetfalle wurde eine statische Magnetfalle des *Ioffe*-Typs realisiert [74], die sich dadurch auszeichnet, dass im Minimum  $\vec{r}_0$  ein nicht verschwindendes Feld herrscht,  $|\vec{B}(\vec{r}_0)| > 0$ . Die Spulen sind im sogenannten *cloverleaf*-design konfiguriert [64], welches

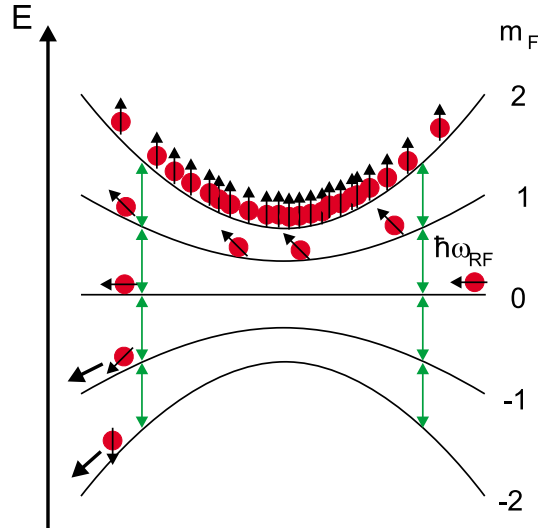


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des Prinzips der RF-Verdampfungskühlung. Aufgetragen sind die Energieniveaus der Zustände  $|F = 2, m_F = -2 \dots + 2\rangle$  im inhomogenen Magnetfeld des Zentrums der Magnetfalle. Ein elektromagnetisches Feld der Frequenz  $\omega_{RF}$  ist in Regionen resonant, in die nur die hochenergetischen Atome im Ensemble gelangen können. Diese werden durch mehrere RF-Photonen in ungefangene Zustände überführt und durch die Schwerkraft und Magnetfeldgradienten aus der Falle entfernt.

einen sehr guten optischen Zugang zur gefangenen atomaren Wolke gewährt. Das so erzeugte Fallenpotential  $U_{MF}$  ist ein in allen drei Raumrichtungen harmonisches Potential und besitzt bei dem in den beschriebenen Messungen benutzten Betriebsstrom von  $I = 280$  A Fallenfrequenzen von  $\omega_z = 2\pi \cdot 14$  Hz und  $\omega_\perp = 2\pi \cdot 425$  Hz. Dies führt zu einer langgestreckten Form der gefangenen Ensembles, wobei die lange ( $z$ -) Achse in der Horizontalen und senkrecht zur Richtung der Detektion liegt.

Ausführliche Beschreibungen der Magnetfalle finden sich in [31, 58, 59].

## 2.2.4 Evaporative Kühlung

Die Verdampfungskühlung wird in bisher allen Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation atomarer Gase als Technik zur effektiven Erhöhung der Phasenraumdicke bis zum Phasenübergang angewandt. Die Verdampfungskühlung beruht auf dem Entfernen des hochenergetischen Anteils aus der Energieverteilung der Atome durch einen selektiven Prozess und der gleichzeitigen Rethermalisierung der verbleibenden Atome über elastische Kollisionen. Die Temperatur des Ensembles verringert sich hierbei, weil mit jedem Atom ein überproportional hoher Anteil der Gesamtenergie aus dem System abgeführt wird. Verdampfungskühlung magnetisch gefangener atomarer Gase wird in der Literatur eingehend diskutiert (siehe z.B. [75, 76, 77]). Numerische Simulationen der Verdampfungskühlung und

s-Wellen-Streulänge	$a = 5(..6) \cdot 10^{-9} \text{ m}$ [43]
elast. Zwei-Körper-Stöße $\Gamma_{el} = 32a_{sc}^2 n \sqrt{\pi kT/m}$	$\Gamma_{el} \approx 1.4 \cdot 10^{-11} \frac{n}{[\text{cm}^{-3}]} \left( \frac{T}{[\mu\text{K}]} \right)^{1/2}$ [31]
inelast. Zwei-Körper-Stöße ( $ F = 2, m_F = 2\rangle$ )	$G_{\text{dip}} = 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^3$ [44]
inelast. Zwei-Körper-Stöße ( $ F = 1, m_F = -1\rangle$ )	$G_{\text{dip}} < 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^3$ [28]
Drei-Körper-Stöße	$L_{3b} = 4 \cdot 10^{-29} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^6$ [28]

Tabelle 2.3: Stoßdaten für  $^{87}\text{Rb}$

hierauf basierende Optimierungsstrategien wurden in Arbeiten im Rahmen des BEC Projektes in Hannover durchgeführt [60, 31] und in einem Artikel zusammengefasst [78].

Im beschriebenen Experiment wird die Verdampfungskühlung des in der Magnetfalle gespeicherten Ensembles mit Hilfe eines in die Fallenregion eingestrahlten Radiofrequenzfeldes mit einem optimierten Frequenzverlauf durchgeführt (*forcierte Verdampfungskühlung*). Die Frequenz  $\omega_{RF}$  wird zunächst so gewählt, dass sie dem Abstand der Energieniveaus der  $m_F$ -Zustände im äußeren Bereich des Ensembles entspricht,  $|g_F \mu_B B(\vec{r})| = \hbar \omega_{RF}$  (siehe Abb. 2.7). Atome, die genügend Energie besitzen, um in diesen Bereich der Falle zu gelangen, werden so in die Zustände  $|F = 2, m_F = -2, -1, 0\rangle$  überführt und aus dem Ensemble entfernt. Im folgenden kann mit der Rate, mit der die übrigen Atome rethermalisieren, die Radiofrequenz abgesenkt werden, um mit einem signifikanten Anteil der Energieverteilung in Resonanz zu bleiben und so die mittlere Energie pro Atom gleichförmig zu senken. Da mit sinkender Temperatur die Dichte des gefangenen Ensembles zunimmt (siehe Gl. 2.8), nimmt auch die Stoß- und damit die Thermalisierungsrate zu, und der Prozess beschleunigt sich. Die (nicht selektiven) Verlustprozesse durch Stöße mit dem Hintergrundgas und inelastische Zwei- und Drei-Körper-Stöße erfordern eine Mindestrate der Absenkung der Radiofrequenz, um innerhalb der Lebensdauer des gefangenen Ensembles die Bose-Einstein Kondensation zu erreichen. Bei einer experimentellen Lebensdauer von  $\tau \approx 60 \text{ s}$  und einer typischen Zeitdauer des Verdampfungszyklus von  $t \approx 10 \dots 15 \text{ s}$  spielen die Verlustprozesse durch Stöße mit dem Hintergrundgas eine untergeordnete Rolle; die dichteabhängigen Raten für Stöße der gefangenen Atome untereinander sind in Tab. 2.3 wiedergegeben.

Im Experiment wird die Radiofrequenz in typischerweise drei bis fünf linearen Frequenzverläufen von einer Startfrequenz im Bereich von  $\omega_{RF} = 2\pi \cdot 30 \text{ MHz}$  bis zu der Endfrequenz im Bereich von  $\omega_{RF} = 2\pi \cdot 500 \text{ kHz}$  abgesenkt. Bei der Verdampfungskühlung geht ein Großteil der Atome verloren (bei einer Startteilchenzahl von  $N = 2.5 \cdot 10^8$  wird die kritische Temperatur  $T_C$  mit einer Teilchenzahl von  $N \approx 7 \cdot 10^5$  erreicht [78]); die Temperatur wird hierbei um etwa drei Größenordnungen abgesenkt, und die Dichte erhöht sich um etwa drei Größenordnungen, sodass die Phasenraumdichte um mehr als sechs Größenordnungen bis



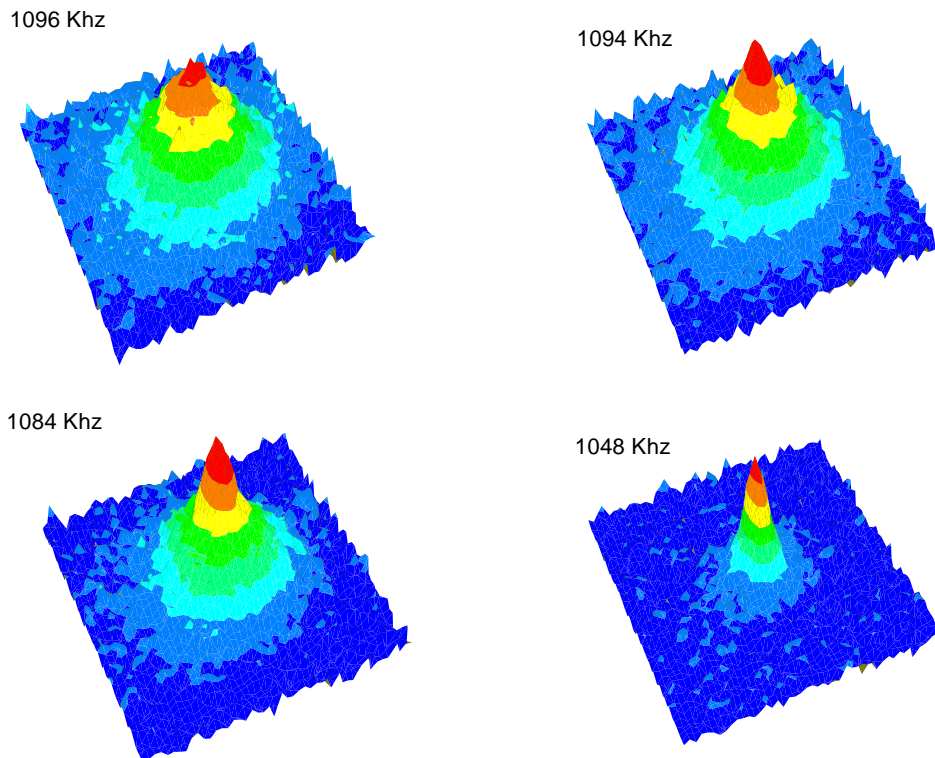


Abbildung 2.8: Serie von Absorptionsabbildungen von atomaren Ensembles nach der Verdampfungskühlung mit verschiedenen Endfrequenzen. Die Flugzeit nach Abschalten der Magnetfalle betrug jeweils 25 ms. Die Serie zeigt deutlich, wie der Phasenübergang zur Bose-Einstein Kondensation mit sinkender Endfrequenz überschritten wird (bei ca. 1094 kHz) und sich bei niedrigen Endfrequenzen - entsprechend Gl. 2.10 - nahezu alle Atome im Grundzustand befinden.

zum Erreichen der Bose-Einstein Kondensation erhöht wird.

Im Hannoveraner BEC-Projekt wurden mit Hilfe der beschriebenen Kühlverfahren erstmals im August 1998 Bose-Einstein Kondensate erzeugt.

## 2.2.5 Detektion von Bose-Einstein Kondensaten

Die makroskopische Ausdehnung eines Bose-Einstein Kondensats erlaubt dessen direkte Beobachtung mit Hilfe aus der Mikroskopie bekannter Methoden. Grundlegende Beschreibungen der Messmethoden an Bose-Einstein Kondensaten finden sich in [20, 39, 79].

Das im Hannoveraner Experiment aufgebaute Detektionssystem besteht aus einem Laserstrahl, dessen Intensität und Frequenz mit Hilfe eines akustooptischen Modulators geschaltet werden können, einem abbildenden optischen System und einer elektronisch gesteuerten ICCD-Kamera (*Intensified Charge Coupled Device*). Es wird detailliert in den Arbeiten [31, 61, 63] beschrieben. Der modulare Aufbau erlaubt es, das Detektionssystem sowohl für

Absorptionsaufnahmen als auch für Dunkelfeldaufnahmen und Phasenkontrastmessungen einzusetzen. Detektionsmessungen der Dichteverteilung können sowohl *in situ* als auch nach einer ballistischen Expansion (*“time-of-flight”*) durchgeführt werden.

Die in Abschnitt 2.2.7 diskutierte Methode der Bragg-Beugung von Materiewellen erlaubt außerdem eine orts aufgelöste Analyse des Geschwindigkeitsfelds im Kondensat.

## Absorptionsaufnahmen

Für Absorptionsaufnahmen befindet sich der Detektionslaser auf Resonanz mit dem Kühlübergang (siehe Abb. 2.4), sodass die atomare Wolke Photonen streut und im Strahl ein Schattenwurf mit einer von der atomaren Säulendichte abhängigen Dunkelheit entsteht. Dieser Schattenwurf wird mit Hilfe eines Mikroskopobjektivs und eines Linsensystems auf die Kamera abgebildet. Die im Experiment so erreichbare Auflösung beträgt etwa  $3.7 \mu\text{m}$  [63].

In Abb. 2.8 sind Absorptionsaufnahmen von atomaren Wolken nach der Verdampfungskühlung bis zu vier unterschiedlichen Temperaturen (die unterschiedlichen Endfrequenzen entsprechen) und nach einem *time-of-flight* von jeweils 25 ms dargestellt. In der dreidimensionalen Darstellung entsprechen die  $x$ - und  $y$ -Koordinate den räumlichen Koordinaten im Probekörperstrahl, in der dritten Dimension ist als Höhe die optische Dichte aufgetragen. Man erkennt den Phasenübergang zum Bose-Einstein Kondensat an der makroskopischen Besetzung des Grundzustandes, die im Absorptionsbild als bimodale Verteilung eines zentralen Maximums und einer isotropen breiteren Verteilung, die den Atomen der thermischen Wolke entspricht. In Übereinstimmung mit Gl. 2.10 befinden sich bei tiefen Temperaturen ( $T < 0.5T_c$ )  $> 90\%$  der Atome im Kondensat; die thermische Wolke ist mit  $< 10\%$  der Atome nicht mehr detektierbar (Abb. 2.8, 1048 kHz<sup>13</sup>).

Abb. 2.9 zeigt Absorptionsbilder von Bose-Einstein Kondensaten nach unterschiedlichen Zeiten ballistischer Expansion  $t_{TOF}$ . Die Umwandlung der Wechselwirkungsenergie der Atome in kinetische Energie führt zu einer anisotropen Expansion der atomaren Wolke, die die anfängliche prolate Form (1 ms) über eine Kugelform (16 ms) in eine oblate Form (32 ms) überführt. Währenddessen fällt die Wolke durch den Einfluss der Schwerkraft um etwa fünf mm. Da Absorptionsaufnahmen durch die resonanten Streuprozesse das Kondensat zerstören, wurden für die Flugserie 2.9 die Aufnahmen verschiedener Kondensate zu einem Bild zusammengefügt.

---

<sup>13</sup>Bei diesen Messungen trat die Bose-Einstein Kondensation aufgrund geänderter Parameter der Magnetfalle schon bei einer RF-Endfrequenz von  $\sim 1095 \text{ kHz}$  ein.

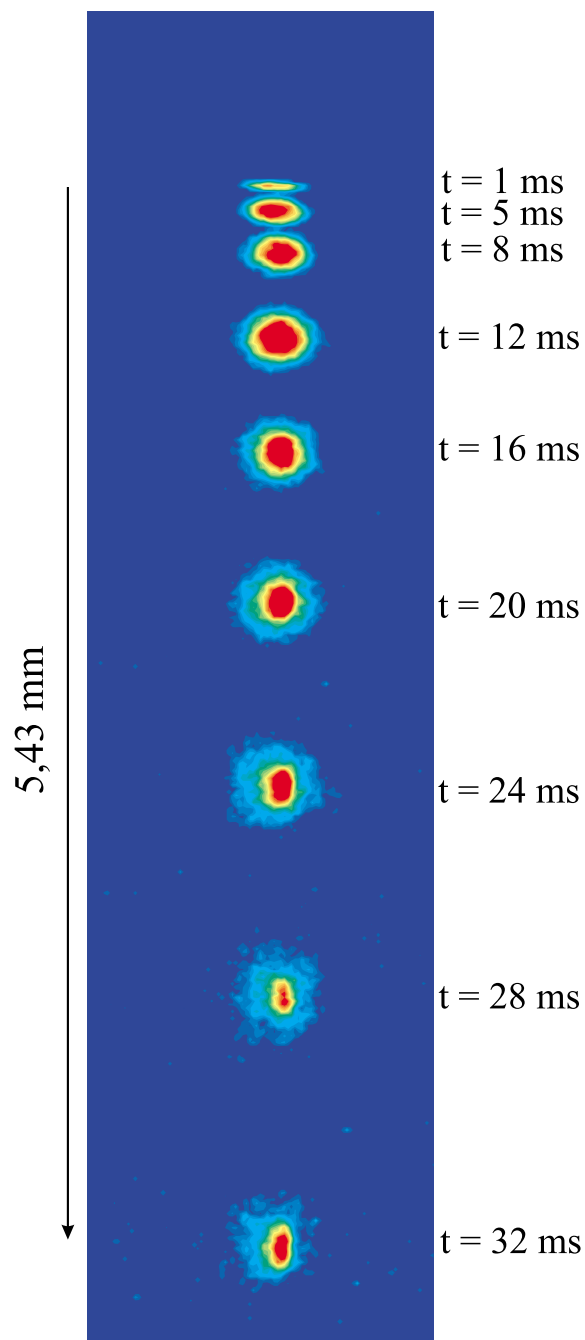


Abbildung 2.9: Absorptionsbilder von Bose-Einstein Kondensaten zu unterschiedlichen Zeiten nach dem Abschalten der Magnetfalle. Der Einfluss der nichtlinearen Wechselwirkungsenergie ist an der anisotropen Expansion der Wolken zu erkennen. Für diese Flugserie wurden die Aufnahmen verschiedener Kondensate in einem Bild dargestellt.

## Dunkelfeld- und Phasenkontrastmessungen

Mit dem im Experiment verwandten Detektionssystem sind auch die dispersiven Messverfahren der Dunkelfeld- und Phasenkontrastmessungen möglich. Diese erlauben den Einsatz weit gegenüber der atomaren Resonanz verstimmtten Probelichts und damit nichtdestruktive Messungen. Dispersive Messverfahren beruhen darauf, die Phasenverzögerung, die das Licht beim Durchgang durch die Atomwolke erfährt, durch eine Trennung der gestreuten und der nicht gestreuten Komponenten des Probelichts und eine unabhängige Manipulation dieser Komponenten sichtbar zu machen. In der Dunkelfeld-Methode geschieht dies durch das Blockieren der ungestreuten Komponente mit einem lichtundurchlässigen Objekt in einer Fourierebene des Detektionssystems. Im Phasenkontrastverfahren wird dagegen die ungestreute Komponente des Probelasers mit einem Phasenplättchen in der Fourierebene phasenverzögert. Dies führt bei der Überlagerung (Interferenz) der beiden Komponenten in der Bildebene zu einem hohen Kontrast.

Die Detektion von Bose-Einstein Kondensaten sowie der Einsatz von Dunkelfeld- und Phasenkontrastmessungen im Hannoveraner Experiment werden in [20] bzw. [61, 31] eingehend diskutiert. Beispiele für Dunkelfeldmessungen von Bose-Einstein Kondensaten finden sich auf Seite 3 der in Kapitel 6.3 abgedruckten Veröffentlichung.

### 2.2.6 Atomlaser

Eine der meistdiskutierten Anwendungen von Bose-Einstein Kondensaten ist deren Einsatz als Quelle eines Atomlasers [4, 80, 5, 6, 7].

Eine Definition des Atomlaser ist [20], dass dieser durch einen stimulierten Prozess einen kohärenten, gerichteten Atomstrahl erzeugt. Atomlaser sind damit das direkte atomoptische Analogon zu Lasern in der Optik. Der Erzeugungsmechanismus der kohärenten Materiewellen ist die bosonisch stimulierte Verstärkung von Atomen. Sie tritt z.B. im Kondensationsprozess zur Bose-Einstein Kondensation auf [27], aber auch bei der Streuung von Atomen in Anwesenheit eines anderer makroskopisch besetzter Zustände [10].

Bei der Verwendung von Bose-Einstein Kondensaten in Atomlaser-Experimenten dient der makroskopisch besetzte Grundzustand, der sich mit der thermischen Wolke in Kontakt befindet, als aktives Medium; das Fallenpotential dient als Resonator, und als Auskoppler wurden verschiedene Mechanismen demonstriert:

Gepulste oder kontinuierliche Radiofrequenzstrahlung kann Spinflips der Atome induzieren, die die Atome in nicht gefangene Zustände überführen, sodass sie der Schwerkraft folgend einen gepulsten oder kontinuierlichen Atomstrahl bilden. Mit diesem Mechanismus

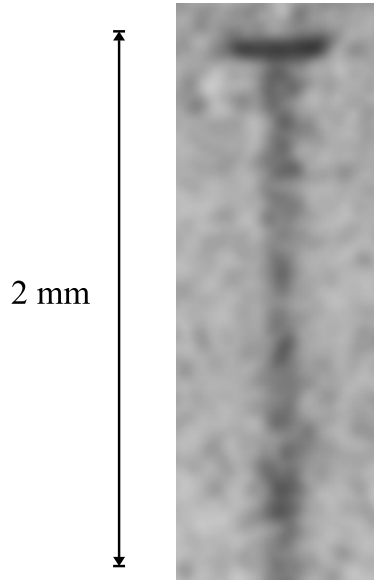


Abbildung 2.10: Absorptionaufnahme eines Atomlaser-Strahls. Ein Anteil eines Bose-Einstein Kondensats ( $|F = 2, m_F = 2\rangle$ ) wird mit Hilfe eines RF-Feldes über eine Zeitdauer von 20 ms kontinuierlich in den Zustand  $|F = 2, m_F = 0\rangle$  umgepumpt und bildet einen gleichmäßigen Fluss von Atomen, der der Schwerkraft folgt.

wurde der erste (gepulste) Atomlaser realisiert [4], durch eine Stabilisierung der magnetischen Felder ist eine quasi-kontinuierliche Auskoppelung von Atomen möglich [7]. Die quasi-kontinuierliche und die gepulste Auskoppelung aus der Magnetfalle wurden auch im Rahmen dieser Arbeit und in [31] verwandt. Abb.2.10 zeigt einen im Hannoveraner BEC-Experiment erzeugten quasi-kontinuierlich ausgekoppelten Atomlaserstrahl einer Länge von ca. 2 mm.

Als weiterer Auskoppelmechanismus wurden Raman-Übergänge, die mit einem Impulsübertrag und so einer wählbaren Auskoppelrichtung verbunden sind, demonstriert [6]. Die Auskoppelung von Atomen aus einem in ein optisches Gitter umgeladenen BEC aufgrund des Tunneleffekts führt zu einem regelmäßigen Zug von atomaren Pulsen [5].

Der Einsatz blau verstimmter Dipolfallen, der im Rahmen dieser Arbeit und in [31] demonstriert wurde, bietet weitere Realisierungsmöglichkeiten von Atomlasern [32]. Zum einen können durch eine Variation der Potentialhöhe Atome in Richtung der Schwerkraft ausgekoppelt werden. Des weiteren bildet das Kondensat selbst in longitudinaler Richtung eines mit blauverstimmten Dipolpotentialen realisierten Wellenleiters einen gepulsten Atomstrahl, der durch den Wellenleiter stark gerichtet ist und der aufgrund einer Neigung des Wellenleiters im Gravitationspotential propagiert [32, 81]. Eine weitere Möglichkeit für einen beliebig gerichteten Atomlaser bildet die Kombination eines in einen Wellenleiter umgeladenen Kondensats mit der Bragg-Beugung eines Anteils des Kondensats [32].

Alle derzeitigen Atomlaser sind durch die endliche Zahl von Atomen im Kondensat

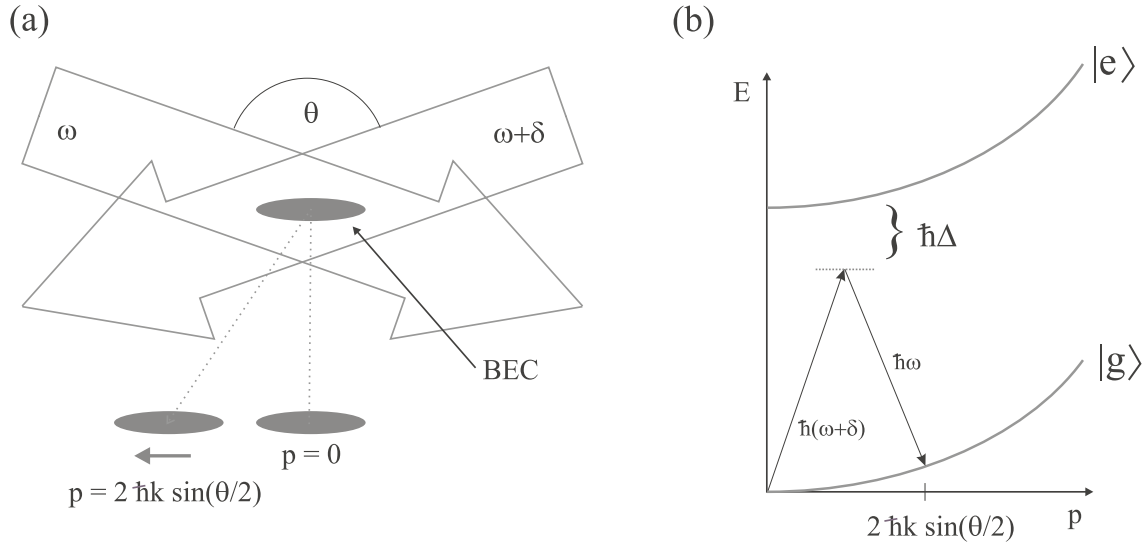


Abbildung 2.11: (a) Schematische Darstellung der Bragg-Beugung eines Bose-Einstein Kondensats. (b) Ausschnitt aus dem Termschema mit einem Bragg-Übergang erster Ordnung.

beschränkt und können deshalb nicht kontinuierlich betrieben werden.

## 2.2.7 Bragg-Beugung von Bose-Einstein Kondensaten

Die Methode der Bragg-Beugung von Materiewellen ist eine Technik, die eine Vielzahl von Anwendungen in Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten besitzt. In atomoptischen Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten wurden Bragg-Pulse als kohärenzerhaltende Strahlteiler [65, 82], zur Anregung von Phononen [83] und als gerichteter Auskoppelmechanismus eines Atomlasers [6] verwandt. Die Geschwindigkeitsselektivität des Bragg-Prozesses erlaubt auch die Spektroskopie der Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat [30].

In Abb. 2.11a) ist die experimentelle Anordnung eines Experimentes zur Bragg-Beugung eines Bose-Einstein Kondensats schematisch dargestellt. Dabei wird ein Kondensat kohärent an einem laufenden periodischen Potential gestreut, das mit zwei nichtresonanten Laserstrahlen mit den Frequenzen  $\omega$  und  $\omega + \delta$ , die im Bereich des Kondensats überlappen, erzeugt wird. Der Mechanismus der Bragg-Beugung kann als Raman-Prozess verstanden werden, in dem Photonen aus einem Laserstrahl kohärent in den zweiten Laserstrahl gestreut werden (siehe Abb. 2.11b). Die hiermit verbundenen Impulsüberträge prägen den beteiligten Atomen eine Geschwindigkeit  $v = 2\hbar k \sin(\theta/2)/m$  auf, wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Laserstrahlen und  $k$  der Betrag des Wellenvektors der Laserstrahlung ist. Die Frequenzdifferenz zwischen den Laserstrahlen muss, um die Energieerhaltung im Prozess zu gewähren, gerade dem Energieunterschied der beiden beteiligten Impulszustände entsprechen. Für  $\theta = 180^\circ$ , den Ausgangszustand  $|g, p = 0\rangle$  und den durch den Bragg-Prozess

bevölkerten Zustand  $|g, p = 2\hbar k\rangle$  gilt:

$$\frac{(2\hbar k)^2}{2m} = \hbar\delta . \quad (2.28)$$

Wird das Bose-Einstein Kondensat kontinuierlich den Bragg-Strahlen ausgesetzt, so führt die Besetzungswahrscheinlichkeit zwischen den beiden gekoppelten Impulszuständen  $|g, p = 0\rangle$  und  $|g, p = 2\hbar k\rangle$  Rabi-Oszillationen aus. Die effektive Rabi-Frequenz  $\Omega_{eff}$  beträgt für diese Kopplung [82]

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta} , \quad (2.29)$$

mit den resonanten Rabi-Frequenzen für die einzelnen Laserstrahlen,  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  (siehe Kapitel 5.1.2), und der Frequenzverstimmung  $\Delta$  der Laserstrahlen zum Übergang  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . Über die Wahl des Produkts aus Belichtungszeit (Pulsdauer) und Intensität der Bragg-Strahlen kann ein beliebiger Anteil der Besetzungswahrscheinlichkeit in den Zustand  $|g, p = 2\hbar k\rangle$  transferiert werden. Die Verstimmung der Laser,  $\Delta$ , wird so hoch gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit der Anregung des Zustands  $|e\rangle$  in der Belichtungszeit zu vernachlässigen ist (siehe Gl. A.3), spontane Prozesse also ausgeschlossen werden können.

Der experimentelle Aufbau der Bragg-Beugung von Bose-Einstein Kondensaten im Hannoveraner Experiment (siehe auch [56]) beruht auf einem gitterstabilisierten Diodenlasersystem, dessen Strahlung aufgeteilt und mit zwei unabhängigen akustooptischen Modulatoren geschaltet und auf die Frequenzdifferenz  $\delta$  eingestellt werden kann (siehe Abb. B.1). In den hier diskutierten Experimenten werden die beiden Bragg-Pulse antiparallel zueinander ( $\theta = 180^\circ$ ) und parallel zu der schwachen Achse des Fallenpotentials ( $z$ -Achse) auf das Bose-Einstein Kondensat eingestrahlt, sodass der Impulsübertrag in dieser Richtung erfolgt. Typische im Experiment verwandte Parameter von Laserintensität und -verstimmung sind  $I \approx 3 \mu\text{W}/\text{mm}^2$  und  $\Delta \approx 2\pi \cdot 6.8 \text{ GHz}$ . Hiermit ergibt sich nach Gl. 2.29 eine Rabi-Frequenz von  $\Omega_{eff} \approx 2\pi \cdot 1.5 \text{ kHz}$ . Um Wechselwirkungseffekte der beiden Komponenten auszuschließen, wird vor dem Einstrahlen der Bragg-Pulse eine 2 ms lange Expansion des Ensembles aus der Falle durchgeführt. Die beiden Zustände  $|p = 0\rangle$  („0.Ordnung“) und  $|p = 2\hbar k\rangle$  („1.Ordnung“) trennen sich in einem weiteren *time-of-flight* von 10 ms aufgrund ihrer Relativgeschwindigkeit von  $v_{rel} = 2\hbar k/m \approx 11.7 \text{ mm/s}$  räumlich vollkommen voneinander und sind in einem Absorptionsbild voneinander zu unterscheiden und getrennt auswertbar.

In Abb. 2.12 sind Messergebnisse zur relativen Besetzung der beiden Zustände  $|g, p = 0\rangle$  und  $|g, p = 2\hbar k\rangle$  nach unterschiedlich langen Pulszeiten der Bragg-Strahlen dargestellt; die Rabi-Oszillation ist deutlich erkennbar. Der Verlust an Kontrast mit zunehmender Einstrahldauer ist unter anderem auf einsetzende *spektroskopische* Effekte zurückzuführen: Die Bragg-Beugung ist entsprechend der Bedingung 2.28 geschwindigkeitsselektiv; über die Wahl

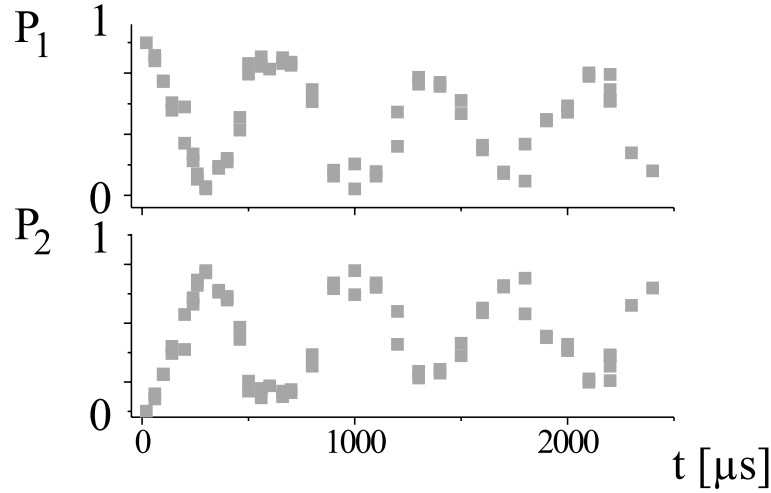


Abbildung 2.12: Relative Besetzung des Zustands  $|p = 0\rangle$ ,  $P_1$ , und relative Besetzung des Zustands  $|p = 2\hbar k\rangle$ ,  $P_2$ , in Abhängigkeit von der Einstrahldauer der Bragg-Pulse. Die Besetzung oszilliert mit der Frequenz  $\Omega_{eff} \approx 1.5$  kHz zwischen den Zuständen.

der Braggverstimmung  $\delta$  können bestimmte Impulskomponenten mit dem Raman-Prozess in Resonanz gebracht werden. Wenn das Frequenzspektrum der Laserpulse kleiner als das Frequenzspektrum  $\Delta\delta$  ist, das den unterschiedlichen im Kondensat vorhandenen Impulskomponenten entspricht, können nur noch die nach Gl. 2.28 resonanten Anteile in die erste Ordnung gebeugt werden.

Da während der Expansionszeit vor Einstrahlen der Bragg-Pulse die *mean-field*-Energie in kinetische Energie umgesetzt wird, beträgt die Geschwindigkeitsbreite des Kondensats in  $z$ -Richtung während der Bragg-Beugung (nach 2 ms Expansionszeit) etwa 0.5 mm/s. Diese Geschwindigkeitsbreite wird (in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten) ab einer Bandbreite der Bragg-Pulse von etwa 500 Hz detektierbar.

Weitere Mechanismen, die zum Kontrastverlust in den Rabi-Oszillationen führen, sind:

1. Phasenfluktuationen der Laser, die zur Dephasierung der Rabi-Oszillationen führen,
2. Spontane Prozesse, die proportional zur Belichtungszeit zunehmen und die zur Ausbildung atomarer „Halos“ führen [65],
- und 3. Die Tatsache, dass kein reines 2-Niveau-System vorliegt, sondern mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auch die -1. Bragg-Beugungsordnung angeregt wird <sup>14</sup>.

Der spektroskopische Effekt wurde benutzt, um die Wechselwirkungsenergie und das Impulsspektrum in einem Bose-Einstein Kondensat im Grundzustand zu vermessen [30]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Bragg-Spektroskopie erstmals auch dazu benutzt, die

---

<sup>14</sup>Dieser auf experimentellen Rahmenbedingungen beruhende Effekt wird in [56] diskutiert.



quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsstromdichte in einem niedrigen angeregten Zustand des Kondensats (Solitonenzustand) zu messen (siehe Kapitel 5.3).

# Kapitel 3

## Solitonen

Solitonen sind ein Wellenphänomene mit ausgeprägten Teilchencharakter, die in vielen Bereichen der Natur auftreten. Solitonen zeichnen sich dadurch aus, dass sie als wellenartige, aber auf einen kleinen Raumbereich begrenzte Anregung mit konstanter Geschwindigkeit propagieren, ohne ihre Form zu ändern.

Solitonen werden durch eine fundamentale Klasse von Lösungen zu nichtlinearen Wellengleichungen beschrieben. Da Wellengleichungen in den unterschiedlichsten Gebieten der Physik auftreten, haben sich Solitonen inzwischen als Hilfsmittel theoretischer Voraussagen und als wichtiges Experimentierfeld mit großem Anwendungspotential in vielen Zusammenhängen bewährt [84].

Die erste Beschreibung eines Solitons geht in das 19. Jahrhundert zurück, als der schottische Physiker J. Scott-Russell eine Wasserwelle in einem flachen Kanal beobachtete [85]: *„...the mass of water rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and welldefined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel...“*

### 3.1 Definition

In der Beschreibung von Scott-Russell finden sich schon die meisten Punkte einer moderneren Definition von Solitonen [86]:

a) Die Lösung  $\phi(x, t)$  einer Wellengleichung ist eine *laufende Welle*, wenn  $\phi(x, t)$  nur über die Linearkombination  $\xi = x - v_s t$  von  $x$  und  $t$  abhängig ist.  $v_s$  ist dabei eine konstante

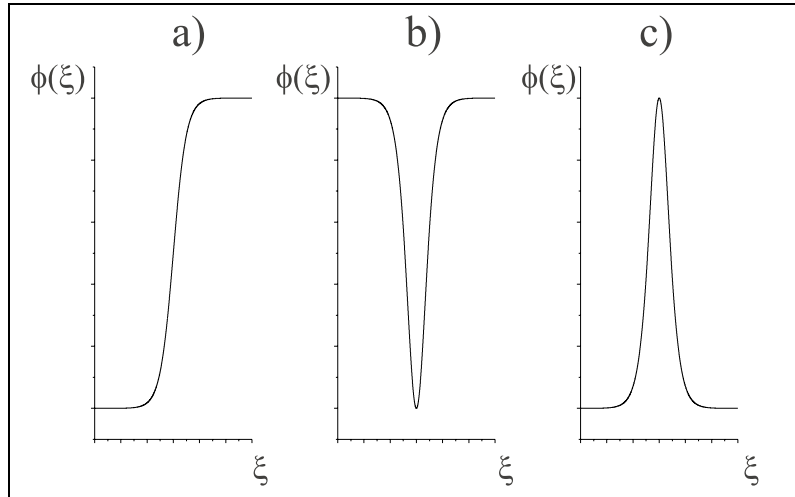


Abbildung 3.1: Verschiedene mögliche Solitonenformen: a) “kink”, b) “dark soliton”, c) “bright soliton”.

Geschwindigkeit.

$$\phi(x, t) = \phi(\xi) , \quad \xi = x - v_s t , \quad v_s = cst. \quad (3.1)$$

b) In der Klasse der Laufwellen zeichnen sich die *solitären* Wellen durch ihre Lokalisation aus. Dies bedeutet, dass eine solitäre Welle asymptotische Zustände konstanter Amplitude  $\phi(\xi)$  für  $(\xi \rightarrow -\infty)$  und für  $(\xi \rightarrow +\infty)$  besitzt und dass der Übergang zwischen diesen Zuständen im wesentlichen um  $\xi$  lokalisiert ist.

c) *Solitonen* sind schließlich solitäre Wellen, die ihre Form und Geschwindigkeit (nicht unbedingt aber ihre Phase) nach einer Kollision mit anderen Solitonen erhalten.

Abhängig von der zugrundeliegenden Wellengleichung treten Solitonen mit unterschiedlichen Formen auf, zum Beispiel als einzelner Wellenberg (“bright soliton”) oder einzelnes Wellental (“dark soliton”, dunkles Soliton, siehe Abbildung 3.1).

In linearen Systemen sind aufgrund der Dispersion keine solitären Wellen möglich; die unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten der Fourierkomponenten eines begrenzten Wellenpakets bewirken eine Verbreiterung desselben. Erst durch den Einfluss von Nichtlinearitäten kann es zur Ausbildung von Solitonen kommen. Qualitativ repräsentieren Solitonen eine Balance zwischen der Verbreiterung einer wellenartigen Anregung durch die Dispersion und der Einschnürung durch eine Nichtlinearität. Diese Balance wird in der Formstabilität des propagierenden Solitons sichtbar. Einem Soliton lassen sich Position (*Lokalisation*), Geschwindigkeit (*konstante Propagation*) und Masse (*Formstabilität*, siehe z.B. Gl. 4.14) zuzuordnen. In dissipationsfreien Systemen wird der Teilchencharakter darin deutlich, dass die Impuls-, Energie- und Massenerhaltung für das Soliton gelten.

Mit diesen Eigenschaften repräsentieren Solitonen ein sehr interessantes physikalisches Phänomen. Mit Bose-Einstein Kondensaten in Gasen schwach wechselwirkender Alkali-Atome sind seit 1995 fundamentale quantenmechanische Systeme experimentell zugänglich, in denen aufgrund der nichtlinearen Evolution der Bose-Einstein Kondensate (Gl. 2.16) Solitonen existieren können [87]. Aufgrund der makroskopischen Dimensionen dieser Systeme sind die Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten direkt beobachtbar [24, 25].

## 3.2 Optische Solitonen

Da sowohl die theoretische Beschreibung als auch experimentelle Erzeugung und Eigenschaften von Solitonen in der Optik und in der Materiewellen-Optik wesentliche Gemeinsamkeiten besitzen, folgt zunächst eine Einleitung in die Grundlagen der optischen Solitonen.

Optische Solitonen in Glasfasern sind der am meisten untersuchte Typ von Solitonen und derjenige, dessen technische Anwendung am weitesten fortgeschritten ist. So wurde gezeigt, dass kurze optische Pulse schon mit relativ geringen Leistungen in Glasfasern mit geeigneten nichtlinearen Eigenschaften als Solitonen propagieren können. Diese Pulse ermöglichen inzwischen einen extrem schnellen (Übertragungsraten von  $\approx 10^{12}$  bit/s) und zuverlässigen Datentransport über große Strecken.

Die Ausbreitung von Licht in Einmoden-Glasfasern wird durch eine nichtlineare Schrödingergleichung beschrieben. Ihre Ableitung (siehe z.B. [88]) basiert auf den Maxwell-Gleichungen, wobei angenommen wird, dass der elektrische Verschiebungsvektor  $\vec{D}(\vec{E})$  in lineare und nichtlineare Anteile der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  aufgeteilt werden kann. Da die Nichtlinearität in Glasfasern im wesentlichen auf dem Kerr-Effekt beruht, kann der nichtlineare Teil,  $\vec{D}_{nl}$ , in der Form  $\vec{D}_{nl} = n_2 |\vec{E}|^2 \vec{E}$  geschrieben werden;  $n_2$  ist hier der Kerr-Koeffizient.

Mit der Annahme, dass die Einhüllende der Welle,  $E(z, t)$  mit den Koordinaten  $z$  und  $t$  nur langsam variiert, lässt sie sich in der Fouriervariablen  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  expandieren; dies bedeutet eine Expansion der Wellenzahl  $k(\omega)$  mit:

$$k - k_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.2)$$

Die zweite Ableitung von  $k$  beschreibt hier die Dispersion der Welle. Nach Expansion von  $E(z, t)$  und Berücksichtigung sowohl der Dispersion als auch des (schwachen) Kerr-Effektes gelangt man zur bekannten nichtlinearen Schrödinger Gleichung. In normalisierten Koordinaten lautet diese:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0 . \quad (3.3)$$

Hierbei ist  $u$  die komplexe Amplitude der Einhüllenden des Pulses,  $z$  ist die Ortskoordinate entlang der Faser und  $t$  ist die Zeitkoordinate im sich mit der Gruppengeschwindigkeit des Pulses bewegenden Bezugssystem. Das Vorzeichen  $\sigma$  ergibt sich aus dem Vorzeichen der Gruppengeschwindigkeitsdispersion in der Faser. Je nach dem Vorzeichen  $\sigma$  zerfallen die Lösungen von Gleichung 3.3 in zwei verschiedene Klassen: Für  $\sigma = -1$  (negative Gruppengeschwindigkeitsdispersion) sind die physikalisch sinnvollen Randbedingungen für Gleichung 3.3:  $|u| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Für diese Bedingungen ist die nichtlineare Schrödingergleichung integrierbar [89] und besitzt als Lösungen Solitonen in Form kurzer Pulse auf einen verschwindenden Hintergrund (*bright solitons*, „helle Solitonen“).

Die allgemeine Lösung für helle Solitonen hat die Form

$$u(z, t) = \frac{a \exp^{ivt/2 - i(v^2/4 - a^2)z}}{\cosh[a(t - vz)]} , \quad (3.4)$$

mit der Amplitude  $a$  und der Geschwindigkeit  $v$  des Solitons relativ zum mit Gruppengeschwindigkeit propagierenden Hintergrund. Im Fall von  $v = 0$  ergibt sich das *fundamentale* helle Soliton:

$$u(z, t) = \frac{a \exp^{ia^2z}}{\cosh(at)} . \quad (3.5)$$

Im Fall positiver Gruppengeschwindigkeitsdispersion ( $\sigma = +1$ ) sind nur Lösungen mit  $|u| \rightarrow u_0 = \text{const.}$  stabil für  $t \rightarrow \infty$ . Auch mit diesen Randbedingungen ist Gleichung 3.3 integrierbar [87]. Solitonenlösungen sind hier formstabile Minima auf einem Hintergrund konstanter Amplitude.

Die Lösung für ein einzelnes dunkles Soliton lautet:

$$u(z, t) = u_0[B \tanh \Theta + iA] \exp^{iu_0^2z} , \quad (3.6)$$

mit

$$\Theta = u_0 B(t - Au_0 z)$$

und

$$A^2 + B^2 = 1 .$$

Der Wert  $Au_0$  repräsentiert die Geschwindigkeit des Solitons im bewegten Bezugssystem; für ein relativ zum (mit der Gruppengeschwindigkeit propagierenden) Hintergrund ruhendes dunkles Soliton ergibt sich:

$$u(z, t) = u_0 \tanh(u_0 z) \exp^{iu_0^2t} . \quad (3.7)$$

Dieses *fundamentale* dunkle Soliton zeichnet sich durch verschwindende Intensität im Zentrum und einen Phasensprung von  $\pi$  in seiner komplexen Amplitude um dieses Zentrum aus. Im Gegensatz dazu besitzen helle Solitonen eine konstante Phase in der Region ihres Extremwertes.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen hellen und dunklen Solitonen ist, dass zur Erzeugung heller Solitonen ein Schwellwert an Intensität überschritten werden muss [90]; helle Solitonen werden von lokalisierten Pulsen erzeugt, wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(z, 0)| dz > \frac{\pi}{2}. \quad (3.8)$$

Für die Erzeugung dunkler Solitonen gibt es keine Schwellwertbedingung [91]. Dies hängt mit der Stabilität von Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung für positive Gruppengeschwindigkeitsdispersion zusammen [90].

### 3.2.1 Erzeugung optischer dunkler Solitonen

Während ein helles Soliton in einer Glasfaser mit entsprechender Gruppengeschwindigkeitsdispersion im wesentlichen durch die Bereitstellung eines kurzen Lichtpulses mit genügend Leistung nach Gleichung 3.8 erzeugt wird, muss zur Erzeugung eines einzelnen dunklen Solitons auf einem Untergrundpuls zusätzlich zum Amplitudenverlauf die dem Soliton entsprechende lokale Phasenverteilung (siehe Gleichung 3.6) generiert werden.

Experimentell gelang dies erstmals 1988 in einem Experiment, in dem mit Hilfe räumlicher Filterung innerhalb eines Gitter-Dekompressors für optische Pulse sowohl Amplitude als auch Phase der Pulse maßgeschneidert werden konnten [92]. Auf diese Weise konnten Intensitätsminima von 185 fs Dauer erzeugt werden, die sich in Hintergrundpulsen etwa zehnfacher Dauer mit einem Phasensprung von  $\pi$  im zentralen Minimum befanden. Während sich der Hintergrundpuls mit einer Spitzenleistung von 300 W beim Durchgang durch eine 1.4 m lange Einmoden-Glasfaser deutlich verbreiterte und durch Selbstphasenmodulation seine Frequenzkomponenten umverteilt wurden (*chirping*), blieb der zentrale dunkle Puls unverändert. Er propagierte also als Soliton durch die Glasfaser.

Die entscheidende Rolle des Phasensprunges wird auch im Vergleich mit einem Experiment deutlich, in dem dunkle optische Solitonen durch die Amplitudenmodulation eines kurzen Pulses erzeugt wurden [93]. In diesem Experiment wurden durch einen Kerreffekt-Modulator etwa 300 fs lange dunkle Pulse auf 100 ps langen Pulsen erzeugt. Bei genügend hoher Leistung der Pulse entwickelten sich die dunklen Pulse beim Durchgang durch eine 10 m lange Glasfaser in ein Paar dunkler Solitonen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten relativ zum Hintergrund. Durch Vergleich mit entsprechenden Pulsen bei niedriger

Leistung gelang eine eindeutige Abgrenzung zur linearen Propagation der Strukturen. Die Erzeugung eines Paares von Solitonen ist eine Konsequenz daraus, dass in diesem Experiment die Phase des Pulses in der Region des Intensitätsminimums nicht verändert wurde. In der theoretischen Analyse dieses Experiments konnte gezeigt werden, dass diese Erzeugung von Solitonenpaaren für beliebige Formen von dunklen Pulsen und für beliebig geringe Amplituden dieser Pulse möglich ist [91, 94].

Die Erzeugung von optischen dunklen Solitonen mit Hilfe einer Modulation der lokalen Phase eines Pulses wurde intensiv theoretisch untersucht. Insbesondere wurde die Zeitentwicklung eines Pulses der Amplitude  $u(t, x)$  mit einem aufmodulierten Stufenprofil untersucht:

$$u(0, x) = u_0 \exp^{\theta_1}, \text{ für } x < 0, \quad u(0, x) = u_0 \exp^{\theta_2}, \text{ für } x > 0. \quad (3.9)$$

Es kann gezeigt werden [95], dass mit diesem Phasenprofil ein dunkles Soliton erzeugt werden kann, dessen Tiefe  $1 - u(t, x_s)/u_0$  und Geschwindigkeit  $v_s$  von der aufgeprägten Phasendifferenz  $\theta_1 - \theta_2$  abhängen.

Ein Phasenprofil mit mehreren Phasensprüngen resultiert in ebensovielen dunklen Solitonen [96]; für die Abstände zweier Sprünge gibt es hier allerdings einen phasenabhängigen Mindestwert  $\delta\tau_j$ , bei dessen Unterschreitung die beiden Phasensprünge in einem einzigen Soliton resultieren:

$$\delta\tau_j > \frac{1}{2u_0} \left| \cot\left(\frac{1}{2}\theta_{j+1}\right) + \cot\left(\frac{1}{2}\theta_j\right) \right|. \quad (3.10)$$

Mit zwei Phasensprüngen gleicher Höhe aber unterschiedlichen Vorzeichens können zwei gleich schnelle, entgegengesetzt laufende dunkle Solitonen erzeugt werden [94] (vgl. die Erzeugung entgegenlaufender dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten, Kap. 5.5).

In Experimenten, in denen mit elektrooptischen Modulatoren die lokale Phase eines cw-Lichtfelds in einem Wellenleiter verändert wurde, konnten mit dieser (optischen) Phasenaufprägungsmethode dunkle Solitonen erzeugt werden [97, 98].

## Anwendungen dunkler optischer Solitonen

Die Möglichkeiten der breiten Anwendung temporärer dunkler optischer Solitonen werden zur Zeit intensiv diskutiert [90].

Aufgrund ihrer Formstabilität eignen sich dunkle Solitonen prinzipiell zum Einsatz in der Datenübertragung – ein Bereich, in dem helle Solitonen seit einigen Jahren bereits erfolgreich eingesetzt werden [99]. Formstabile Propagation von Abfolgen dunkler Solitonen auf Strecken von über 1000 km wurde bereits demonstriert [100, 98]. Ein prinzipieller Vorteil

von dunklen Solitonen gegenüber hellen Solitonen ist die langsamere Verbreiterung dunkler Solitonen unter dem Einfluss dissipativer Effekte [96]. Ein weiterer technischer Vorteil ist, dass zur Erzeugung dunkler Solitonen keine Schwellwerte überschritten werden müssen. Dies führt allerdings auch zur Erzeugung von dunklen Solitonen durch Intensitäts- und Phasenfluktuationen des Hintergrundes [94]. Deshalb ist bei der Verwendung von dunklen Solitonen in der Datenübertragung eine Fehlerkorrektur notwendig.



# Kapitel 4

## Solitonen in Materiewellen

Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten wurden bereits 1972 von Zakharov und Shabat vorhergesagt [87] und werden seitdem eingehend theoretisch untersucht. In den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten [24] sowie in Experimenten in einer Arbeitsgruppe am NIST, Gaithersburg, USA [25], konnten sie erstmalig beobachtet werden.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die theoretischen Grundlagen von Solitonen in Materiewellen und stellt detailliert die Erzeugungsmethode der Phasenaufprägung vor.

### 4.1 Die Wellenfunktion dunkler Solitonen

Die Gross-Pitaevskii Gleichung beschreibt mit hoher Genauigkeit die Dynamik von Bose-Einstein Kondensaten (siehe Kap. 2.1.2, Gl. 2.16). Diese Gleichung ist eine nichtlineare Schrödingergleichung; analog zur Existenz von solitären Lichtwellen in Glasfasern kann die makroskopische Wellenfunktion des BEC also Solitoneneigenschaften annehmen.

Ein wesentlicher Unterschied dieser beiden Systeme ist, dass im Fall eines Bose-Einstein Kondensats die Nichtlinearität durch die Wechselwirkung der Atome untereinander hervorgerufen wird, während in der nichtlinearen Optik ein umgebendes Medium, z.B. eine Glasfaser über den Kerreffekt, die Nichtlinearität der Wellenausbreitung bedingt. Daher lassen sich über Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten auch die Eigenschaften der Materiewellen selbst untersuchen. Weiterhin erlauben die Wechselwirkung der Atome in einem Kondensat untereinander sowie die endliche Temperatur des Systems das Studium von Dissipationsmechanismen.

Ein Unterschied der Gross-Pitaevskii Gleichung zur nichtlinearen Schrödingergleichung in der nichtlinearen Optik 3.3 ist die vertauschte Rolle der Koordinaten, nach denen die Wellenfunktion abgeleitet wird. Dies hat zur Folge, dass solitäre Wellen in einem Bose-Einstein

Kondensat als ruhende oder sich langsam bewegende ( $v_s < \text{Schallgeschwindigkeit}$ ) Dichteminima oder -maxima vor einer stationären Hintergrunddichteverteilung zu beobachten sind, während Solitonen in der nichtlinearen Optik mit der Gruppengeschwindigkeit durch das nichtlineare Medium propagieren.

In ihrer Arbeit [87] gehen Zakharov und Shabat darauf ein, dass Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten abhängig von der atomaren Wechselwirkung in unterschiedlicher Form auftreten. Im Fall attraktiver Wechselwirkung (negative s-Wellen Streulänge  $a_{sc}$ ) treten Solitonen als Dichtemaxima auf (*helle Solitonen*), während im Fall repulsiver Wechselwirkung ( $a_{sc} > 0$ ) Dichteminima zu beobachten sind. Aufgrund der Instabilität von Bose-Einstein Kondensaten attraktiv wechselwirkender Atome [3, 50, 101, 53] und der Instabilität der zugehörigen Solitonen [87] sind bisher nur dunkle Solitonen in Materiewellen experimentell zugänglich.

Im folgenden werden Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung für *repulsive* interatomare Wechselwirkungen diskutiert (siehe z.B. [102, 103]).

Einige Eigenschaften dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten lassen sich analytisch im quasi-eindimensionalen Fall finden. Zur Herleitung geht man von einer Atomwolke aus, die in axialer ( $z$ ) Richtung keinem Potential unterliegt und in radialer Richtung von einem starken harmonischen Fallenpotential eingeschlossen ist <sup>1</sup>. In diesem Fall reduziert sich die Gross-Pitaevskii Gleichung zu

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_0 |\Psi|^2 \right) \Psi . \quad (4.1)$$

Die Wellenfunktion  $\Psi$  des Kondensats kann als Produkt der Wurzel der atomaren Dichte  $n$  und eines Phasenfaktors  $e^{i\Phi}$  geschrieben werden:

$$\Psi = n^{\frac{1}{2}} e^{i\Phi} . \quad (4.2)$$

Mit der superfluiden Geschwindigkeit  $v$ ,

$$v = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial z} , \quad (4.3)$$

und der Annahme, dass sich die Phase in erster Ordnung linear mit  $z$  ändert und höhere Ordnungen zu vernachlässigen sind, ergeben sich durch Einsetzen von (4.2) in (4.1) und Trennen des Imaginär- und Realteils die Kontinuitätsgleichung für die Dichte,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial(nv)}{\partial z} , \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Aufgrund der hohen Anisotropie der im Hannoveraner BEC-Experiment verwendeten Magnetfalle (siehe Kapitel 2.2.3) kommt das experimentell realisierte System dem quasi-1D Fall nahe.

und eine Gleichung für die Phase,

$$\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -nU_0 - \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\hbar^2}{2mn^{1/2}} \frac{\partial^2 n^{1/2}}{\partial z^2} . \quad (4.5)$$

Mit dem chemischen Potential,  $\mu(n) = nU_0$ , und durch Ableiten nach  $z$  ergibt sich aus Gleichung 4.5 die verallgemeinerte Euler Gleichung [102],

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(n) + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\hbar^2}{2mn^{1/2}} \frac{\partial^2 n^{1/2}}{\partial z^2} \right) . \quad (4.6)$$

Solitäre Wellen haben die Eigenschaft, dass die Dichteverteilung und das Fluidgeschwindigkeitsfeld mit einer konstanten Geschwindigkeit,  $u$ , und ohne Formänderung propagieren. Daher dürfen die Solitonenlösungen zu Gl. 4.4 und 4.6 nur über die Kombination  $(z - ut)$  von  $z$  und  $t$  abhängig sein; es gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \text{ und } \frac{\partial n}{\partial t} = -u \left( \frac{\partial n}{\partial z} \right) .$$

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich daher

$$\frac{\partial n}{\partial z} (v - u) = 0 , \quad (4.7)$$

und nach Integration mit der Randbedingung, dass die Dichte weit entfernt von der solitären Welle den Gleichgewichtswert  $n_0$  annehmen muss und die Fluidgeschwindigkeit hier verschwindend sein muss ( $\Phi = cst.$ ):

$$v(z) = u \left( 1 - \frac{n_0}{n(z)} \right) . \quad (4.8)$$

Ein propagierendes dunkles Soliton ( $n_0/n > 1$ ) ist nach Gl. 4.8 immer mit einem Geschwindigkeitsfeld verknüpft, das im Bereich minimaler Dichte des Solitons maximal ist. Die Richtung des Massenstroms ist dabei der Solitonengeschwindigkeit  $u$  entgegengesetzt,  $\text{sign}(v) = -\text{sign}(u)$ . Aus diesem Grund wird, wenn man den Teilchencharakter dunkler Solitonen betrachtet, einem dunklen Soliton eine negative Masse zugeordnet.

Entsprechend zur Kontinuitätsgleichung kann auch Gleichung 4.6 umgeschrieben werden zu

$$-mu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(n) + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\hbar^2}{2mn^{1/2}} \frac{\partial^2 n^{1/2}}{\partial z^2} \right) . \quad (4.9)$$

Nach Integration über  $z$ , Einsetzen von Gl. 4.8 und einigen Umformungen [102] erhält man die Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 n^{1/2}}{\partial z^2} \right)^2 = (nU_0 - mu^2) \frac{(n - n_0)^2}{2n} . \quad (4.10)$$

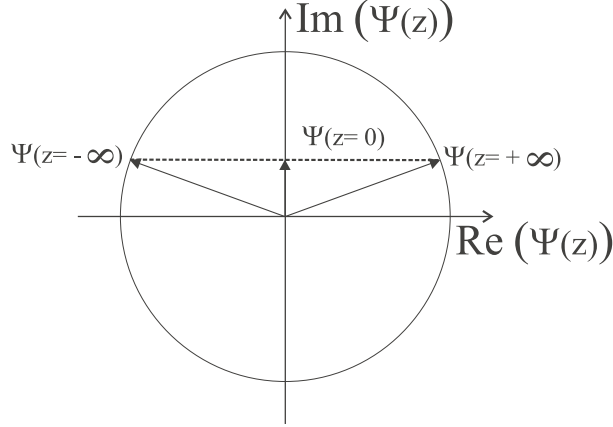


Abbildung 4.1: Die Wellenfunktion nach Gleichung 4.12 mit  $z_s = 0$  in der komplexen Ebene. Da der Imaginärteil der Wellenfunktion konstant ist, liegt die Wellenfunktion für variiertes  $z$  auf einer Geraden (gestrichelte Linie). Die Wellenfunktion hat für  $z = 0$  einen minimalen Betrag. Der dem Soliton entsprechende Phasensprung lässt sich am Winkel zwischen  $\Psi(x = -\infty)$  und  $\Psi(x = +\infty)$  ablesen. Für verschwindende Solitonengeschwindigkeit wird dieser Phasensprung gleich  $\pi$ , die minimale Dichte gleich null. Durch kontinuierliches Erhöhen von  $u$  lässt sich die Wellenfunktion in einen Punkt in der komplexen Ebene, d.h. in den Grundzustand zusammenziehen. Daher sind dunkle Solitonen topologisch instabil (siehe Kapitel 4.2.2).

Aus dieser Gleichung kann man folgende Beziehung zwischen Dichte und Gruppengeschwindigkeit  $u$  der solitären Welle ablesen:

$$(nU_0 - mu^2) \geq 0.$$

Die Dichte des Kondensats muß also zwischen einem Minimalwert  $n_{min}$  und der Hintergrunddichte  $n_0$  liegen. Es gilt mit der Schallgeschwindigkeit  $c_s$ ,  $c_s^2 = n_0 U_0 / m$ :

$$n_{min} = n_0 \frac{u^2}{c_s^2}. \quad (4.11)$$

Hieran sieht man auch, dass die Geschwindigkeit  $u$  des Solitons gerade der Schallgeschwindigkeit bei minimaler Dichte  $n_{min}$  entspricht.

Eine vollständige analytische Lösung von Gl. 4.1 kann mit Hilfe der inversen Streumethode gefunden werden [89, 87]. Die so gefundene Wellenfunktion lautet in der Notation von [104]:

$$\Psi_k(z, t) = \sqrt{n_0} \left( i \frac{u}{c_s} + \sqrt{1 - \frac{u^2}{c_s^2}} \tanh \left[ \frac{z - z_s(t)}{l_0} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c_s^2}} \right] \right). \quad (4.12)$$

Mit der Gross-Pitaevskii Gleichung impliziert diese Wellenfunktion, dass sich die Position  $z_s$  mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegt,  $z_s(t) = z_{s0} + ut$  (*konstante Propagation*). Die

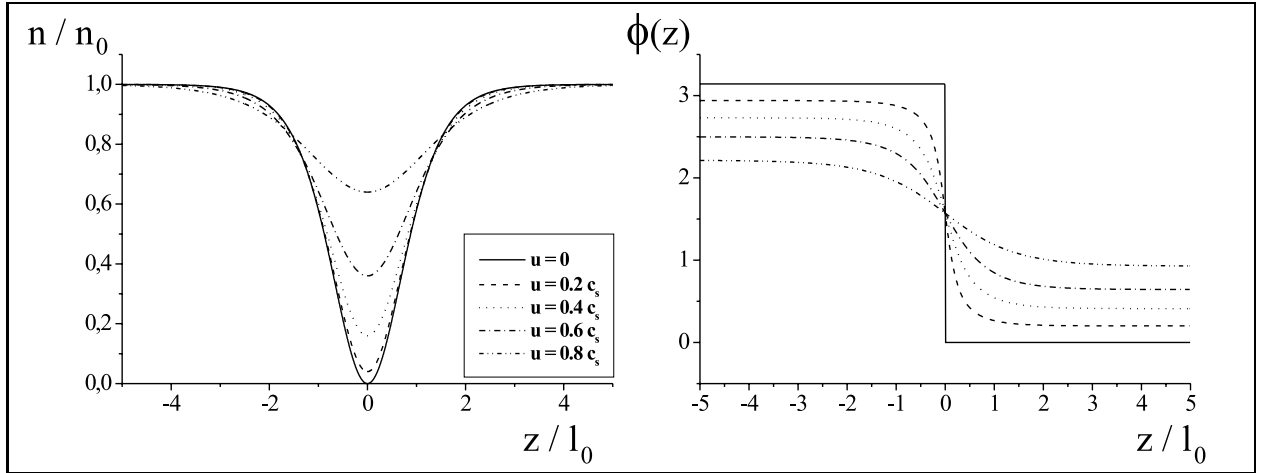


Abbildung 4.2: Die Dichteverteilung und die Phasenverteilung eines dunklen Solitons in einem Bose-Einstein Kondensat für verschiedene Solitonengeschwindigkeiten.

Ortsabhängigkeit der Wellenfunktion skaliert mit der Ausheillänge  $l_0$ , die im quasi-1D Fall als  $l_0 = (4\pi a n_0)^{-1/2}$  definiert ist [104] (*Lokalisation*). Die *Formstabilität* der Solitonenlösung ist daran zu erkennen, dass die einzige zeitabhängige Größe der Lösung die Position des Solitons,  $z_s(t)$ , ist.

In Abb. 4.1 sind Werte der Wellenfunktion im komplexen Raum zu einem festen Zeitpunkt (und für  $z_s = 0$ ) aufgetragen. Da die Solitonengeschwindigkeit  $u$  konstant ist <sup>2</sup>, ist der Imaginärteil der Wellenfunktion konstant. Da  $|\tanh(z/l_0)| \equiv 1$  für  $|z/l_0| \gg 1$ , ändert sich die Wellenfunktion nur in einem Bereich von der Größe  $\approx |l_0|$  um  $z_s$  wesentlich. In diesem Bereich durchläuft die Dichte,  $|\Psi|^2$ , ein Minimum mit einer vollen Halbwertsbreite von etwa  $2l_0/\sqrt{1-u^2/c_s^2}$  (siehe auch Abb. 4.2). Bei einer Dichte von  $n = 5 \cdot 10^{13}$  und den atomaren Konstanten für <sup>87</sup>Rubidium beträgt die volle Halbwertsbreite eines ruhenden dunklen Solitons also etwa  $1.2 \mu\text{m}$ , die eines laufenden dunklen Solitons mit  $u = 0.5 c_s$  etwa  $1.4 \mu\text{m}$ .

An Abb. 4.1 ist auch zu erkennen, dass die Phase der Wellenfunktion vom Ort abhängt. Die relative Phase der Wellenfunktion an zwei Orten  $z_1$  und  $z_2$  entspricht dem Winkel zwischen  $\Psi(z_1)$  und  $\Psi(z_2)$  in der komplexen Ebene. Zwischen den Bereichen  $z \gg l_0$  und  $z \ll -l_0$  liegt also eine von der Solitonengeschwindigkeit  $u$  abhängige Phasendifferenz  $\Delta\Phi$  vor. Für  $u = 0$  entspricht die Phasenverteilung einer Stufenfunktion, da  $\Psi(z)$  auf der reellen Achse verläuft; für endliche Geschwindigkeiten ist der Phasenverlauf arctan-förmig und verläuft auf dem gleichen Maßstab wie die Dichteverteilung (siehe auch Abb. 4.2).

<sup>2</sup>Konstante Solitonengeschwindigkeit gilt für stabile Solitonen, durch dissipative Effekte können Solitonen beschleunigt werden, hierbei ändert sich auch ihre Form (siehe Kapitel 4.2.2).

## 4.2 Eigenschaften dunkler Solitonen

Die im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Lösung der Gross-Pitaevskii Gleichung gilt für ein homogenes eindimensionales System bei der Temperatur  $T = 0$ . Die physikalische Ursache für die Formstabilität von Solitonen in Materiewellen lässt sich mit diesem Modell gut verstehen; die Dispersion (der Term  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  in Gleichung 4.1), die normalerweise für eine Verbreiterung eines Pulses sorgt, wird durch das dichteabhängige *mean-field* Potential gerade kompensiert. Außerdem verdeutlicht dieses Modell die grundlegenden Eigenschaften der Solitonen.

Im folgenden werden Ergebnisse zu Modifikationen durch die experimentellen Randbedingungen kurz dargestellt.

### 4.2.1 Solitonenoszillationen

In der quasi-eindimensionalen Geometrie ohne ein zusätzliches Potential bewegt sich ein Soliton wie ein freies klassisches Teilchen,  $u = const.$ , d.h.  $\ddot{z}_s = \dot{u} = 0$ . Betrachtet man dunkle Solitonen in einer Dimension mit einem zusätzlichen Potential in dieser Dimension,  $V(z)$ , welches in Gl. 4.1 durch den zusätzlichen Term  $V_t(z)\Psi$  eingeht, wird die Bewegung des Solitons durch dieses Potential bestimmt. Unter der Annahme, dass sich  $V_t(z)$  auf der Längenskala des Solitons nur langsam ändert, erhält man eine Bewegungsgleichung für das Zentrum des Solitons,  $z_s$  [105, 106, 107],

$$M_s \ddot{z}_s = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial z} . \quad (4.13)$$

In einem harmonischen Fallenpotential bedeutet dies eine Oszillation des dunklen Solitons der Masse  $M_s$  (siehe Gl. 4.14) mit der  $1/\sqrt{2}$ -fachen Frequenz des Fallenpotentials. In Abb. 4.3 ist die Zeitentwicklung eines dunklen Solitons in einem harmonischen Potential dargestellt, die aus einer numerischen Simulation der Gross-Pitaevskii Gleichung 2.16 in 1D hervorgeht (siehe Kap. 4.3.3). Hier werden die Ergebnisse der analytischen Lösung – sowohl die Oszillation als auch mit hoher Genauigkeit die Oszillationsperiode von  $\omega_s = \omega_z/2\pi$  – bestätigt. Die Oszillation in einem harmonischen Potential ist eine weitere Bestätigung der teilchenartigen Eigenschaften von Solitonen. Die (negative) Masse,  $M_s$ , die einem dunklen Soliton zugeordnet werden kann [107], entspricht der Masse der Atome, die aufgrund der geringeren Dichte um  $z_s$  vom Soliton verdrängt werden müssen. Mit der effektiven Querschnittsfläche des Kondensats  $S$  beträgt diese Masse [104, 108]

$$M_s = 4(n_{min} - n_0)Sl_0m . \quad (4.14)$$

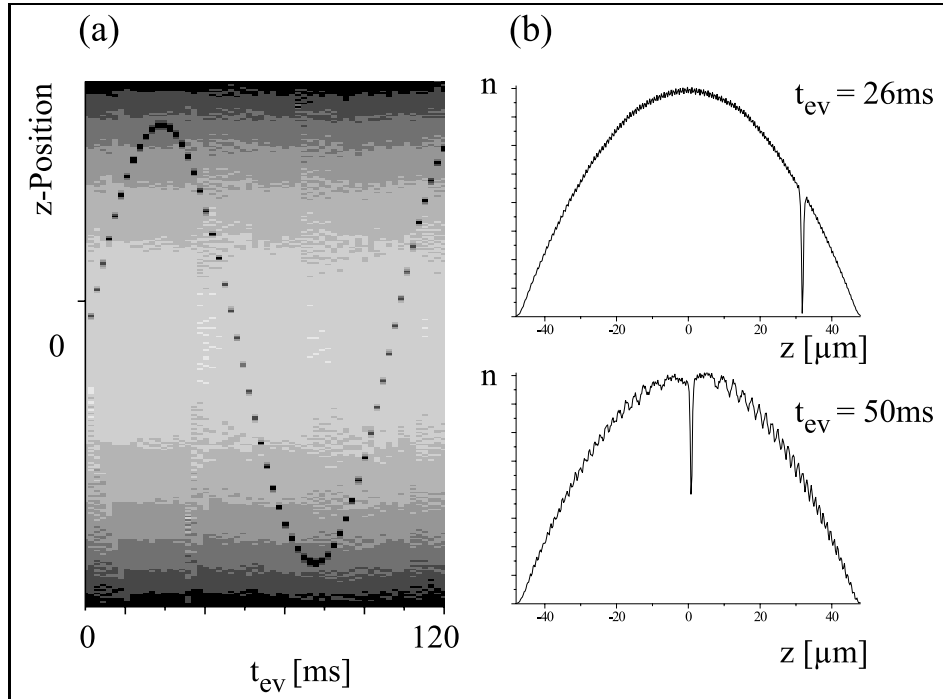


Abbildung 4.3: Ergebnisse einer 1D-Simulation der Gross-Pitaevskii Gleichung zur Dynamik eines dunklen Solitons in einem BEC in einem Potential mit  $\omega_z = 2\pi \cdot 14$  Hz. In der Graustufendarstellung (a) der Dichte  $n(z, t)$  ist das Soliton als formstabiles Minimum zu erkennen, das mit der Frequenz  $\omega_s = \omega_z/\sqrt{2}$  oszilliert. Die 1D-Dichteverteilung (b) nach einer viertel Periode und einer halben Periode zeigt die Erhaltung der Masse des Solitons (siehe Text). Das Soliton wurde in der Simulation durch eine Phasenaufprägung erzeugt; hierbei entsteht kein reiner Solitonenzustand nach Gl. 4.12, daher werden die Fluktuationen in der Hintergrunddichte beobachtet, die die Solitonendynamik in der 1D Simulation aber nicht erkennbar beeinflussen. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen sind im Abschnitt 4.3.4 beschrieben.

Da die Masse erhalten wird, muss auch die absolute „Tiefe“ des dunklen Solitons,  $n_0 - n_{min}$ , erhalten werden. Da sich die Hintergrunddichte  $n_0$  in einem Bose-Einstein Kondensat in einem Fallenpotential aber ändert, wächst die relative Tiefe,  $n_{min}/n_0$ , wenn sich das Soliton aus dem Zentrum des Kondensats wegbewegt (siehe Abb. 4.3). Nach Gleichung 4.11 verringert sich damit auch die Solitonengeschwindigkeit, bis bei  $n_{min} = 0$  der Umkehrpunkt erreicht ist.

## 4.2.2 Stabilität von Solitonen in Materiewellen

Die Wellenfunktion eines fundamentalen dunklen Solitons in 1D,  $\Psi_k(z) = \sqrt{n_0} \tanh(z/l_0)$  (siehe Gleichung 4.12), ist topologisch instabil, da sie sich in beliebig kleinen Schritten durch Addition eines Imaginärteils in die Grundzustandswellenfunktion überführen lässt

(siehe Abb. 4.1). Die Erhöhung des Imaginärteils entspricht einer Erhöhung der Solitonengeschwindigkeit. Eindimensionale dunkle Solitonen zerfallen also, indem ihre Geschwindigkeit  $u$  zunimmt und damit ihre minimale Dichte  $n_{min}$  zunimmt, bis die Wellenfunktion für  $u = v_c$  und  $n_{min} = n_0$  in die Grundzustandswellenfunktion übergeht [104, 107]. Die Lebensdauer eines dunklen Solitons wird entsprechend als die Zeit definiert, in der die Solitonengeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit im Kondensat erreicht [104]. Ausgelöst wird die Dissipation dunkler Solitonen durch die thermalisierende Kopplung an die Umwelt, die in experimentellen Realisierungen im wesentlichen durch die Wechselwirkung der Kondensatatomatome mit Atomen aus der thermischen Wolke gegeben ist; diese Form der Dissipation wird deshalb auch als *thermodynamische Instabilität* bezeichnet. Die Lebensdauer der dunklen Solitonen ist hier also durch die Temperatur des Ensembles bestimmt. Bei völliger Isolation des Ensembles und bei verschwindender Temperatur,  $T = 0$ , sind eindimensionale dunkle Solitonen stabil.

Ein weiterer Dissipationsprozess für dunkle Solitonen, der in dreidimensionalen Kondensaten durch die Kopplung der Anregungszustände untereinander verursacht wird, ist die *dynamische Instabilität* [109, 110]. Durch die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung der Kondensatatomatome wird die mit dem Soliton verbundene kinetische Energie in elementare Anregungen der radialen Freiheitsgrade transferiert. Die Anregung dieser Zustände führt zu transversalen Dichteänderungen und damit zu einer Krümmung der Knotenebene des Solitons. Numerische Simulationen zeigen, dass die so verkrümmte Knotenebene in Vortices zerfällt [111], die unter einer Temperaturerhöhung des Systems dissipieren [101, 26].

Die dynamische Instabilität kann durch spezielle Potentialgeometrien (ein starker radialer Einschluss des BEC, verbunden mit einem hohen Aspektverhältnis) unterdrückt werden [109] (siehe auch Kap.5.4).

In diesem Regime bietet die Beobachtung der Dissipation dunkler Solitonen die Möglichkeit, die Temperatur eines Bose-Einstein kondensierten Ensembles in einem Temperaturbereich zu messen, in dem die thermische Wolke in Absorptionenaufnahmen nicht mehr erkennbar ist, mit herkömmlichen Methoden also keine Messungen der Temperatur mehr möglich sind.

### 4.2.3 Bandlücken-Solitonen

Ein weiterer Bereich intensiver theoretischer Untersuchungen auf dem Gebiet der nicht-linearen Eigenschaften von Bose-Einstein Kondensaten sind Bandlücken-Solitonen (“gap solitons”) [40, 112, 113], die in diesem Abschnitt kurz vorgestellt werden.

Wie in Kap. 4.1 erläutert, sind in dem fundamentalen Fall eines Bose-Einstein Kondensats mit repulsiven Wechselwirkungen in einem Potential, das sich auf Größenordnungen der



Ausheillänge nur langsam ändert, nur dunkle Solitonenlösungen in Form eines formstabil propagierenden Dichteminimums möglich. Im Gegensatz dazu ist es in speziellen Potentialgeometrien möglich, die Dispersionsrelation der Atome derart zu verändern, dass den einzelnen Atomen eine negative Masse zugeordnet werden kann und somit „helle“ Solitonenlösungen trotz repulsiver Wechselwirkungen möglich sind. In diesem Fall propagiert das gesamte Kondensat formstabil mit der Solitonengeschwindigkeit durch das Potential, z.B. ein optisches Gitter. Als wichtiger Anwendungsbereich von Bandlücken-Solitonen werden interferometrische Konzepte diskutiert [113].

Eine andere Möglichkeit der Erzeugung von hellen Solitonen in Materiewellen bietet schließlich die Induzierung einer atomaren Nichtlinearität – ähnlich dem Kerr-Effekt in der nichtlinearen Optik – durch geeignete Laserfelder. Dies ist auch in atomaren Dichtebereichen möglich, in denen die interatomare Wechselwirkung über die s-Wellen Streuung keine Rolle spielt. Als ein Beispiel wird das Führen kalter (aber nicht Bose-Einstein kondensierter) Atome in einem Gaußschen Laserstrahl vorgeschlagen, das in einer formstabilen Propagation atomarer Solitonen resultiert [114].

### 4.3 Erzeugungsmöglichkeiten dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten

Zur Erzeugung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten werden verschiedene Methoden vorgeschlagen.

Solitonen können sich in gefangenen Bose-Einstein Kondensaten als Antwort des nichtlinearen Systems auf eine passend gewählte Modulation des Fallenpotentials ausbilden [115, 116]. Eine nichtadiabatische Änderung des Fallenpotentials, ähnlich der Methode zur Erzeugung von Schallwellen in Kondensaten [117] kann zu Überlagerungszuständen mehrerer Solitonen führen [118]. Auch bei der Expansion von Bose-Einstein Kondensaten in Kastenpotentialen bilden sich Solitonen und Vortices aus [119]. Und es wird erwartet, dass bei der Kollision zweier Bose-Einstein Kondensate Solitonen entstehen [105, 120].

Eine weitere Methode zur Erzeugung von Solitonen wird von R. Dum *et al.* [121] vorgeschlagen. Hier sorgen mit Hilfe eines adiabatisch durchgestimmten Laserstrahls lokal induzierte Ramanübergänge zwischen verschiedenen internen Zuständen der Kondensatome für die Möglichkeit, „maßgeschneiderte“ Wellenfunktionen zu erzeugen, z.B. Solitonen- oder Vortextzustände.

Die einzige bisher experimentell realisierte Methode zur Erzeugung von Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten besteht in einer lokalen Beeinflussung der Phasenverteilung des

Bose-Einstein Kondensats [29]. Diese Methode erlaubt die kontrollierte Erzeugung verschiedener energetisch niedriger, angeregter Zustände in Bose-Einstein Kondensaten; sie wird im folgenden detailliert vorgestellt.

### 4.3.1 Die Phasenaufprägungsmethode

Die Phasenaufprägungsmethode ( *“phase imprinting method”*, [29]), beruht darauf, die Phasenverteilung der makroskopischen BEC-Wellenfunktion, nicht aber die Dichteverteilung oder die Verteilung auf die internen Zustände lokal zu ändern. Sie wurde in den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten zur kontrollierten Erzeugung von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten [24], sowie in [25] erstmalig eingesetzt.

Zum Aufprägen der Phasenverteilung wird das Bose-Einstein Kondensat kurzzeitig einem zusätzlichen, inhomogenen Potential,  $U_{imp}(\vec{r})$ , ausgesetzt. Dies resultiert in einer ortsabhängigen Entwicklung der Wellenfunktion des Kondensats,  $\Psi(\vec{r}, t)$ , und damit in einer nichttrivialen räumlichen Phasenverteilung.

Um zu gewährleisten, dass der Effekt des Potentials hauptsächlich eine Phasenänderung ist und eine Änderung der Dichte während dieser Zeit zu vernachlässigen ist, muss die Pulsdauer  $t_p$  kurz gegenüber der Korrelationszeit des Kondensats,  $t_c$ , sein:

$$t_p \ll t_c \tag{4.15}$$

$$t_c = l_0/c_s \equiv m/(4\pi\hbar a_{sc}n_0) . \tag{4.16}$$

Die Korrelationszeit ist die Zeitdauer, in der sich eine Störung mit der Schallgeschwindigkeit über die Ausheillänge im Kondensat fortpflanzt. Für typische Teilchendichten liegt die Korrelationszeit im Bereich von  $100 \mu\text{s}$ .

Unter Vernachlässigung der Änderung der Dichte während der Pulsdauer (für  $t_p \rightarrow 0$  bzw.  $t_p \ll t_c$ ) ist der Effekt der Phasenaufprägung folgende Änderung der Wellenfunktion:

$$\Psi(\vec{r}, t_0 + t_p) = \exp\left(-i\frac{U_{imp}(\vec{r})t_p + \text{const.}}{\hbar}\right) \Psi(\vec{r}, t_0) . \tag{4.17}$$

In der weiteren Entwicklung dieser Wellenfunktion müssen sich die Dichte- und Phasenverteilung aneinander „anpassen“, d.h. durch eingeprägte Phasengradienten  $\nabla\Phi$  in der Wellenfunktion kommt es zu einem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  (siehe Gl. 4.3). Dieses wiederum führt auf einer Zeitskala der Korrelationszeit  $t > t_c$  zu einer veränderten Dichteverteilung. Da die Dichteverteilung über den nichtlinearen Term in der Gross-Pitaevskii Gleichung auf

die Phasenentwicklung rückwirkt, ist die zeitliche Entwicklung äußerst kompliziert und analytisch nicht zu lösen. Das Verhalten des Systems wird daher mit numerischen Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung untersucht.<sup>3</sup>

Die durch die Phasenaufprägung erzeugte Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t > t_0 + t_p)$  ist im allgemeinen eine Überlagerung vieler fundamentaler Zustände. Die Ergebnisse numerischer Simulationen (siehe Kap. 4.3.3) zeigen, dass wenn die aufgeprägte Phasenverteilung ähnlich der eines bestimmten Zustandes,  $\Psi_{top}(\vec{r}, t)$  (“*topological texture*”), wie eines Vortex- oder Solitonenzustandes, ist, im erzeugten Überlagerungszustand nach einer Entwicklungszeit Signaturen dieses Zustandes enthalten sind. In der Zeitentwicklung des Kondensats (vergleichbar mit dem Fernfeld in der Optik, z.B. nach Durchgang eines Laserstrahls durch ein Hologramm) wird ein Zustand erzeugt, der lokal die Eigenschaften von  $\Psi_{top}(\vec{r}, t)$  hat, also zum Beispiel eine Vortexlinie mit zirkular quantisierter Phase oder ein formstabiles Dichteminimum mit dem charakteristischen Phasensprung eines Solitons, der aber auch zusätzliche Dichtewellen, Anregungen, Vortices oder Solitonen enthalten kann (“vorticity”) [122].

Phasenaufprägungsmethoden werden auch in der Optik verwendet; ein Beispiel hierfür ist die Erzeugung dunkler Solitonen in der nichtlinearen Optik mit Hilfe der Phasenmodulation des in einer Glasfaser propagierenden Lichtfeldes (siehe Kapitel 3.2.1). Der Einsatz der Phasenaufprägungsmethode zur Erzeugung nichttrivialer Konfigurationen von Bose-Einstein Kondensaten wird zur Zeit auch intensiv in theoretischen Arbeiten diskutiert. Aktuelle Arbeiten beschäftigen sich u.a. mit der Erzeugung von periodischen Anordnungen von Vortices [123] und mit schwarzen Löchern für Schallwellen in Bose-Einstein Kondensaten [124].

### 4.3.2 Erzeugung dunkler Solitonen mit der Phasenaufprägungsmethode

Bei der Erzeugung von Solitonen mit der Phasenaufprägungsmethode werden an das aufprägende Potential im wesentlichen zwei Anforderungen gestellt: Zum einen muss es nach Bedingung 4.15 innerhalb von Mikrosekunden schaltbar sein (für typische atomare Dichten beträgt die Korrelationszeit  $t_c \approx 100 \mu\text{s}$ ). Zum anderen muss der für Solitonen typische scharfe Phasengradient (siehe Abb. 4.1) in der Größenordnung der Ausheillänge des Kondensats,  $l_0$ , erzeugt werden.

---

<sup>3</sup>Ergebnisse im Rahmen dieser Arbeit durchgeführter Simulationen zeigen, dass es durch eine Kombination der Phasenaufprägung mit einer Anpassung der Dichteverteilung (“*tailoring of wavefunctions*”), zum Beispiel durch einen lokal eingestrahnten, resonanten Laserstrahl, der die Dichteverteilung direkt beeinflusst, in experimentell zugänglichen Parameterbereichen möglich ist, Zustände zu erzeugen, die sich nicht mehr dynamisch verändern (z.B. fundamentale Solitonen).

Diese Anforderungen werden von optischen Dipolpotentialen, die mit weit verstimmtten Laserfeldern erzeugt werden, erfüllt (siehe Anhang A). Mit Hilfe von akustooptischen Modulatoren lässt sich die Laserstrahlung in Zeiten  $t < 1 \mu\text{s}$  effektiv schalten. Die optische Auflösung ist prinzipiell auf die Größenordnung der verwendeten optischen Wellenlänge begrenzt. In den verwendeten Parameterbereichen liegt diese in der Größenordnung der Ausheillänge im Kondensat. Mit Abbildungssystemen großer numerischer Apertur (siehe Kap. 5.1.2), die im wesentlichen durch Beugungseffekte limitiert sind, ist es also möglich, einen dem dunklen Soliton entsprechenden Phasengradienten abzubilden.

Bei der Verwendung von Laserfeldern zur Manipulation der Atome müssen spontane Prozesse ausgeschlossen werden, da diese die Kohärenz des Ensembles zerstören. Dies gelingt durch die Verwendung von weit gegenüber atomaren Resonanzen verstimmttem Licht (siehe Anhang A). Experimentell wurde der Kohärenzerhalt während der Wechselwirkung mit Dipolpotentialen durch Selbstinterferenzen nach der kohärenten Reflexion von Bose-Einstein Kondensaten an atomoptischen Spiegeln demonstriert [9].

### 4.3.3 Numerische Simulationen zur Erzeugung dunkler Solitonen mit der Phasenaufprägungsmethode

Um die komplexe, analytisch nicht lösbare Dynamik bei der Entstehung von Solitonen durch Phasenaufprägung charakterisieren zu können, wurde im Zusammenhang mit dieser Arbeit die Dynamik von Bose-Einstein Kondensaten in verschiedenen Modellen numerisch simuliert. In der Gruppe von M. Lewenstein wurden Simulationen der 1D und der 3D Gross-Pitaevskii Gleichung, die auf der „Methode getrennter Operatoren“ (*split operator method*) [125] beruhen, durchgeführt. In der Gruppe von G. Shlyapnikov wurden vergleichbare 1D Simulationen durchgeführt, die insbesondere die simultane Erzeugung mehrerer Solitonen untersuchten. Des weiteren wurde im Rahmen dieser Arbeit ein auf den 1D Simulationen der Gruppe M. Lewenstein beruhender Programmcode in der Programmiersprache „C++“ erstellt, der eine schnelle und übersichtliche Diagnose der Dynamik der Bose-Einstein Kondensate in unterschiedlichen Situationen erlaubt <sup>4</sup>. Dieses Simulationsprogramm wird im folgenden kurz erläutert.

#### Das Simulationsprogramm

Um die Gross-Pitaevskii Gleichung numerisch zu lösen, wird die Methode getrennter Operatoren in zwei Schritten durchgeführt.

---

<sup>4</sup>Alle in dieser Arbeit abgebildeten, numerisch errechneten Dichte- und Phasenverteilungen sind Ergebnisse dieses Programms.

Im ersten Schritt wird die Wellenfunktion eines nicht angeregten BEC im vorgegebenem Potential  $V_{trap}(z)$  und zur Teilchenzahl  $N$  ermittelt, indem eine (im Prinzip beliebige) Probestfunktion eine imaginäre Zeitentwicklung durchläuft, bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Die axialen Ortspositionen sind dabei in Intervalle  $dz \ll l_0$  diskretisiert. Die Stärke des radialen Einschlusses geht über den Nichtlinearitätsparameter  $U_0$  in die Entwicklung ein [126]. Der so erreichte Zustand entspricht der Wellenfunktion des Bose-Einstein Kondensats im Grundzustand des Potentials.

Im zweiten Schritt wird zuerst ein Phasenverlauf  $\phi(z)$  zur Phase der Wellenfunktion addiert und dann eine reelle Zeitentwicklung gemäß der Gross-Pitaevskii Gleichung durchgeführt:

Die Addition eines Phasenverlaufs entspricht dem experimentellen Aufprägen der Phase durch ein Dipolpotential während einer Zeitdauer  $\tau \ll t_c$  (siehe Gl. 4.17). Zur Erzeugung von Solitonenzuständen wird der Phasenverlauf

$$\phi(z) = \frac{\Delta\phi}{2} \left( 1 + \tanh \left[ \frac{z - z_0}{0.45 l_e} \right] \right) \quad (4.18)$$

gewählt,  $\Delta\phi$  ist dabei die Amplitude des Phasensprunges und liegt typischerweise bei  $0.5 \dots 2\pi$ . Die Position  $z_0$  entspricht der Position des Phasensprunges und damit der Stelle, an der das dunkle Soliton erzeugt wird.  $l_e$  ist die Länge, auf der der Phasenverlauf von 10% auf 90% der Gesamtdifferenz ansteigt und wird typischerweise in der Größenordnung der experimentell erreichbaren Parameter von  $l_e = 2 \dots 3 \mu\text{m}$  gewählt.

Nach der so erfolgten Phasenaufprägung erfolgt eine Zeitevolution der Dauer  $t_{ev}$  im Kondensat entsprechend Gl. 2.16. Die Zeitschritte  $dt$  werden so klein gewählt, dass der Fehler, der durch eine Teilung des Hamiltonoperators in ein Produkt aus den (nicht kommutierenden) Impulsoperator- und Ortsoperator-Anteilen entsteht, zu vernachlässigen ist. So können diese *nacheinander* auf die Wellenfunktion, die je nach Operator in Orts- oder Impulsdarstellung beschrieben wird, wirken (*split operator method*).

Nach der Zeitentwicklung des BEC in der Magnetfalle wird die freie Expansion des Kondensats durch Abschalten des Fallenpotentials und durch Verringern der Nichtlinearität gemäß  $U_0(t_{TOF}) = U_0(0)/\sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t_{TOF}^2}$  [108] nachvollzogen. Die Dichte- und die Phasenverteilung des BEC werden zu wählbaren Zeiten während der Evolution  $t_{ev}, t_{TOF}$  ausgegeben und stehen der Analyse zur Verfügung.

In den nächsten Abschnitten werden die unterschiedlichen Aspekte der Kondensatdynamik nach der Phasenaufprägung für experimentell relevante Parametersätze diskutiert <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Die Simulationen gehen, wenn nicht anders angemerkt, von  $N = 10^5$  <sup>87</sup>Rubidium-Atomen in dem Potential einer Ioffe-Falle mit  $\omega_z = 2\pi \cdot 14 \text{ Hz}$  und  $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 425 \text{ Hz}$  aus.

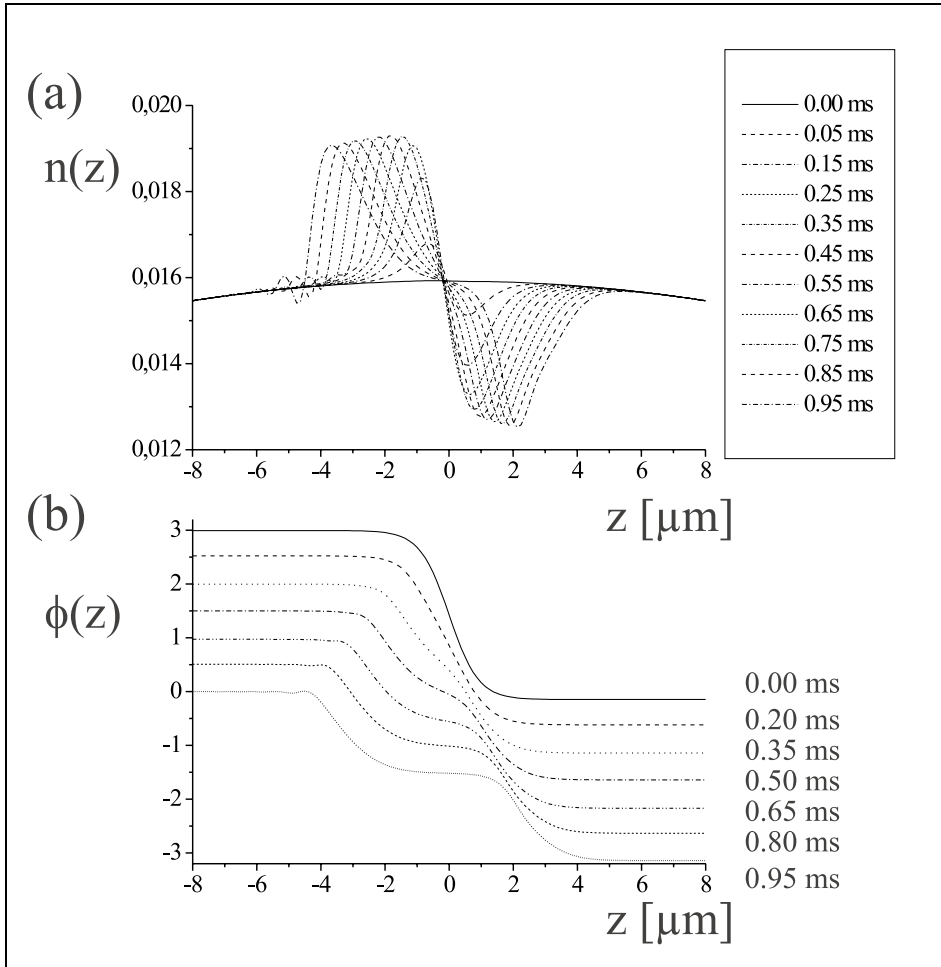


Abbildung 4.4: Die Entwicklung der Dichte und der Phase in der ersten ms nach der Phasenaufprägung.

### Entstehung dunkler Solitonen

Die Dynamik von dunklen Solitonen, die in Potentialen mit hohem transversalem Einschluss und relativ schwachem axialem Einschluss in axialer Richtung propagieren, wird sehr gut durch die 1D Gross-Pitaevskii Gleichung beschrieben. Dies zeigen Vergleiche zwischen Simulationen der 1D- und Simulationen der 3D-Gross-Pitaevskii Gleichung [127]<sup>6</sup>. In der folgenden Beschreibung wird daher nicht explizit zwischen der 1D-Situation der Simulationen und der (realen) 3D Situation unterschieden.

Vor dem Zeitpunkt der Phasenaufprägung ändert sich die Dichte des BEC auf Längen-

<sup>6</sup>Neue Ergebnisse numerischer 3D Simulationen aus der Gruppe von G. Shlyapnikov zeigen, dass sich nach der Phasenaufprägung zunächst solitonenähnliche Dichteminima ausbilden, deren radialer Verlauf – wegen des Dichteprofiles in radialer Richtung – nicht zeitlich konstant ist. Diese Minima gehen in einer Zeit  $\tau \approx \omega_{\perp}^{-1}$ , kurz gegenüber typischen Evolutionszeiten in der Magnetfalle  $t_{ev}$ , in dunkle Solitonen über [108, 128].

skalen der Ausheillänge nur sehr langsam; der Verlauf der Dichte gleicht einer invertierten Parabel (Gl. 2.20, Abb. 2.2). Gleichzeitig ist die Phasenverteilung  $\phi(z)$  konstant, es gibt also keine Geschwindigkeitsfelder  $v_z(z) = (\hbar/m)\partial\phi(z)/\partial z$  im BEC. Diese Situation ändert sich durch das aufgeprägte Feld von Phasengradienten um die Position  $z_0$ . Mit den Phasengradienten wird dem Kondensat ein Geschwindigkeitsfeld  $v(\vec{r})$  aufgeprägt.

Abb. 4.4 zeigt den Verlauf der Kondensatdichte und der Phase in der ersten Millisekunde nach der Phasenaufprägung. Der Verlauf des aufgeprägten Potentials entspricht der Phasenverteilung für  $t_{ev} = 0$ ; der Phasensprung beträgt hier  $\Delta\phi = \pi$  auf einer Länge von  $l_e = 2\ \mu\text{m}$  im Zentrum des Kondensats,  $z_0 = 0$ . Am Verlauf der Dichte  $n(z)$  sieht man, dass der Massentransport, der mit dem Geschwindigkeitsfeld  $v_z(z)$  verbunden ist, dazu führt, dass die Dichte in der Region  $\partial v_z/\partial z > 0$  ( $z > z_0$ ) reduziert wird, während in der Region  $\partial v_z/\partial z < 0$  ( $z < z_0$ ) ein Dichtemaximum entsteht. Während der ersten  $300\ \mu\text{s}$  der Zeitentwicklung bilden sich diese Extrema bis zu einer relativen Höhe bzw. Tiefe von etwa 1.2 bzw. 0.8 aus. Während dieser Zeit bleibt die Phasenverteilung qualitativ unverändert, und die Positionen der Extrema sind demzufolge stabil. Nach etwa  $300\ \mu\text{s}$  beginnt die veränderte Dichteverteilung, die Phasenevolution deutlich zu beeinflussen, und der für die Dynamik entscheidende Bereich mit maximalem Gradienten teilt sich in zwei Bereiche etwa gleich hoher Phasengradienten, von denen einer nach links propagiert und mit einem Dichtemaximum verbunden ist und einer zu positiven z-Werten propagiert und mit einem Dichteminimum verbunden ist.

Während sich die zu negativen Werten laufende Dichtewelle aufgrund des Terms kinetischer Energie und aufgrund des Wechselwirkungsterms in der Wellengleichung verbreitert, überkompensiert beim zu positiven z-Werten laufenden Dichteminimum die verringerte Wechselwirkungsenergie den Effekt der Dispersion durch den Term kinetischer Energie. So kommt es zu einer Aufsteilung des Phasenverlaufs (siehe Abb. 4.5(b)) und zu einer Verengung des Dichteminimums unter der Abspaltung eines zweiten Dichteminimums, das in positiver z-Richtung propagiert (siehe Abb. 4.5(a)) und unter der Abspaltung von Dichtewellen kleiner Amplitude (siehe Abb. 4.6).

Das so entstandene ausgeprägte Minimum mit dem zugehörigen tanh-förmigen Phasenverlauf propagiert formstabil und ist damit eine solitäre Welle. Die Entstehungszeit des Dichteminimums nach der Phasenaufprägung beträgt mit  $t_{ev} \approx 300\ \mu\text{s}$  einige Korrelationszeiten ( $t_c = 60\ \mu\text{s}$ ), die Zeit zur vollständigen Ausbildung des Solitons und zur Abtrennung der sonstigen Strukturen liegt etwa eine Größenordnung darüber (siehe Abb. 4.5). Die Höhe des mit dem Soliton verbundenen Phasensprunges, die nach Gl. 4.12 mit der Solitonengeschwindigkeit  $u$  und der Solitonentiefe  $n_{min}/n_0$  verbunden ist, beträgt etwa die Hälfte des aufgeprägten Wertes  $\Delta\phi$ .

Dieses Verhalten kann anschaulich mit fundamentalen Erhaltungssätzen verstanden wer-

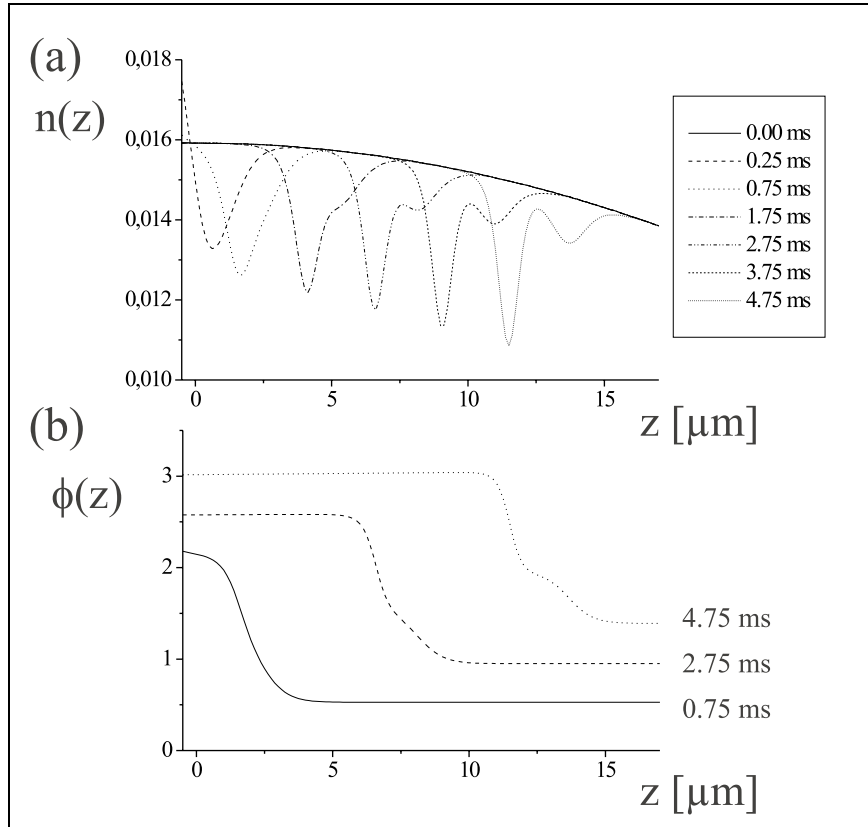


Abbildung 4.5: Die Entstehung eines dunklen Solitons aus einem Dichteminimum und einem damit verbundenen starken Phasengradienten innerhalb der ersten ms nach Aufprägen der Phasenverteilung. (a) Dichteverteilung im BEC nach unterschiedlichen Entwicklungszeiten  $t_{ev}$ ; nach etwa zwei ms spaltet sich unter der Verengung des Minimum ein zweites Minimum ab. Dies ist verbunden mit einer Aufteilung des Phasenverlaufs in eine steilere Flanke und eine weniger steile Flanke (b).

den <sup>7</sup>: Aufgrund der *Energieerhaltung* muss die Phasendifferenz zwischen zwei von der Dynamik noch nicht beeinflussten Orten konstant  $= \Delta\phi$  sein und damit der aufgeprägten Phasendifferenz entsprechen. Der bei der Solitonenbildung entstehende, mit dem Geschwindigkeitsfeld  $v(\vec{r})$  verbundene Massenstrom unterliegt der *Impulserhaltung*, muss also mit einem Phasengradienten verbunden sein. Das Soliton muss daher mit einem Bruchteil des aufgeprägten Phasengradienten auskommen; dieser beträgt  $\approx \Delta\phi/2$ , weil die Masse des dunklen Soliton nach Gl. 4.14 dem negativen der in den Dichtewellen transportierten Masse entspricht (*Massenerhaltung*).

Auch das zweite im Einschnürungsprozess entstandene Minimum (Abb. 4.5,  $t_{ev} = 4.75$  ms) propagiert formstabil und ist mit einem Phasensprung verbunden. Es entspricht

<sup>7</sup>Diese Betrachtung gilt für den Fall vernachlässigbarer Änderungen der Hintergrunddichte im Bereich der Strukturen, wie er im Fallenzentrum und für kurze Entwicklungszeiten gegeben ist.



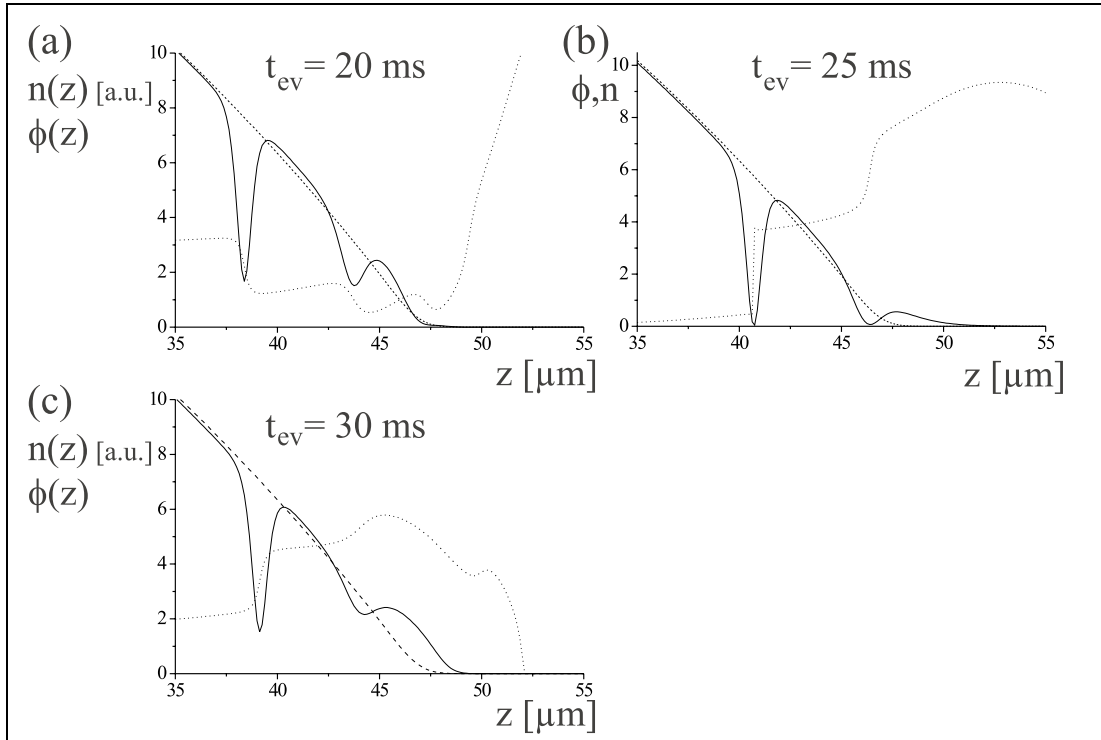


Abbildung 4.6: Reflexion zweier dunkler Solitonen im Randbereich eines Bose-Einstein Kondensats. Die durchgezogenen Linien geben die Dichteverteilung wieder, die gepunkteten Linien entsprechen dem Phasenverlauf, und die gestrichelten Linien entsprechen der Dichteverteilung des Grundzustandes vor der Phasenaufprägung. Das Soliton geringerer negativer Masse wird im äußersten Randbereich des BEC reflektiert und kann dabei von Dichtewellen stärker beeinflusst werden als das Soliton höherer negativer Masse (erkennbar an der geringeren Tiefe des zweiten Solitons in c).

einem dunklen Soliton geringerer Masse und damit höherer Geschwindigkeit und niedrigerer Tiefe.

Die Situation ändert sich, wenn die Solitonen in ein Gebiet wesentlich geringerer Hintergrunddichte im BEC gelangen: beide Solitonen vergrößern beim Erreichen des Randbereiches des BEC (siehe Abb. 4.6) ihren Phasensprung, werden langsamer und kehren ihre Bewegungsrichtung um, bevor sie den Rand des BEC erreichen können (vergleiche Kap. 4.2.1, Abb. 4.3).

Im Gegensatz dazu läuft eine Dichtewelle, die den Rand des BEC erreicht, aus dem Bereich, den der Grundzustand einnimmt, heraus und wird weiter außen am harmonischen Fallenpotential reflektiert. Dies ist der Grund dafür, dass die Wellenfunktion in Abb. 4.6 sich in Bereiche erstreckt, in denen die Grundzustandswellenfunktion verschwindet.

Entscheidende Parameter der Dynamik der Entstehung von dunklen Solitonen sind sowohl die Breite  $l_e$  als auch die Höhe  $\Delta\phi$  der aufgeprägten Phase. Wird  $l_e$  wesentlich größer

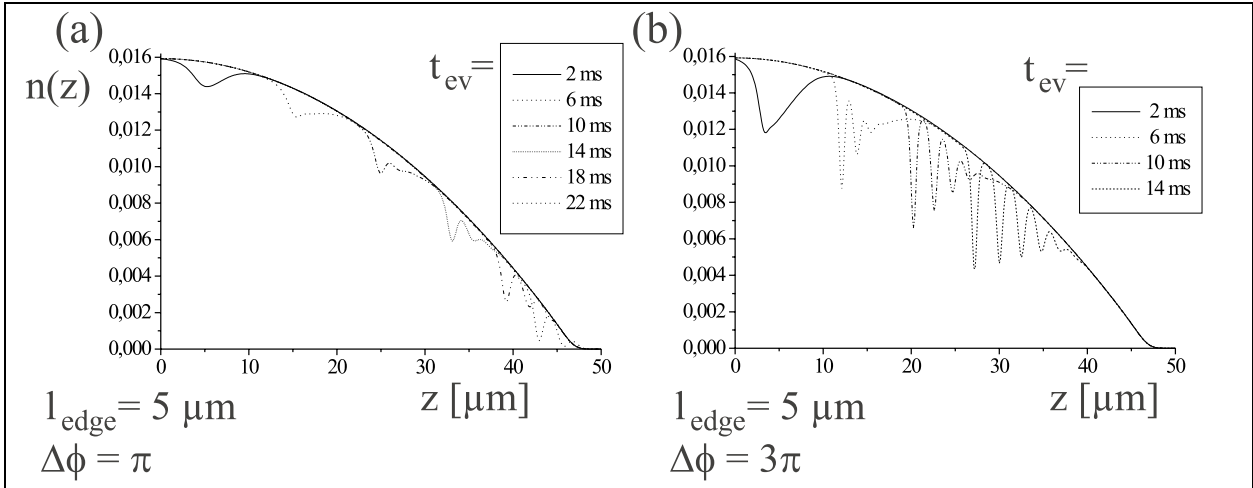


Abbildung 4.7: Dichteverteilung in einem BEC zu unterschiedlichen Zeiten  $t_{ev}$  nach der Aufprägung einer Phase mit  $l_e = 5 \mu\text{m}$  und  $\Delta\phi = \pi$  (a). Der Vergleich mit Abb. 4.5 zeigt den Einfluss der Breite  $l_e$  auf die Dynamik der Solitonenentstehung. (b) Entstehung mehrerer dunkler Solitonen für eine Phasendifferenz  $\Delta\phi = 3\pi$ .

als die Ausheillänge,  $l_e \gg l_0$ , so wird die Dauer der Ausbildung der dunklen Solitonen wesentlich verzögert, und es können nur Solitonen geringer Tiefe entstehen. In Abb. 4.7(a) sind Dichteprofile eines BEC zu unterschiedlichen Zeiten  $t_{ev}$  nach der Phasenaufprägung mit den Parametern  $l_e = 5 \mu\text{m}$  und  $\Delta\phi = \pi$  dargestellt. Das dunkle Soliton ist hier erst nach etwa 20 ms voll ausgebildet und ist von so geringer Tiefe, dass es erst im äußersten Randbereich des Kondensats reflektiert wird, wo seine Entwicklung durch die Auswirkungen von Dichtewellen beeinflusst wird, sodass seine Form bei der Oszillation im Fallenpotential nicht erhalten bleibt.

Ein höherer Phasengradient bei gleicher Breite (Abb. 4.7(b)) bewirkt eine Beschleunigung der Ausbildung von Solitonen, führt gleichzeitig aber auch zur Ausbildung einer Vielzahl von Solitonen.

Im folgenden werden die Abhängigkeiten der Eigenschaften der erzeugten Solitonen von den Parametern der Phasenaufprägung diskutiert.

## Abhängigkeit der Solitoneneigenschaften von $l_e$ und $\Delta\phi$

Wie die Dynamik der Solitonenentstehung sind auch die Eigenschaften der voll ausgebildeten dunklen Solitonen von dem Verlauf der eingepprägten Phase abhängig. Dabei sind die erzeugten Solitonen dem fundamentalen dunklen Soliton um so ähnlicher, je höher der Phasengradient ist, d.h. je kleiner die Breite  $l_e$  und je größer die Phasendifferenz  $\Delta\phi$  ist.

Diese Abhängigkeiten der Solitonengeschwindigkeit  $u$  wurden in Zusammenarbeit mit A. Sanpera untersucht und sind in Abb. 4.8 dargestellt; die aufgetragenen Geschwindigkeiten sind linear genäherte Geschwindigkeiten der Solitonen im zentralen Bereich des Kondensats und sind mit den jeweils langsamsten und damit tiefsten Solitonen assoziiert.

In neueren numerischen Rechnungen von M. Girardeau und E. M. Wright wurde auch die Erzeugung dunkler Solitonen in eindimensionalen Bose-Einstein Kondensaten aus *stark* wechselwirkenden Teilchen mit Hilfe der Phasenaufprägungsmethode simuliert [129]. Die Ergebnisse bestätigen qualitativ die hier vorgestellten Abhängigkeiten vom aufgeprägten Phasenunterschied.

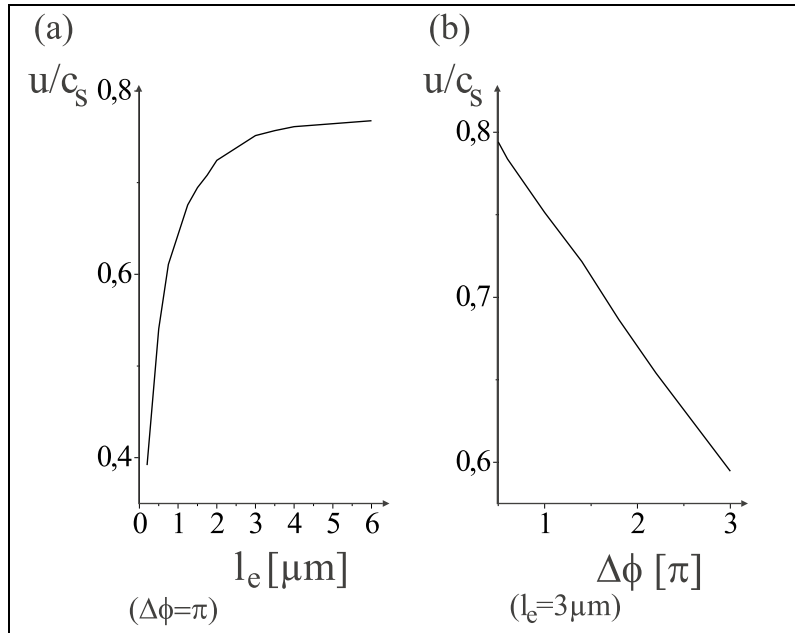


Abbildung 4.8: Ergebnisse numerischer Simulationen zur Abhängigkeit der Solitonengeschwindigkeit  $u$  in Einheiten der Schallgeschwindigkeit  $c_s$  von den Parametern der aufgeprägten Phase [127]. Die Teilchenzahl beträgt  $N = 1,5 \cdot 10^5$ , in (a) beträgt die Phasendifferenz  $\Delta\phi = \pi$ , in (b) beträgt die Breite des Phasengradienten  $l_e = 3 \mu\text{m}$ .

## Entstehung und Dispersion einer Dichtewelle

Aufgrund der Massen- und Impulserhaltung im Kondensat entsteht gleichzeitig mit dem dunklen Soliton negativer Masse ein Bereich erhöhter Dichte, mit Geschwindigkeiten  $v(\vec{r})$  in Richtung des aufgeprägten Phasengradienten. Die Evolution der für die Parameter  $\Delta\phi = \pi$  und  $l_e = 2\mu\text{m}$  erzeugten Dichtewelle ist in Abb. 4.9 dargestellt. Die Bewegung der Struktur findet hier in Richtung des Phasengradienten (in negativer  $z$ -Richtung) statt, weil die Dichtewelle mit dem Transport einer (positiven) Masse verbunden ist, im Gegensatz zur negativen Masse des Solitons, die sich entgegen dem Phasengradienten bewegt.

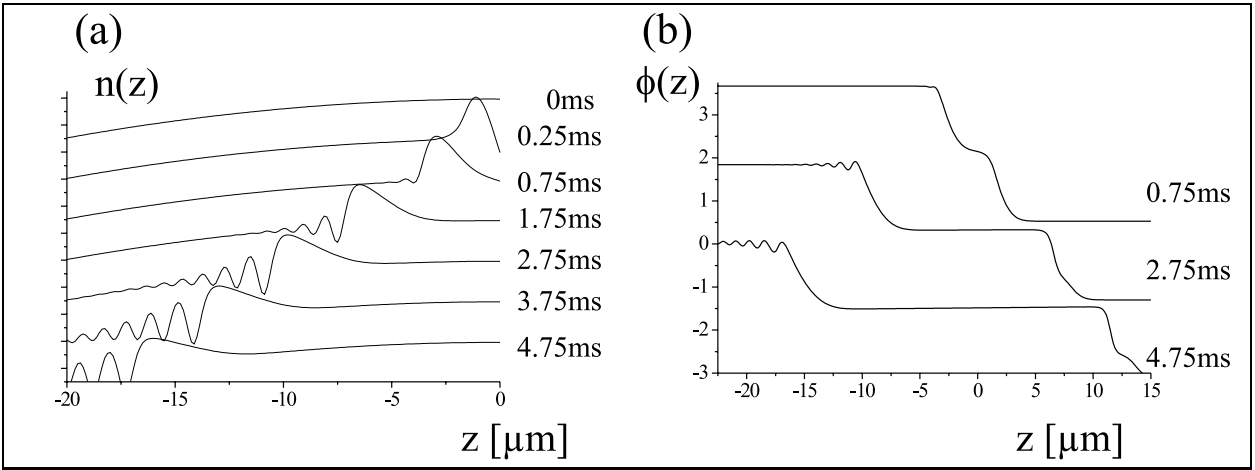


Abbildung 4.9: Dichte- und Phasenverteilung des Massenstroms im Kondensat in Richtung des aufgeprägten Phasengradienten. Eine Abflachung und Verbreiterung des Dichtemaximums unter Abspaltung weiterer Dichtewellen bei einer gleichzeitigen Verbreiterung des Phasengradienten ist zu beobachten. Das (mit identischen Parametern) gleichzeitig erzeugte dunkle Soliton ist in Abb. 4.5 dargestellt.

Abb. 4.10a zeigt die Dichteverteilung des BEC nach variierten Zeiten  $t_{ev}$  in der Magnetfalle und Expansionszeiten von jeweils  $t_{TOF} = 4\text{ms}$ . Bemerkenswert ist, dass während der Expansionszeit im Bereich zwischen dem Maximum der Dichtewelle und der Einstrahlposition  $x_0$  ein Dichteminimum entsteht, das auch nach der Faltung mit einer Transferfunktion (zur Modellierung des Einflusses der endlichen Auflösung des Detektionssystems in der experimentellen Realisierung) deutlich zutage tritt (Abb. 4.10b). Während das Maximum der Dichtewelle mit der Schallgeschwindigkeit im Kondensat propagiert, geschieht die Veränderung der Position dieses Minimums mit der Evolutionszeit  $t_{ev}$  mit etwa der halben Geschwindigkeit, also etwa mit der Geschwindigkeit typischer erzeugter Solitonen.

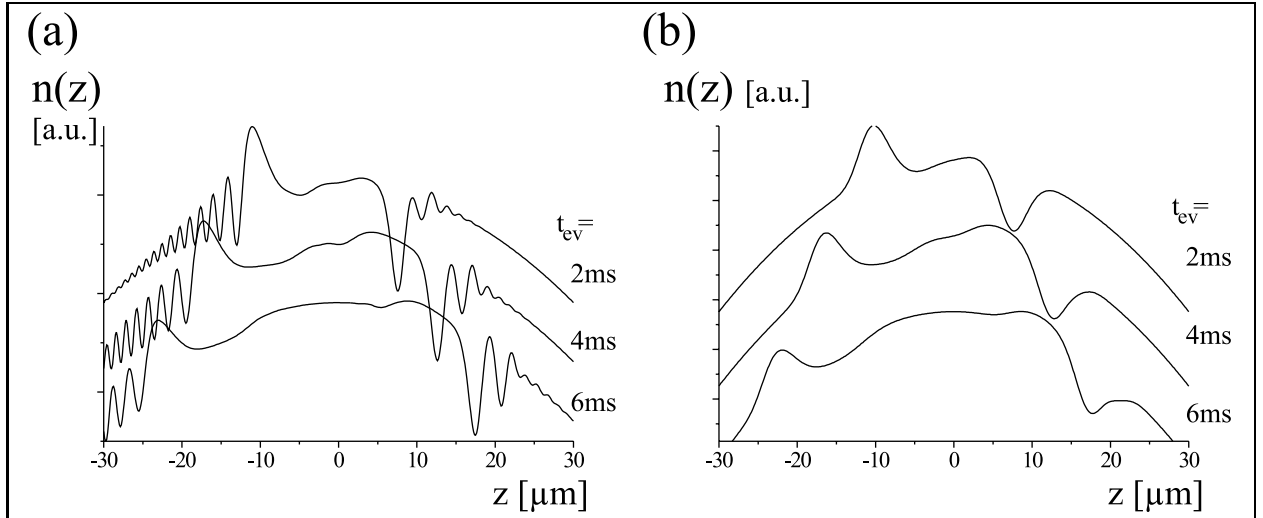


Abbildung 4.10: (a) Dichteverteilungen nach einer Phasenaufprägung von  $\Delta\phi = \pi$  mit  $l_e = 2 \mu\text{m}$  nach Evolutionszeiten von  $t_{ev} = 2, 4, 6$  ms und Expansionszeiten von jeweils  $t_{TOF} = 4$  ms. (b) Nach einer Faltung mit einer Gaußfunktion (FWHM =  $3.5 \mu\text{m}$ ), die der Glättung des Absorptionbildes der Dichteverteilung durch eine endliche Auflösung des Detektionssystems entspricht, sind zwei ausgeprägte Minima zu erkennen, die sich jeweils gleichförmig mit  $t_{ev}$  bewegen.

### Stabilität der Solitonen in den numerischen Simulationen

Die Frage der Stabilität von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten wird in zahlreichen theoretischen Arbeiten diskutiert [130, 109, 104, 131, 132]. Einzelne Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten ohne die Anwesenheit zusätzlicher Anregungen (wie die oben diskutierten Dichtewellen) zerfallen durch thermodynamische und dynamische Dissipationsprozesse (siehe Abschnitt 4.2.2); in dem Fall stark anisotroper Kondensate ist die dynamische Instabilität reiner Solitonzustände unterdrückt. In dem experimentell relevanten Fall durch Phasenaufprägung erzeugter Solitonen beeinflussen zusätzliche Anregungen die Dynamik des Kondensats. Außerdem kommt es bei der Anregung mehrerer Solitonen durch mehrere Potentialstufen oder durch eine hohe aufgeprägte Phasendifferenz  $\Delta\phi$  zur Kollision von Solitonen.

In den von T. Busch *et al.* durchgeführten Simulationen zur Oszillation dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten [133] sowie in den Ergebnissen von 3D-Simulationen zur Modellierung des Hannoveraner Experiments gibt es keine Anzeichen der dynamischen Dissipation in den untersuchten Parameterbereichen [24]. In Simulationen zur Kollision von Solitonen wurden Regimes gefunden, in denen dunkle Solitonen repulsiv wechselwirken [106, 127] (siehe auch Kap. 5.5). In einem bisher unveröffentlichten 3D Modell zweier durch Phasenaufprägung erzeugter dunkler Solitonen wurde aber auch deren Annihilation beobachtet [108].

Die Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen liefern Hinweise auf die Dissipation dunkler Solitonen mit einer kleinen Masse durch die Wechselwirkung mit Dichtewellen in den Randbereichen des Kondensats, d.h. bei kleiner Solitonengeschwindigkeit  $u$  (siehe Abb. 4.6). In zentralen Regionen des Kondensats propagieren die Solitonen in dem verwendeten quasi-1D Modell unbeeinträchtigt durch Dichteschwankungen und entgegenlaufende Solitonen.

Zusammenfassend belegen die numerischen Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung, dass mit Hilfe der Phasenaufprägungsmethode kontrolliert Solitonen in experimentell zugänglichen Bereichen erzeugt werden können. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein umfangreiches Verständnis der Dynamik während der Erzeugung erlangt. Die vollständige Beschreibung der Dissipation dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten ist eine wichtige, noch offene Fragestellung, die weitere experimentelle Untersuchungen und theoretische Modelle in verschiedenen Dimensionalitäten und für Temperaturen  $T > 0$  erfordert.

Die experimentelle Umsetzung der Phasenaufprägungsmethode zur Erzeugung dunkler Solitonen wird in Kapitel 5 erläutert.

#### 4.3.4 Erzeugung von Vortices mit der Phasenaufprägungsmethode

Eine weitere Klasse fundamentaler niedrigliegender Anregungszustände in Bose-Einstein Kondensaten sind Vortices [22, 23, 134, 135, 136, 137, 138, 139]. Vortices in Bose-Einstein Kondensaten zeichnen sich durch eine sich zirkular um einen Vortex„kern“ (*vortex core*) ändernde Phase der Wellenfunktion aus. Dabei ändert sich die Phase linear mit dem Drehwinkel  $\phi$  um ein ganzzahliges Vielfaches  $m$  von  $2\pi$ . Dem entspricht das Geschwindigkeitsfeld eines (superfluiden) Wirbels mit dem Drehimpuls  $|L| = m\hbar$  pro Teilchen im Kondensat [101]. Da die Phase im Kern des Vortex singularär ist, muss hier auch die Dichte verschwinden; der Vortexkern zeichnet sich also durch eine Dichteabnahme von der Hintergrunddichte auf  $n = 0$  auf dem Maßstab der Ausheillänge  $l_0$  aus. Erzeugungsmöglichkeiten von Vortices werden in der Literatur eingehend diskutiert [121, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 29].

Die Erzeugung von Vortices mit der Phasenaufprägungsmethode wurde in einer Zusammenarbeit mit der Gruppe von M. Lewenstein eingehend untersucht [29], erste entsprechende Experimente wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt <sup>8</sup>. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Simulationen findet sich in Abschnitt 5.1 der im Kapitel 6.3 abgedruckten Veröffentlichung.

---

<sup>8</sup>Aufgrund experimenteller Schwierigkeiten (hohe statistische Schwankungen der Position des Bose-Einstein Kondensats) bei der adiabatischen Verformung der Magnetfalle, die in unserer experimentellen Realisierung notwendig ist, konnte die Erzeugung von Vortices nicht eindeutig nachgewiesen werden.

Die vorgestellten Methoden der Phasenaufprägung zur Erzeugung von Vortices und von Solitonen können als „atomoptische Holographie“ zu den Methoden der nichtlinearen Atomoptik gezählt werden [32]. Wie in der optischen Holographie werden hier die Phasenlagen extern beeinflusst und so topologische Texturen erzeugt. Mit einer holographischen Methode werden optische dunkle Solitonen durch schlagartige Änderungen der Phase eines in einem nichtlinearen Medium propagierenden Lichtfeldes generiert (siehe Kap. 3.2.1). Die direkte Analogie zur Erzeugung von Vortices in Bose-Einstein Kondensaten ist die Erzeugung von Laguerre-Gaußschen Lichtmoden (*“donut-modes”, optische Vortices*) durch die Transformation von Gaußschen  $TEM_{00}$ -Moden im Fernfeld ihrer Entwicklung nach dem Durchgang durch computergenerierte Phasenhologramme, die im wesentlichen eine zirkuläre Phasenabhängigkeit aufprägen [146].

# Kapitel 5

## Experimentelle Erzeugung von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten

In diesem Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit erzielten experimentellen Ergebnisse zur erstmaligen Erzeugung und Charakterisierung von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten [24] vorgestellt. Zunächst wird auf den experimentellen Aufbau für die Phasenaufprägung zur Erzeugung dunkler Solitonen eingegangen, danach folgen Ergebnisse zur Solitondynamik, zur Dissipation von Solitonen und zur Bragg-Spektroskopie des mit den Solitonen verbundenen Geschwindigkeitsfeldes. Die Ergebnisse werden mit numerischen Simulationen, die aus einer engen Kollaboration mit der Arbeitsgruppe von M. Lewenstein hervorgegangen sind, verglichen.

Abschließend werden Ergebnisse zur Erzeugung und Untersuchung kollidierender Solitonen vorgestellt.

### 5.1 Experimenteller Aufbau

#### 5.1.1 Präparation des Bose-Einstein Kondensats

Die in diesem Experiment verwendeten Bose-Einstein Kondensate sind in einem stark einschließenden, anisotropen Potential gefangen (siehe Kapitel 2.2). Die fundamentalen Frequenzen des Potentials betragen  $\omega_z = 2\pi \cdot 14 \text{ Hz}$  und  $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 425 \text{ Hz}$ . Damit befinden sich die Kondensate in einer nahezu quasi-1D Geometrie. Das in Kapitel 4.1 entwickelte eindimensionale Bild von dunklen Solitonen ist also eine geeignete Beschreibung des Experiments. Weiterhin sind in dieser Geometrie die dissipativen Effekte dynamischer Instabilität stark unterdrückt (Kapitel 4.2.2).



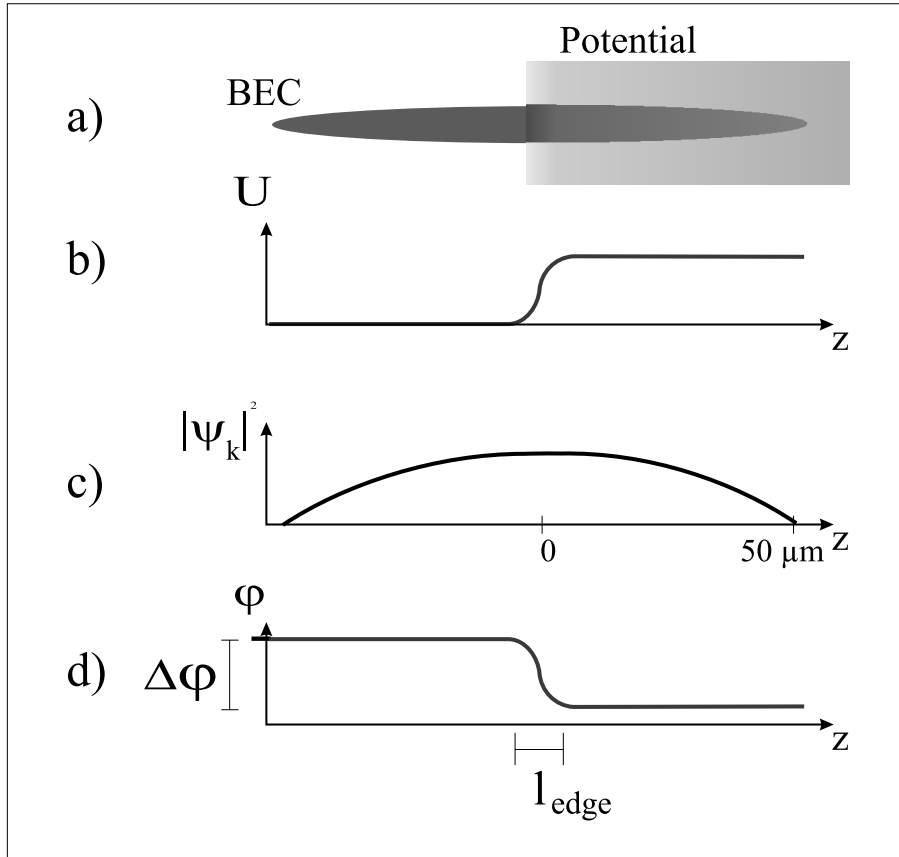


Abbildung 5.1: Prinzip der Phasenaufprägung zur Erzeugung dunkler Solitonen in einem BEC.

Die Parameter der Laserkühlung und Verdampfungskühlung zur Erzeugung von Kondensaten sind so gewählt, dass etwa alle 25 s ein Kondensat mit einer typischen Anzahl von  $N = 1.5 \cdot 10^5$  Atomen im ( $F=2$ ,  $m_F=+2$ )-Hyperfeinzustand erzeugt wird und zur weiteren Manipulation durch Dipolpotentiale und zur Detektion zur Verfügung steht.

Die maximale Teilchendichte ergibt sich aus Atomzahl und den Fallenfrequenzen zu  $n_0 = 3.8 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  (vgl. Gl. 2.22, 2.23). Damit beträgt die maximale Schallgeschwindigkeit im Kondensat  $c_s(n_0) = 3.7 \text{ mm/s}$ .

### 5.1.2 Das Dipolpotential zum Aufprägen der Phase

Das in der Phasenaufprägungsmethode benötigte Potential wird aufgrund der schnellen Schaltbarkeit und der hohen erreichbaren Ortsauflösung mit einem optischen Dipolpotential realisiert (zu Dipolpotentialen siehe Kap. A im Anhang). Als Laserquelle zur Erzeugung des Dipolpotentials wird in den hier beschriebenen Experimenten ein frequenzverdoppelter Neodym:Vanadat-Laser genutzt, der Licht einer Wellenlänge von 532 nm und einer Leistung von bis zu 10.5 W im Ein-Moden Betrieb emittiert.

Wie in Kapitel 4.3.3 beschrieben, muss zur Erzeugung von Solitonen in einem quasi-eindimensionalen Bose-Einstein Kondensat ein konstantes Dipolpotential  $U_{dp}$  kurzzeitig auf eine Hälfte des Kondensats einwirken (siehe Abb. 5.1). Mit der  $z$ -Achse als schwacher Achse des Potentials gilt also

$$\begin{aligned} U_{imp}(x, y, z, t) &= U_{dp}\Theta(z - z_s) \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_p \\ &= 0 \quad \text{für } t < 0 \text{ und } t > t_p, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei  $\Theta(z)$  eine durch die begrenzte Auflösung des Abbildungssystems geglättete Stufenfunktion ist.

Abbildung 5.2 stellt den Aufbau des Systems zur Generierung des Potentials  $U_{imp}$  dar. Licht der Wellenlänge 532 nm aus einer Laserquelle beleuchtet eine scharfe Kante; diese wird von einem hochauflösenden Mikroskopobjektiv mit großem Arbeitsabstand auf das Kondensat in der Ultrahochvakuumapparatur abgebildet. Die  $z$ -Achse des Kondensats befindet sich dabei in der Bildebene der Abbildung. Das Auflösungsvermögen des Objektivs ist auf  $2.1 \mu\text{m}$  bei einer Wellenlänge von 633 nm spezifiziert. Bei idealer Justage fällt die Intensität auf einer Breite von 2 bis  $3 \mu\text{m}$  ab <sup>1</sup>.

Linsen im Strahlengang sorgen für eine Anpassung der Intensität des Lichtes in der Bildebene. Mit einem akustooptischen Modulator (AOM) kann das Licht mit einer Schaltzeit in der Größenordnung einer Mikrosekunde an- und ausgeschaltet werden; eine Frequenzmodulation des AOM sorgt für eine Glättung von Interferenzstrukturen, die beim Durchgang des Lichtes durch das (nicht für  $\lambda = 532 \text{ nm}$  entspiegelte) Quarzglasfenster der Vakuumapparatur entstehen. Die Modulationsfrequenz beträgt 100 kHz und ist damit schnell gegenüber der Korrelationszeit des Kondensats, sodass das entstehende Potential als zeitgemittelt Potential wirkt.

Die Intensität des Lichtfeldes lässt sich nicht direkt am Ort der Atome messen. Sie wurde daher als Quotient der Laserleistung  $P$  vor Eintritt in die Glaszelle und der vom Strahl überstrichenen Fläche  $A$  ermittelt. Diese konnte durch die Verdrängung von Atomen beim längeren Einstrahlen des Laserstrahls in eine expandierende Atomwolke ermittelt werden. Mit typischen Werten von  $P = 0.5 \text{ W}$  und  $A = 200 \times 100 \mu\text{m}^2$  ergibt sich eine Intensität von  $25 \text{ W/mm}^2$ . Ein Vergleich mit der maximalen Fallhöhe, bei der die Atome von dem Potential noch reflektiert werden, ergibt die gleiche Größenordnung.

Mit einer Intensität von  $25 \text{ W/mm}^2$  bei einer Wellenlänge von  $\lambda_l = 532 \text{ nm}$  und unter Berücksichtigung der nächstliegenden und stärksten atomaren Resonanzen von Rubidium

---

<sup>1</sup>Die Auflösung des Detektionssystems, in das das Mikroskopobjektiv integriert ist, wurde experimentell als  $3 \dots 4 \mu\text{m}$  bei  $\lambda = 780 \text{ nm}$  bestimmt [63].

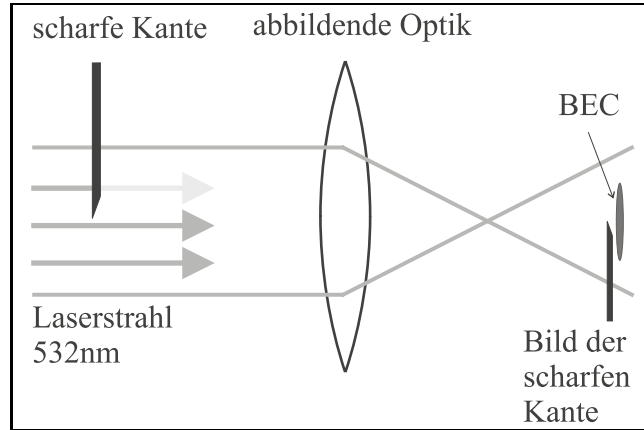


Abbildung 5.2: Schematischer Aufbau der Generierung des Dipolpotentials für die Phasenaufprägung dunkler Solitonen in einem Bose-Einstein Kondensat.

ergibt sich so ein Dipolpotential von  $U = 2 \cdot 10^{-29}$  J. Eine Einwirkzeit von etwa  $30 \mu\text{s}$  verzögert die Phasenentwicklung damit um  $\Delta\phi \approx \pi$ .

Da die Gesamtstreurate  $R = \sum_i R_i$  (siehe Gl. A.3) bei der hohen Verstimmung eines 532 nm-Lasers gegenüber allen Resonanzen von Rubidium mit  $R \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$  extrem niedrig ist, können spontane Prozesse hier vernachlässigt werden.

### 5.1.3 Erzeugung dunkler Solitonen

Der zeitliche Ablauf des Experiments zur Erzeugung und zum Nachweis von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten ist in Abb. 5.3 dargestellt. Zunächst wird, wie oben beschrieben, das Kondensat in der Magnetfalle erzeugt. Es folgt das Aufprägen einer Phasenverteilung mit dem Dipolpotential in der beschriebenen Geometrie. Daraufhin entwickelt sich das Kondensat für eine Zeitdauer  $t_{ev}$  in der Magnetfalle. Vor der Absorptionaufnahme expandiert das Kondensat im freien Fall während der Zeit  $t_{TOF}$ . Die Absorptionaufnahme wird resonant mit einer Intensität in der Größenordnung der Sättigungsintensität durchgeführt; nach einer Verzögerungszeit  $t_{delay}$  von typischerweise 100 ms wird ein Hintergrundbild aufgenommen. Durch Division der beiden Bilder und Logarithmieren wird die Dichteverteilung der Atomwolke bestimmt. Diese liefert die Informationen über Form und Positionen der Solitonen.

In den durchgeführten Experimenten sind vor allem die Zeitparameter  $t_p$ ,  $t_{ev}$  und  $t_{TOF}$  (siehe Abb. 5.3) von Bedeutung. In Zusammenhang mit der Stärke des Dipolpotentials und den Parametern der Abbildung bestimmt die Einwirkdauer  $t_p$  die Geschwindigkeit der erzeugten Solitonen; über die Variation der Entwicklungszeit kann das dynamische und das dissipative Verhalten der Solitonen studiert werden. Die freie Expansion während der Zeit

Vorgang		typische Zeitdauer
Erzeugung des Kondensats		25 s
Phasenaufprägung	$t_p$	30 $\mu$ s
Entwicklungszeit des Solitons	$t_{ev}$	1-20 ms
freie Expansion	$t_{TOF}$	4 ms
Detektion der Atomwolke		10 $\mu$ s
Verzögerungszeit		100 ms
Aufnahme des Hintergrundbildes		10 $\mu$ s

Abbildung 5.3: Zeitlicher Ablauf der Erzeugung dunkler Solitonen und typische Zeitdauern.

$t_{TOF}$  ist aus zwei Gründen notwendig: Zum einen ist die atomare Dichte in der Magnetfalle so hoch, dass das Ensemble für den resonanten Probelaserstrahl optisch dicht ist. Das charakteristische Dichteminimum eines dunklen Solitons ist in diesem Regime nicht zu erkennen. Während der ballistischen Expansion (in unserem Experiment  $t_{TOF} = 4\text{ms}$ ) verringert sich die Dichte so weit, dass die Dichteveränderungen in der Atomwolke detektiert werden können. Zum anderen ist die Breite des Dichteminimums eines Solitons von der Größenordnung der Ausheillänge. Diese ist in der Magnetfalle typischerweise geringer als die mit optischen Methoden erreichbare Auflösung des Detektionssystems. Durch die Dichteabnahme während der ballistischen Expansion und die dadurch bedingte Verbreiterung des Dichteminimums gelangt das Soliton in einen experimentell besser zugänglichen Bereich.

Eine Abschätzung der Veränderung der Geschwindigkeit des Solitons während der freien Expansionszeit  $t_{TOF}$  kann mit Hilfe der Impulserhaltung gemacht werden [122, 127, 108]: Nach Abschalten des Fallenpotentials ändern sich die verschiedenen Parameter, die in die Masse des dunklen Solitons eingehen (siehe Gleichung 4.14), mit dem Skalierungsparameter  $b(t) = \sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t^2}$ . Für die Dichtedifferenz  $(n_{min} - n_0)$ , die Querschnittsfläche  $S$  und die Ausheillänge  $l_0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 n &\sim \frac{1}{b^2(t)}, \\
 S &\sim b^2(t), \\
 l_0 &\sim b(t).
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Der Betrag der (negativen) Masse  $M$  des dunklen Solitons nimmt also mit  $b(t)$  zu,  $M \sim b(t)$ ;

da der Impuls des Solitons erhalten bleiben muss, nimmt die Geschwindigkeit  $u$  mit  $b(t)$  ab,  $u \sim b^{-1}(t)$ . Eine konstante Geschwindigkeit  $u$  des Solitons in der Magnetfalle führt daher auch zu einer konstanten Geschwindigkeit nach der Expansion, wenn das Kondensat unterschiedliche Entwicklungszeiten  $t_{ev}$  in der Magnetfalle erfahren hat. Deshalb ist es möglich, aus den Positionen des Dichteminimums nach der Expansion die Geschwindigkeit des Solitons in der Magnetfalle,  $u$ , zu bestimmen.

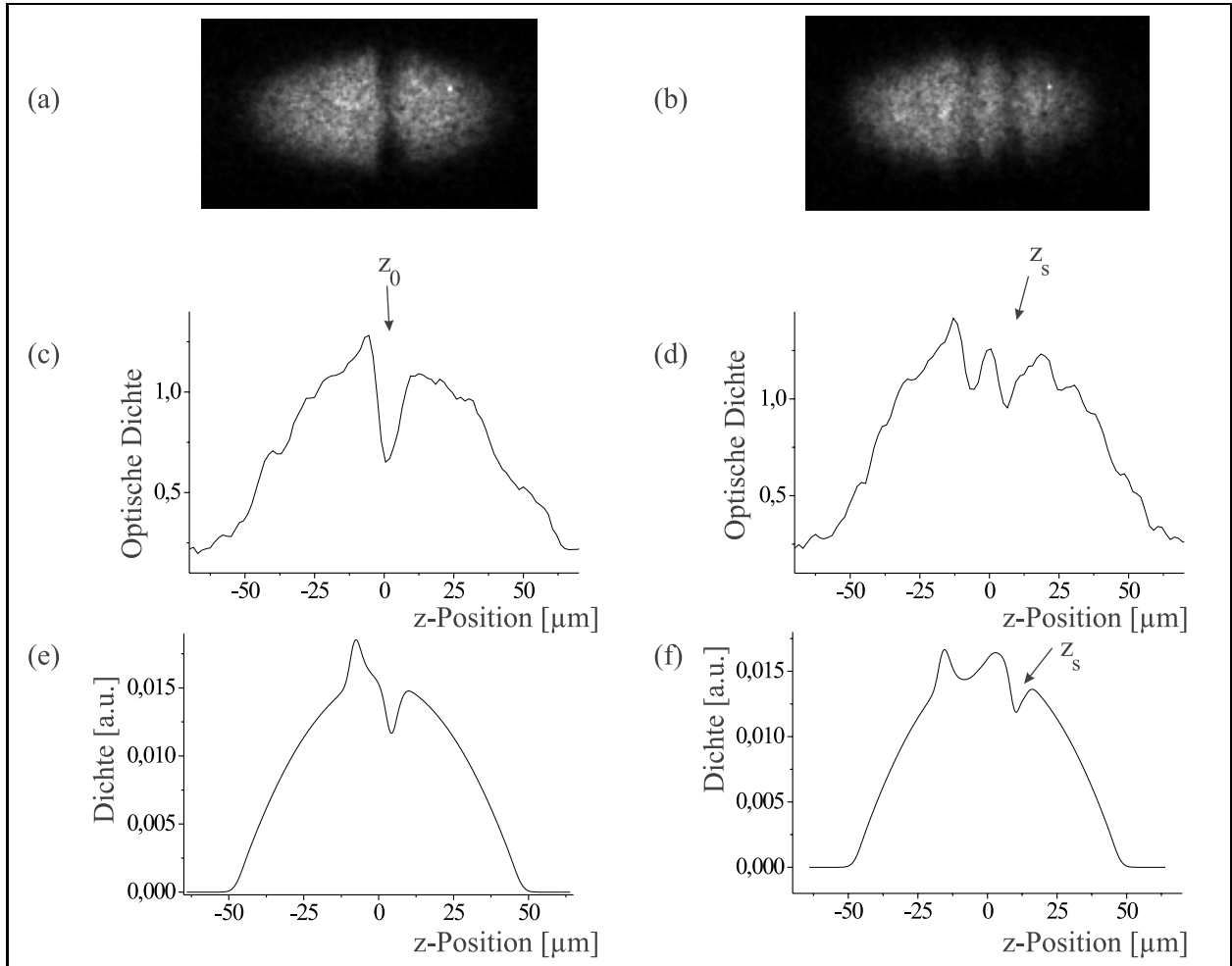


Abbildung 5.4: Absorptionsspektren von Bose-Einstein Kondensaten nach der Phasenaufprägung; (a) nach einer Evolutionszeit von  $t_{ev} = 0.1$  ms, (b) nach  $t_{ev} = 2.5$  ms und jeweils nach einer Expansionszeit von  $t_{TOF} = 4$  ms. (c) und (d): Schnitte durch die Dichteverteilungen; mit  $z_s$  ist die Position des (in positiver  $z$ -Richtung) propagierenden dunklen Solitons bezeichnet. (e) und (f): Ergebnisse numerischer Simulationen für die Parameter  $\Delta\phi = 1.5\pi$ ,  $l_{edge} = 2 \mu\text{m}$ ,  $N = 10^5$ ,  $t_{ev} = 0.1$  ms bzw.  $2.5$  ms,  $t_{TOF} = 4$  ms und nach der Faltung mit einer Gaußfunktion (FWHM=  $3.5 \mu\text{m}$ ), die der Glättung des Absorptionsspektrums der Dichteverteilung durch eine endliche Auflösung des Detektionssystems entspricht.

Abbildung 5.4 zeigt typische Absorptionsspektren eines wie oben beschrieben erzeug-

ten Solitonenzustands in einem Bose-Einstein Kondensat direkt nach der Phasenaufprägung (a) und nach einer Entwicklungszeit von  $t_{ev} = 2.5$  ms (b). Die aufgeprägte Phase  $\Delta\phi$  entspricht  $\pi$ , die Expansionszeit ist  $t_{TOF} = 4$  ms. Das dunkle Soliton ist sowohl in der Absorptionaufnahme ( $t_{ev} = 2.5$  ms) als auch im Schnitt durch die dem Absorptionsprofil entsprechende Dichteverteilung deutlich als Minimum zu erkennen. Die detektierte relative Tiefe des Minimums,  $T = n_{min}/n_0$ , beträgt  $T \approx 80\%$ . Dies steht in guter Übereinstimmung mit der in den Simulationen berechneten Tiefe unter Berücksichtigung des Auflösungsvermögens der Detektionssystems von etwa  $4 \mu\text{m}$  (Abb. 5.4 e, f).

In der Absorptionaufnahme ist außer dem Minimum des dunklen Solitons ein zweites Dichteminimum bei der Position  $z_d$  zu erkennen. Dieses Minimum entsteht im Zusammenhang mit der in Richtung des Phasengradienten laufenden Dichtewelle (siehe Kap. 4.3.3) bei der Expansion des Ensembles aus der Falle. Es ist auch in den Ergebnissen der numerischen Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung klar zu erkennen.

Die Erzeugung von dunklen Solitonen ist wesentlich von den Parametern des eingepprägten Phasenunterschiedes und der Qualität der optischen Abbildung des Phasensprunges abhängig (siehe Kapitel 4.3). In mehreren iterativen Schritten wurden die Potentialstärke und die Scharfstellung der optischen Abbildung der Intensitätskante auf das Kondensat optimiert. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen [127] setzt die Erzeugung deutlich erkennbarer dunkler Solitonen (Kontrast  $> 10\%$ ) ab einer aufgeprägten Phase von  $\Delta\phi \approx \pi/2$  ein. Für die in diesem Abschnitt beschriebenen Messungen wurde das Produkt aus Pulsdauer und Laserintensität des Phasenaufprägungspotentials um einen Faktor 2 höher gewählt als der Wert, bei dem die Erzeugung detektierbarer dunkler Solitonen einsetzte. Die Phasenverzögerung entspricht damit  $\Delta\phi \approx \pi$ .

Die Feineinstellung der Abbildung der Intensitätskante erfolgte anhand der Solitongeschwindigkeit, die vom aufgeprägten Phasengradienten abhängt. Wie die Ergebnisse der numerischen Simulationen zeigen, ist bei einer optimalen Scharfstellung eine minimale Solitongeschwindigkeit zu erwarten (siehe Abb. 4.8).

## 5.2 Untersuchung der Solitongeschwindigkeiten

Die Geschwindigkeit der mit der Phasenaufprägungsmethode erzeugten Solitonen ist in einer komplexen Weise von dem aufgeprägten Potential abhängig (siehe Kap. 4.3.3). Eine analytische Lösung für diese Abhängigkeit lässt sich nicht angeben; die experimentellen Ergebnisse werden mit Ergebnissen numerischer Simulationen der GPE, die in Kapitel 4.3.3 dargestellt sind, verglichen.

Experimentell wurde die Dynamik dunkler Solitonen untersucht, indem in verschiedenen Messreihen die Entwicklungszeit des Kondensats in der Magnetfalle,  $t_{ev}$ , variiert wur-

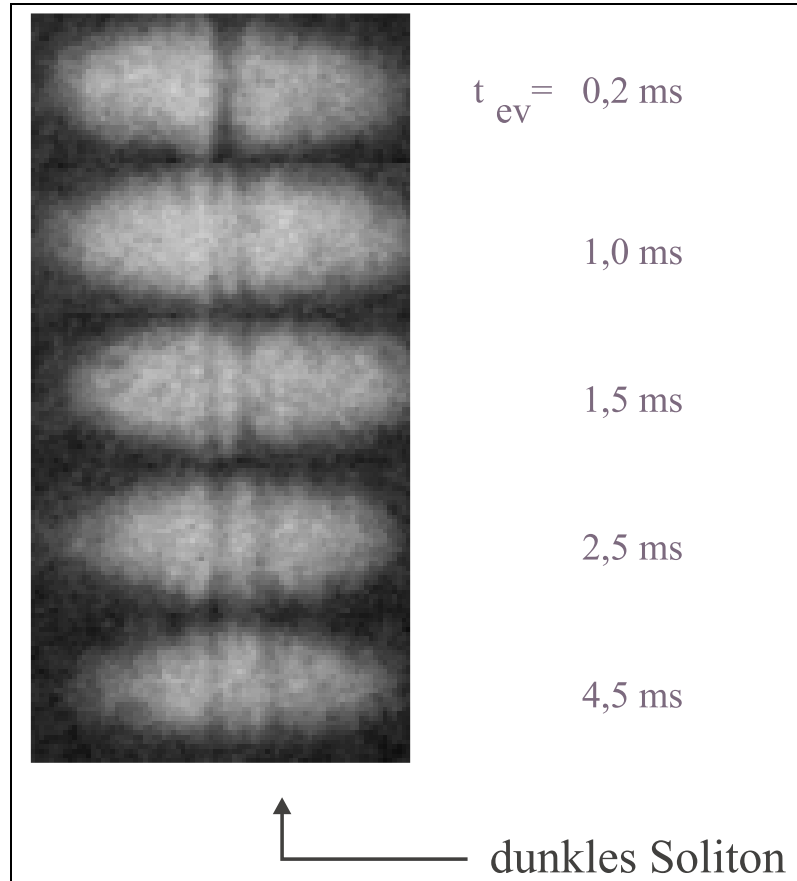


Abbildung 5.5: Absorptionsbilder von Bose-Einstein Kondensaten zu unterschiedlichen Zeiten  $t_{ev}$  nach der Phasenaufprägung und nach einer Expansion von  $t_{TOF} = 4$  ms. Das dunkle Soliton bewegt sich gleichförmig in positiver  $z$ -Richtung.

de. Einige Absorptionsbilder einer solchen Reihe sind in Abb. 5.5 dargestellt. Das Soliton propagiert deutlich in positiver  $z$ -Richtung, d.h. entgegen der Richtung des aufgeprägten Phasengradienten.

Abb. 5.6 zeigt die Abhängigkeit der Positionen des dunklen Solitons von der Entwicklungszeit  $t_{ev}$  für verschiedene Abbildungen des Dipolpotentials. Die Solitonen propagieren in Übereinstimmung mit der Theorie mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit. Die Positionen des Solitons in einer numerischen Simulation des Experiments sind in der gestrichelten Kurve in Abb. 5.6(a) dargestellt [24]. Die gemessenen Solitonengeschwindigkeiten von  $(u = 2.0 \pm 0.3)$  mm/s<sup>2</sup> (a) und  $(u = 2.8 \pm 0.3)$  mm/s (b) sind wesentlich geringer als die maximale Schallgeschwindigkeit im Kondensat, und die Geschwindigkeiten lassen sich durch die Wahl der Parameter der Phasenaufprägung (hier durch Variation von  $l_{edge}$ ) beeinflussen. Zusammen mit der klaren Übereinstimmung der Experimente mit den numerischen

---

<sup>2</sup>Der Fehlerbereich entsteht hier durch die Streuung der Messwerte und durch den Fehlerbereich der Detektion.

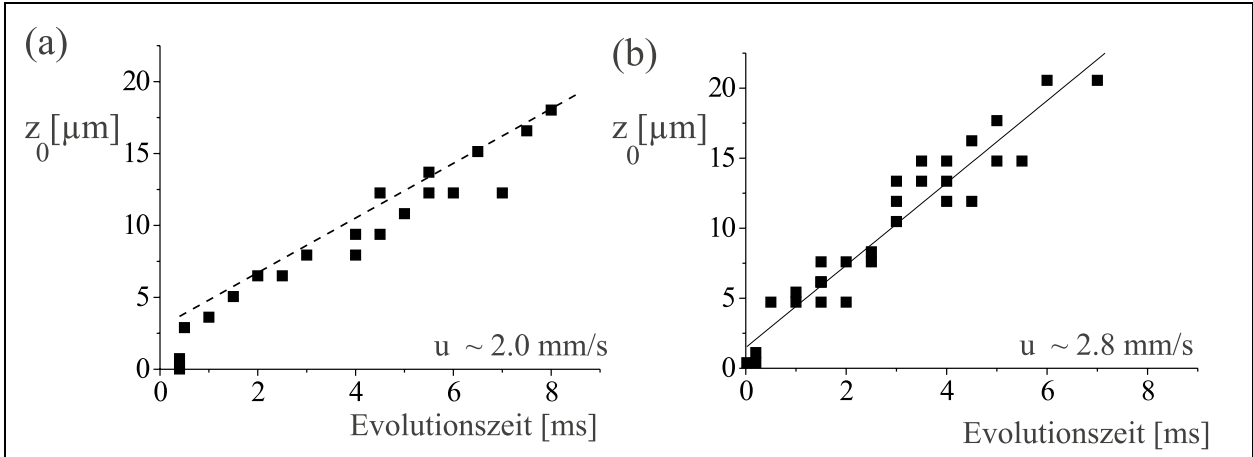


Abbildung 5.6: Positionen der Solitonen in Abhängigkeit der Evolutionszeit in der Magnetfalle,  $t_{ev}$ . Die Solitonen propagieren gleichförmig mit einer Geschwindigkeit  $u$ , die wesentlich kleiner als die maximale Schallgeschwindigkeit im Kondensat,  $c_s = 3.7 \text{ mm/s}$  ist. Für Abbildungen mit unterschiedlicher Schärfe des Potentialgradienten,  $l_{edge}$ , ergeben sich unterschiedliche Geschwindigkeiten der Solitonen. Im Vergleich mit 3D-Simulationen der GPE [127] ergibt sich eine Schärfe von  $l_{edge} \approx 2 \mu\text{m}$  (a) bzw.  $l_{edge} \approx 3 \mu\text{m}$  (b).

Simulationen ist dies der Beleg für die experimentelle Beobachtung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten.

### 5.3 Bragg-Spektroskopie an Solitonzuständen

Wie in verschiedenen Gruppen gezeigt wurde [65, 6, 30, 83, 82], lässt sich die Methode der Bragg-Beugung von Materiewellen an Bose-Einstein Kondensaten besonders effektiv einsetzen, da diese durch die Besetzung eines gemeinsamen Quantenzustandes eine extrem schmale Verteilung im Impuls- und Ortsraum besitzen. Die Anwendungen der Bragg-Beugung von Bose-Einstein Kondensaten reichen vom Auskoppler für einen Atomlaser bis zur wohldefinierten Phononenanregung. Außerdem konnten mit Hilfe der Bragg-Beugung Bose-Einstein Kondensate im Grundzustand in der Magnetfalle und in freier Expansion spektroskopisch untersucht werden [30, 83]. In den in diesem Abschnitt beschriebenen Messungen wurde diese Methode erstmals als Hilfsmittel zur Spektroskopie niedrigliegender angeregter Zustände in Bose-Einstein Kondensaten eingesetzt.

Die nichttriviale Phasenverteilung der Solitonzustände macht diese zu geeigneten Kandidaten für die Bragg-Spektroskopie. Die räumlichen Änderungen der Phase sind mit einem Wahrscheinlichkeitsdichtestrom und so mit einem Geschwindigkeitsfeld verbunden (siehe Gl. 4.3). In einem Solitonzustand mit der Solitonengeschwindigkeit  $u$  besitzt dieses Ge-



schwindigkeitsfeld nur Komponenten, die der Richtung von  $u$  entgegengesetzt sind, da das Soliton immer entgegen dem begleitenden Phasengradienten propagiert. Das Geschwindigkeitsfeld ist außerdem lokal auf der Größenordnung der Ausheillänge um die Solitonenposition  $z_s$  begrenzt.

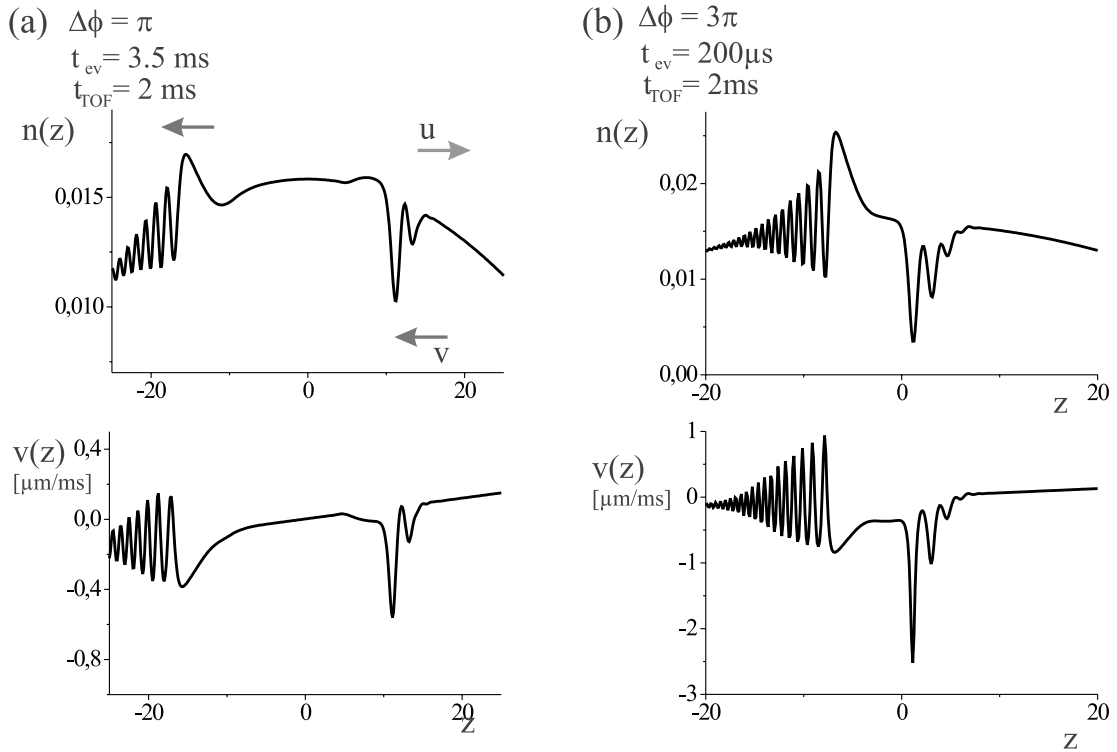


Abbildung 5.7: In numerischen Simulationen ermittelte Dichte- und Geschwindigkeitsverteilungen in Bose-Einstein Kondensaten nach der Phasenaufprägung von (a)  $\Delta\phi = \pi$ , (b)  $\Delta\phi = 3\pi$ .

Das Geschwindigkeitsfeld eines Bose-Einstein Kondensats nach der Phasenaufprägung eines Solitons, das sich nach Gl. 4.3 aus der in einer numerischen Simulation berechneten Phasenverteilung ergibt, und die entsprechende Dichteverteilung sind in Abb. 5.7 dargestellt. Mit dem in positiver  $z$ -Richtung laufenden dunklen Soliton und mit der in negativer  $z$ -Richtung laufenden Dichtewelle sind negative Geschwindigkeiten verbunden. Die Beträge der mit dem Soliton verbundenen negativen Geschwindigkeiten steigen mit dem aufgeprägten Phasenunterschied  $\Delta\phi$  (Abb. 5.7 b).

Da die Bragg-Beugung ein stark geschwindigkeitsselektiver Prozess ist (siehe Kap. 2.2.7), kann mit geeignet gewählten Parametern der Bragg-Laserpulse das Geschwindigkeitsfeld spektroskopisch untersucht werden.

In den hier beschriebenen Experimenten wird die Bragg-Spektroskopie an Solitonenzuständen wie folgt durchgeführt: Zunächst wird dem Kondensat in der Magnetfalle eine Phase aufgeprägt, danach folgen eine Entwicklungszeit in der Magnetfalle,  $t_{ev}$ , und ei-

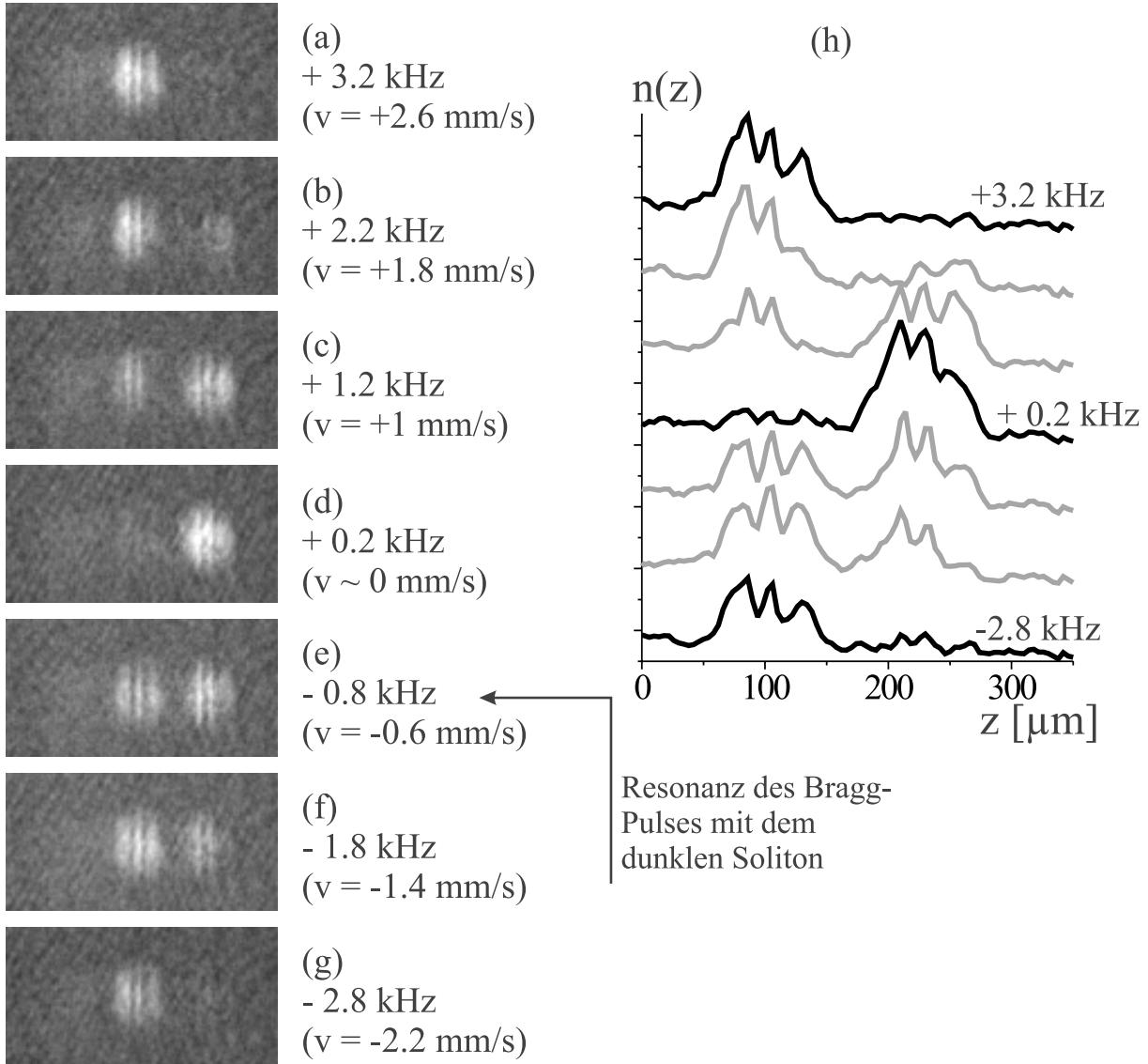


Abbildung 5.8: Bragg-Spektroskopie eines Solitonenzustandes nach der Aufprägung eines Phasensprunges von  $\Delta\phi \approx \pi$ . (a)-(g): Absorptionaufnahmen von Bose-Einstein Kondensaten nach der Bragg-Beugung mit unterschiedlichen Frequenzverstimmungen  $\Delta\delta$  relativ zur Bragg-Resonanz mit  $v = 0$ . (h): Schnitte durch die zugehörigen Dichteverteilungen.

ne freie Expansionszeit von  $t_{TOF} = 2$  ms, um die Bragg-Pulse bei einer geringen atomaren Dichte im Kondensat einzustrahlen und so Kollisionseffekte zu vermeiden [147]. Nach dieser Expansionszeit werden die beiden antiparallelen Bragg-Strahlen für eine Zeitdauer  $t_{Bragg} = 250 \mu\text{s}$  eingestrahlt. Die Intensität dieser Strahlen wird so gewählt, dass die Atome, die mit dem Bragg-Prozess in Resonanz sind, mit einer Wahrscheinlichkeit  $p = 1$  in den Impulszustand  $|2\hbar k\rangle$  übergehen ( $\pi$ -Puls). Die gemessene Frequenzbreite des Bragg-Übergangs beträgt bei dieser Pulsdauer  $\Delta\delta \approx 2.5$  kHz. Dies entspricht im Geschwindigkeitsraum einer Breite der Bragg-Resonanz von  $\approx 2$  mm/s. Während einer weiteren Entwicklungszeit von

$t_{TOF2} = 12$  ms trennen sich die beiden bevölkerten Impulskomponenten räumlich und lassen sich in einer Detektionsaufnahme getrennt analysieren.

Durch die relative Frequenzverstimmung der beiden Bragg-Laserstrahlen,  $\delta$ , lässt sich einstellen, welcher Geschwindigkeitsbereich aus der Geschwindigkeitsverteilung der Solitonzustände mit dem Bragg-Prozess resonant ist, und damit, aus welchem Bereich des Kondensats Atome „Bragg-gebeugt“ werden.

In Abb. 5.8 und Abb. 5.9 sind Absorptionsoptionen und Schnitte durch die ermittelten Dichteverteilungen aus Messserien mit variiertem Frequenzverstimmung  $\delta$  dargestellt.

In Abb. 5.8 wurde ein Phasenunterschied von  $\Delta\phi \approx \pi$  aufgeprägt, die Evolutionszeit betrug  $t_{ev} = 3.5$  ms. (Ergebnisse der entsprechenden Simulation sind in Abb. 5.7 a dargestellt.) Ist die Bragg-Verstimmung in Resonanz mit der Geschwindigkeit  $v = 0$ , so werden alle Atome in die erste Ordnung gebeugt, da die Geschwindigkeitsbreite des Bragg-Prozesses größer als das Spektrum der Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat ist. Für Bragg-Verstimmungen weit außerhalb der Resonanz finden sich alle Atome in der 0. Ordnung. In beiden Fällen sind die typischen Dichteminima des Solitons und der expandierten Dichtewelle deutlich zu erkennen.

Spektroskopische Effekte zeigen sich, wenn der Bragg-Prozess nur leicht gegenüber der Resonanz mit  $v = 0$  verstimmt ist: Für eine Resonanz mit leicht negativen Geschwindigkeiten,  $v \approx -0.6$  mm/s, werden bevorzugt Atome in zwei schmalen Bereichen ausgekoppelt, die dem dunklen Soliton und der Dichtewelle entsprechen. Für eine Resonanz mit leicht positiven Geschwindigkeiten,  $v \approx +1$  mm/s, bleiben die Atome aus diesen Bereichen bevorzugt in der 0. Ordnung zurück, sind also nicht mehr in Resonanz mit dem Bragg-Prozess. Da bei den hier gewählten Verstimmungen  $\delta \approx 1$  kHz – wegen der endlichen Frequenzbreite der Bragg-Resonanz – noch eine gewisse Bragg-Beugungswahrscheinlichkeit ( $p \approx 0.5$ ) auch für die Atome mit  $v \approx 0$  besteht, sind die ausgekoppelten Geschwindigkeitsanteile mit  $v \approx -1$  mm/s von einem Untergrund der atomaren Verteilung mit  $v = 0$  überlagert. Der spektroskopische Effekt ist trotz der Überlagerung durch diesen Untergrund eindeutig an der Änderung der Symmetrie der Bragg-gebeugten ersten Ordnung bei Durchgang durch die Bragg-Resonanz mit  $v = 0$  zu erkennen. Bei der Resonanz mit  $v = -0.6 \dots -1.4$  mm/s werden bevorzugt Atome aus zwei schmalen Bereichen in die -1. Ordnung gebeugt: hier besitzen die 0. und die -1. Ordnung eine deutlich unterschiedliche Form. Die beiden schmalen Bereiche negativer atomarer Geschwindigkeiten entsprechen dem mit dem Soliton verbundenen und in positiver  $z$ -Richtung propagierenden Wahrscheinlichkeitsdichtestrom und der in negativer  $z$ -Richtung laufenden Dichtewelle. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen für die hier verwandten experimentellen Parameter (Abb. 5.7 a) liegen die atomaren Flussgeschwindigkeiten, die mit dem Soliton verbunden sind, im Bereich  $u = -(0.6 \pm 0.4)$  mm/s.

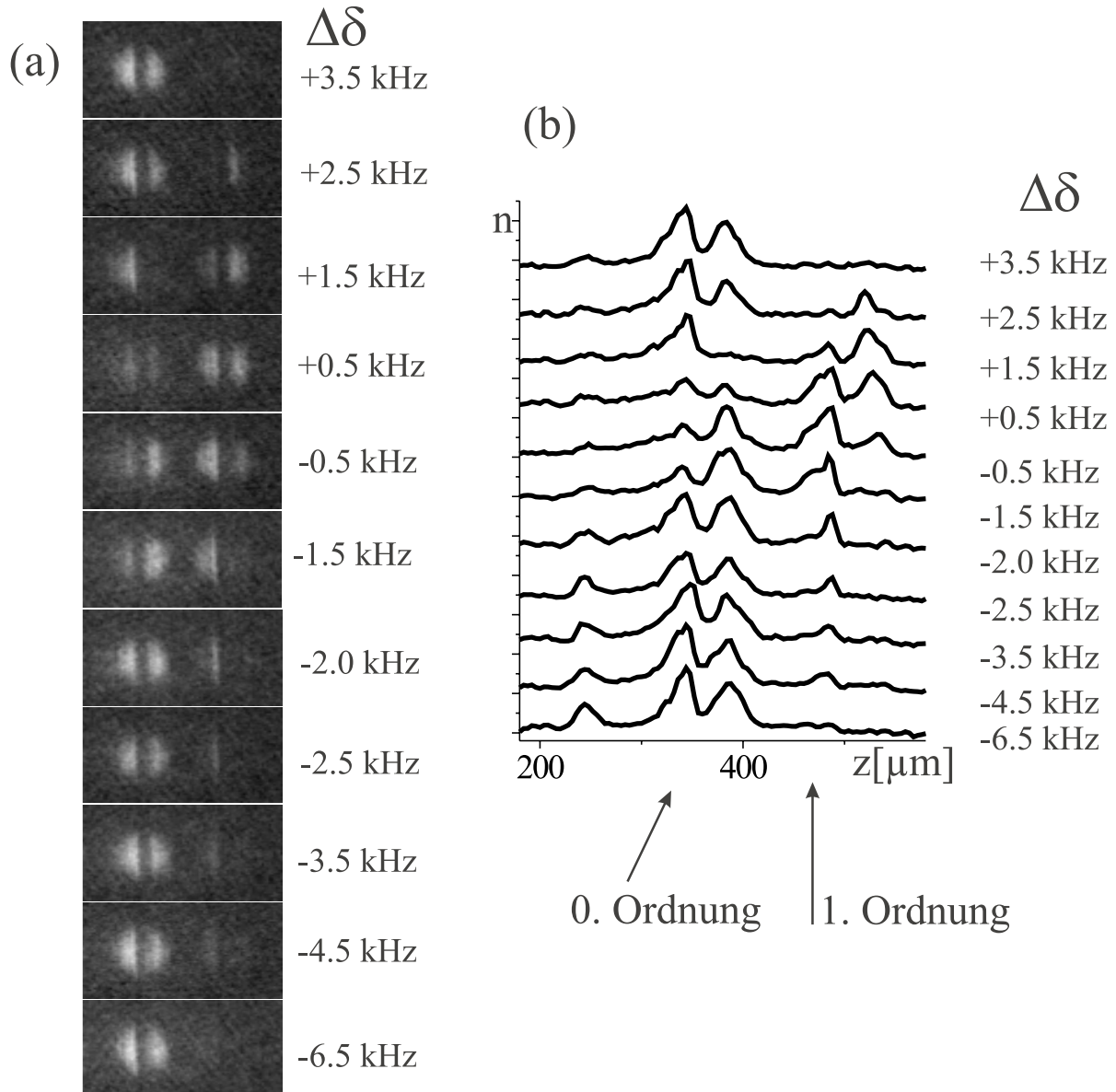


Abbildung 5.9: Bragg-Spektroskopie eines Solitonenzustandes nach der Phasenaufprägung von  $\Delta\phi \approx 3\pi$ . (a): Absorptionsaufnahmen von Bose-Einstein Kondensaten nach der Bragg-Beugung mit unterschiedlichen Frequenzverstimungen  $\Delta\delta$  relativ zur Bragg-Resonanz mit  $v = 0$ . (b): Schnitte durch die zugehörigen Dichteverteilungen.

Der spektroskopische Effekt der Bragg-Beugung wird bei höheren atomaren Flussgeschwindigkeiten deutlich erhöht. In Abb. 5.9 sind Ergebnisse einer spektroskopischen Messserie an einem Solitonenzustand, der durch Aufprägen eines wesentlich höheren Phasengradientens erzeugt wurde ( $\Delta\phi \approx 3\pi$ ), dargestellt. (Ergebnisse der entsprechenden Simulation sind in Abb. 5.7b dargestellt.) Hier bleibt bei Resonanz des Bragg-Prozesses mit  $v = 0$  eine auf einen schmalen Raumbereich konzentrierte atomare Wolke in der 0. Ordnung zurück. Für eine Resonanz mit negativen Geschwindigkeiten bis  $v = -4$  mm/s werden

Atome aus diesem Bereich in die erste Ordnung gebeugt, während für Resonanzen mit entsprechenden positiven Geschwindigkeiten alle Atome in der 0. Ordnung zurückbleiben. Auch dieses Verhalten ist in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung (Abb. 5.7 b).

Das Geschwindigkeitsfeld eines Solitons bietet einen Zusammenhang zu superfluiden Effekten in Bose-Einstein Kondensaten [26, 22, 23, 147]. Da der Phasengradient eines dunklen Solitons mit sinkender Solitonengeschwindigkeit ansteigt (siehe Abb. 4.2), verhält sich die Abhängigkeit des atomaren Geschwindigkeitsfeldes von der Solitonengeschwindigkeit konter-intuitiv. Für *hohe* Solitonengeschwindigkeit besitzt das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  nur Komponenten, die *kleiner* als die kritische Landau-Geschwindigkeit der Superfluidität <sup>3</sup> sind. Im Geschwindigkeitsfeld von Solitonen mit *niedriger* Solitonengeschwindigkeit sind Komponenten enthalten, die *höher* als die Landau-Geschwindigkeit sind. In Systemen, in denen zusätzlich zum Solitonenzustand streuende Fremdteilchen enthalten sind (z.B. in einem mehrkomponentigen Kondensat), bietet sich daher eine Möglichkeit, den Übergang ins superfluide Regime zu beobachten, indem die kollisionsbedingte Dissipation in Abhängigkeit von der Solitonengeschwindigkeit untersucht wird.

## 5.4 Untersuchung der Lebensdauer dunkler Solitonen

Wie in Kapitel 4.2.2 diskutiert, sind die wesentlichen Dissipationsmechanismen dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten die thermodynamische und die dynamische Instabilität [104, 109].

Da die dynamische Instabilität durch Zwei-Körper-Prozesse vermittelt wird, kann sie unterdrückt werden, wenn die maximale mit einem Atom verbundene kinetische Energie  $\epsilon_s$  in einem Solitonenzustand kleiner als die mit den transversalen Anregungen verknüpfte Energie,  $\epsilon_{\perp} = \hbar\omega_{\perp}$ , ist [109]. Die maximale kinetische Energie eines Atoms im Bereich der Knotenebene des Solitons ist in der Größenordnung der Wechselwirkungsenergie bei maximaler Dichte,  $\epsilon_s \approx n_0 U_0$ .

Detaillierte Rechnungen [109] ergeben eine Abhängigkeit der maximalen Dichte, bei der Solitonen dynamisch stabil sind,  $n_{0m}$ , von dem Aspektverhältnis des Fallenpotentials,  $\omega_{\perp}/\omega_z$ , über einen Parameter  $\gamma_c \equiv \gamma_c(\omega_{\perp}/\omega_z)$ :

$$n_{0m} = \gamma_c \frac{\hbar\omega_{\perp}}{U_0}. \quad (5.3)$$

---

<sup>3</sup>In homogenen Bose-Einstein Kondensaten entspricht die Landau-Geschwindigkeit der Bogolubov-Schallgeschwindigkeit,  $v_L = c_s \equiv \sqrt{nU_0/m}$ . In langgestreckten zylindrischen Fallenpotentials ist die kritische Geschwindigkeit um einen von der Geometrie des Systems abhängigen Faktor herabgesetzt [26, 148].

Für das im Experiment gegebene Aspektverhältnis von  $\omega_{\perp}/\omega_z \approx 30$  ergibt sich nach den Rechnungen aus [109] ein kritischer Parameter von  $\gamma_c \approx 2.5$ .<sup>4</sup>

In Kondensaten aus <sup>87</sup>Rubidium und bei einer transversalen Fallenfrequenz von  $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 425$  Hz sind dunkle Solitonen daher bis zu einer Teilchendichte von  $n = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  dynamisch stabil. Da sich mit Zunahme der Solitonengeschwindigkeit  $u$  die mit einem einzelnen Teilchen verbundene Energie verringert, sind bewegte dunkle Solitonen auch bei höheren Dichten noch dynamisch stabil [108, 24].

Somit ist der wesentliche Dissipationsmechanismus in den hier beschriebenen Experimenten die thermodynamische Instabilität.

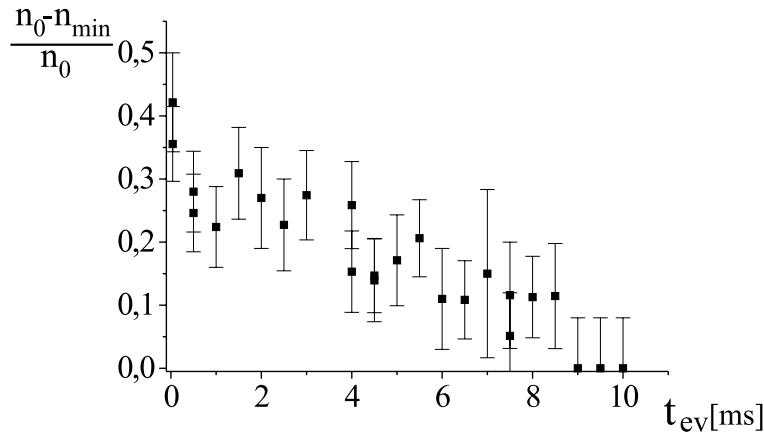


Abbildung 5.10: Relative Tiefe der dunklen Solitonen,  $(n_0 - n_{min})/n_0$ , in Abhängigkeit von der Entwicklungszeit in der Magnetfalle,  $t_{ev}$ .

In den für die Auswertungen verwandten Daten beträgt der Anteil der Atome, die sich in der thermischen Wolke befinden,  $(N - N_0)/N < 15\%$ . Damit beträgt die Temperatur etwa  $T < 0.5 T_c \approx 300$  nK (siehe Gl. 2.10). Abb. 5.10 zeigt die Abhängigkeit des Kontrastes der Dichteminima dunkler Solitonen von der Entwicklungszeit. Das Soliton wurde hier durch eine Phasenaufprägung im Zentrum des Kondensats mit  $\Delta\Phi \approx \pi$  erzeugt. Der Abfall des Kontrastes von etwa 40% auf etwa 25% innerhalb der ersten Millisekunde ist auf die Trennung des dunklen Soliton von dem mit der Dichtewelle verbundenen Minimum (vgl. Abb. 4.10) zurückzuführen. In den darauffolgenden 8 ms nimmt der Kontrast bis auf  $\sim 10\%$  ab und ist ab  $t_{ev} \sim 8$  ms nicht mehr vom Rauschen des Untergrunds zu trennen. Hiermit ergibt sich eine Lebensdauer von  $\tau \approx 8$  ms bei einer Temperatur von  $T < 0.5 T_c$ .

<sup>4</sup>Mit sinkendem Aspektverhältnis sinkt auch der kritische Parameter  $\gamma_c$ ; in nahezu sphärischen Fallen, wie in der Falle des Experiments am NIST [25], geht er gegen null,  $\gamma_c \rightarrow 0$ , sodass beliebig schwache Wechselwirkungen der Atome zum Zerfall der Solitonen führen [109].

In Kondensaten mit sehr geringer Teilchenzahl, die durch eine RF-Verdampfungskühlung bis nahezu an das Fallenzentrum heran erzeugt wurden, sind auch nach Evolutionszeiten  $t_{ev}$  von bis zu 40 ms nach der Phasenaufprägung noch deutliche Dichteminima zu erkennen. Dies gibt einen Hinweis auf den bedeutenden Einfluss der thermodynamischen Dissipation auf die Solitonenlebensdauer. Allerdings lassen sich Kondensate dieser Art in unserem derzeitigen Aufbau aufgrund von Fluktuationen der Parameter der Magnetfalle und der Teilchenzahl nicht stabil genug erzeugen, um systematische Messreihen der Temperaturabhängigkeit der Solitonenlebensdauer in Bereichen  $T \ll T_c$  durchzuführen.

In Experimenten mit sehr stabil erzeugten, extrem tiefen Temperaturen bietet die Messung der Solitonenlebensdauer im Vergleich mit theoretischen Vorhersagen eine neue Möglichkeit, die Temperatur der Ensembles zu bestimmen.

## 5.5 Wechselwirkung kollidierender Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten

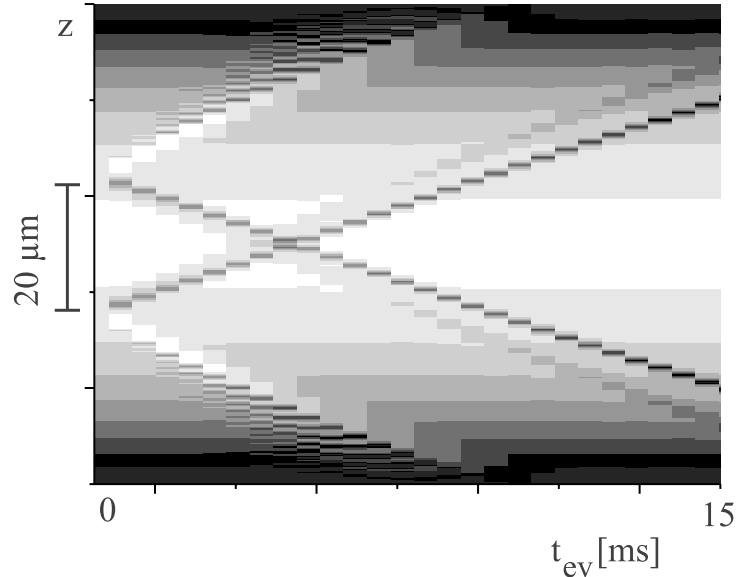


Abbildung 5.11: Ergebnisse einer numerischen Simulation in 1D zur Kollision zweier Solitonen. Aufgetragen ist die Dichteverteilung des zentralen Bereichs im Kondensat in  $z$ -Richtung über der Evolutionszeit in der Falle in einer Helligkeitsskalierung (dunkle Grauwerte entsprechen niedriger Dichte). Die hohe Diskretisierung der Zeitschritte ist ein Artefakt der Darstellung. Die Form der Solitonen wird nach der Kollision rekonstruiert, d.h. die Solitonen verhalten sich im 1D Fall stabil gegenüber der Kollision.

Zu den Eigenschaften von Solitonen zählt ihre Stabilität gegenüber Kollisionen mit anderen Solitonen [84, 87]: Laufen zwei Solitonen mit einer jeweiligen charakteristischen Form und Geschwindigkeit aufeinander zu, so rekonstruieren sich diese charakteristischen Eigenschaften nach der Kollision. Während des Kollisionsprozesses ist eine Wechselwirkung der Solitonen miteinander möglich, diese geschieht je nach System attraktiv oder repulsiv. Wechselwirkungen von Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten in Regimes, die experimentell in atomaren Gasen zugänglich sind, werden derzeit intensiv theoretisch untersucht [127, 122, 108].

In diesem Abschnitt werden Experimente zur Untersuchung der Wechselwirkung von kollidierenden dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten vorgestellt. Die Ergebnisse der Messungen zeigen erste Hinweise auf eine repulsive Wechselwirkung bei der Kollision.

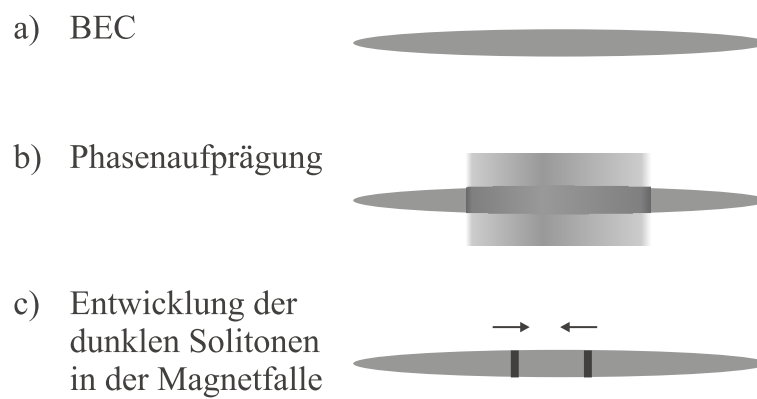


Abbildung 5.12: Schematische Darstellung des Experiments zur Untersuchung kollidierender dunkler Solitonen. Mit einem Dipolpotential wird auf das in der Magnetfalle erzeugte Bose-Einstein Kondensat (a) eine Phasenverteilung aufgeprägt, die zwei Gradienten in einer Entfernung von etwa  $20\ \mu\text{m}$  besitzt (b). Während der Evolutionszeit in der Magnetfalle (c) entwickeln sich dunkle Solitonen, die entgegengesetzt propagieren und im Zentrum des Kondensats kollidieren.

Abb. 5.11 zeigt Ergebnisse einer numerischen 1D Simulation der Kollision zweier Solitonen. Die Solitonen wurden in dieser Simulation im Abstand von  $20\ \mu\text{m}$  durch eine Phasenaufprägung erzeugt. Sie propagieren ohne eine erkennbare Änderung der Geschwindigkeit durcheinander hindurch und rekonstruieren ihre Form und Geschwindigkeit nach der Kollision. Für geringere Solitonengeschwindigkeiten zeigen Simulationen repulsive Wechselwirkungen der Solitonen, d.h. eine Verringerung der Solitonengeschwindigkeit während der Kollision [106, 127].

Der schematische Ablauf der experimentellen Erzeugung entgegenlaufender Solitonen ist in Abb. 5.12 wiedergegeben. Die Erzeugung der Solitonen erfolgt analog zur Erzeugung einzelner Solitonen (siehe Kap. 5.1.3). Der einzige wesentliche Unterschied besteht in der Geometrie des Lichtfeldes zur Phasenaufprägung. Hier werden zwei scharfe Kanten abgebildet, sodass nur der zentrale Bereich des Kondensats von einem homogenen Licht-



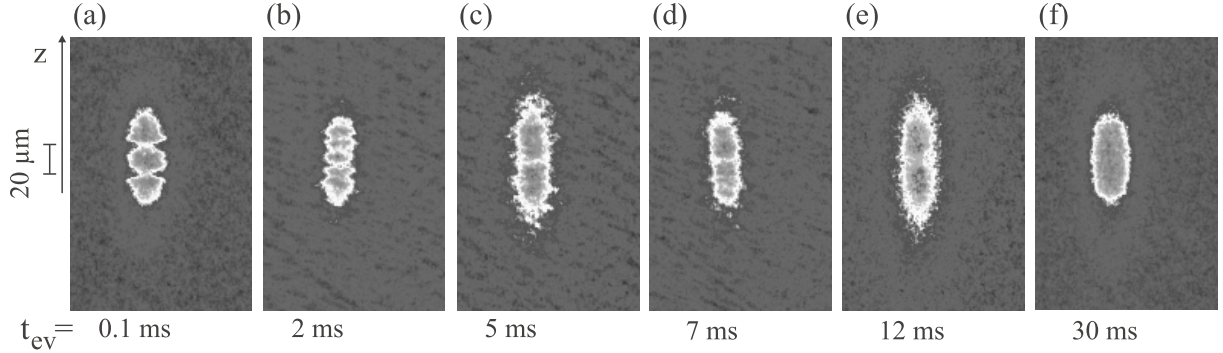


Abbildung 5.13: Absorptionsaufnahmen der Kollision zweier Solitonen zu verschiedenen Entwicklungszeiten in der Magnetfalle und jeweils nach einer Expansionszeit von  $t_{TOF} = 4 \text{ ms}$  in einer Falschfarbendarstellung. (Die Aufnahmen sind um  $90^\circ$  gedreht.) (a) Für kurze Entwicklungszeiten sind die Positionen, an denen die Solitonen erzeugt werden, zu erkennen. (b) Vier Dichteminima entwickeln sich nach  $t_{ev} \approx 2 \text{ ms}$ ; die beiden inneren Minima propagieren jeweils entgegen dem aufgeprägten Phasengradienten (vergleiche Abb. 5.11). (c) Kollision der Solitonen; die Solitonen bilden in der Absorptionsaufnahme ein gemeinsames, zentrales Minimum. (d, e) Ausgewählte Bilder des Verhaltens nach der Kollision (siehe Text). (f) Nach langen Evolutionszeiten geht das Kondensat durch thermodynamische Dissipationsprozesse in den Grundzustand über.

feld beleuchtet wird. Durch eine unterschiedliche Positionierung der beiden Kanten in der Gegenstandsebene können unterschiedlich scharfe Abbildungen auf das Kondensat erzielt werden und so Solitonen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten erzeugt werden. In den hier beschriebenen Experimenten wurden die Kanten im Rahmen der Messgenauigkeit gleich scharf abgebildet <sup>5</sup>.

Erste Ergebnisse der experimentellen Untersuchung der Wechselwirkung dunkler Solitonen [81] sind in Abb. 5.13 und Abb. 5.14 dargestellt.

Abb. 5.13 zeigt Absorptionsaufnahmen aus einer typischen Messserie. Für kurze Entwicklungszeiten, bis zum Zusammentreffen der Solitonen stimmt das Verhalten der Solitonen genau mit den aus numerischen Simulationen ermittelten Verhalten überein: An den Stellen der aufgeprägten Phasengradienten entwickeln sich zwei Solitonen (Abb. 5.13a,b), die aufeinander zulaufen und sich im Zentrum des Kondensats treffen (Abb. 5.13c). In sämt-

<sup>5</sup>Die Scharfstellung der Abbildung lässt sich durch die Minimierung der Solitonengeschwindigkeit optimieren. Im Rahmen der Messgenauigkeit ( $\approx 20\%$ ) wurden mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten propagierende Solitonen erzeugt.

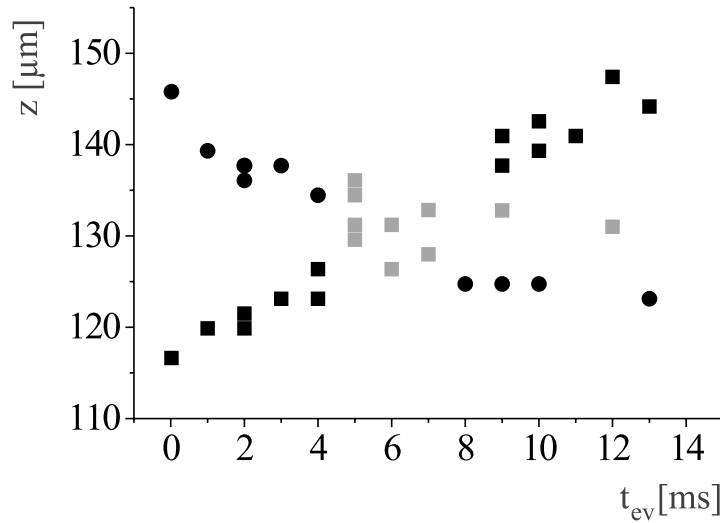


Abbildung 5.14: Entwicklung zweier kollidierender Solitonen in der Magnetfalle. Aufgetragen sind die Solitonenposition über der Entwicklungszeit  $t_{ev}$ . Die unterschiedlichen Symbole dienen als *guide-for-the-eye*. Die grauen Symbole deuten dabei den Wechselwirkungsbereich an, die unterschiedlichen schwarzen Symbole gehen von einer Kollision ohne Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit der Solitonen aus (analog zu den Ergebnissen der numerischen 1D Simulationen, siehe Abb. 5.11).

lichen der durchgeführten etwa 30 Messreihen mit jeweils 30-80 Aufnahmen finden nach dem Zusammentreffen der Solitonen große Fluktuationen in den Positionen der detektierten Solitonen statt, während die Solitonen bis zum Zusammentreffen sehr reproduzierbar mit konstanter Geschwindigkeit propagieren. Ausgewählte Aufnahmen sind in 5.13d,e) abgebildet; Abb. 5.14 zeigt die Positionen der detektierten Solitonen in Abhängigkeit von der Evolutionszeit und verdeutlicht die Streuung der Messwerte ab dem Zusammentreffen der Solitonen. Nach längeren Evolutionszeiten gelangt das Bose-Einstein Kondensat durch dissipative Prozesse wieder in den Grundzustand (Abb. 5.13f), vergleiche Kap. 5.4).

Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten liegt darin begründet, dass die erwartete repulsive Wechselwirkung der Solitonen zu einer kurzzeitigen Verlangsamung der Solitonen führt [127] und dass die thermodynamischen und dynamischen Dissipationsprozesse sich bei langsameren Solitonen wesentlich stärker auswirken (siehe Kap. 4.2.2). Dies könnte zu einer wesentlich höheren Abhängigkeit der Dynamik der kollidierenden Solitonen von Schwankungen des Experiments (z.B. der Temperatur) führen als bei einzelnen Solitonen.

Der Einfluss dissipativer Effekte kann stark unterdrückt werden, indem die Versuche an in quasi-eindimensionalen Wellenleitern geführten Kondensaten durchgeführt werden. In diesem Fall lässt sich erwarten, dass die thermodynamische Dissipation von Solitonen stark unterdrückt ist, da in dem in radialer Richtung räumlich stark begrenzten Potential kaum Atome der thermischen Wolke gehalten werden können. Zudem ist in den Wellenlei-

tern ein axialer Einschluss mit einem Abstand der Energieniveaus, der wesentlich größer als das chemische Potential des Kondensats ist (*quasi 1D*), möglich. In diesen Potentialen ist die dynamische Dissipation auch für verschwindende Solitonengeschwindigkeit,  $u \rightarrow 0$ , unterdrückt [109, 104].

Zur Zeit befinden sich im Hannoveraner BEC-Projekt Experimente zum adiabatischen Umladen der Kondensate in röhrenförmige Lichtfelder ( $\text{TEM}_{01}^*$ -Moden), die einen quasi 1D Einschluss ermöglichen, im Aufbau [62].

# Kapitel 6

## Experimente zur Atomoptik mit Bose-Einstein Kondensaten

Wichtige Anwendungen von Bose-Einstein Kondensaten liegen in deren Ausnutzung als monochromatische Quelle für die Atomlitographie und als Quelle kohärenter Materiewellen für die Atominterferometrie [149]. Hierfür ist die Entwicklung geeigneter, kohärenzerhaltender atomoptischer Elemente notwendig.

Schon seit es um 1985 durch die Erfolge der Laserkühlung möglich geworden ist, atomare Ensembles zu produzieren, die so kalt sind, dass der Wellencharakter der Atome hervortritt, werden kohärenzerhaltende atomoptische Elemente intensiv untersucht. Zu den realisierten Elementen zählen in Analogie zur Optik Spiegel, Wellenleiter, Resonatoren, Strahlteiler und Hologramme (für einen Überblick siehe z.B. [150, 151]). Bis zur Realisierung der Bose-Einstein Kondensation konnten diese Elemente nur zur Manipulation inkohärenter Ensembles genutzt werden und in einem Dichteregime, in dem interatomare Wechselwirkungseffekte zu vernachlässigen waren, untersucht werden. Nun gilt es, neue atomoptische Elemente zu entwickeln, die in BEC-Experimenten einsetzbar sind und neuen Interferometerkonzepten für Bose-Einstein Kondensate genügen. Beim Einsatz von Bose-Einstein Kondensaten als Quelle der atomoptischen Experimente ist vor allem der Einfluss der Wechselwirkungen zu berücksichtigen und die Entwicklung der Phase der makroskopischen Wellenfunktion zu untersuchen.

Ein Gedankenexperiment eines Atominterferometers für Bose-Einstein Kondensate ist in Abb. 6.1 dargestellt und soll die Problemstellung verdeutlichen. Hier werden auf Dipolpotentialen basierende Spiegel, Strahlteiler und Phasenschieber sowie die Schwerkraft ausgenutzt, um ein BEC kohärent aufzuspalten, zu reflektieren, die Phase in einem Interferometerarm zu manipulieren und um die beiden Teilstrahlengänge wieder zur Überlagerung zu bringen. Der Strahlteiler wirkt hier nicht über den Tunneleffekt sondern teilt eine einfallende Wellenfunktion gemäß ihrem Impulsspektrum: hohe Impulskomponenten werden transmittiert,

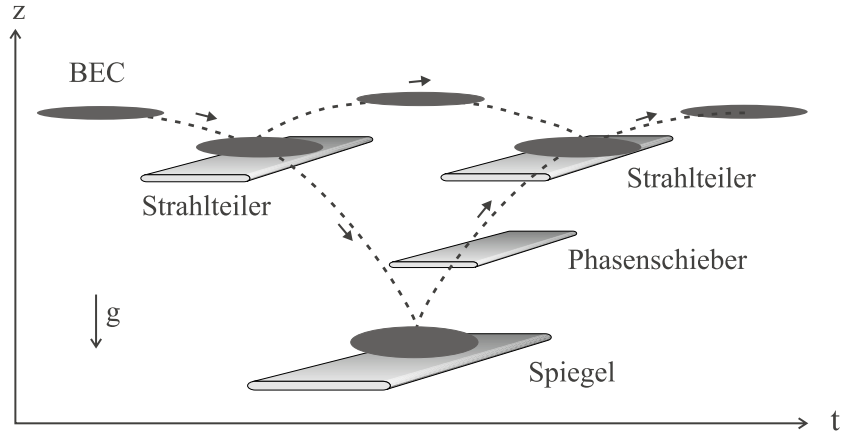


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung eines Interferometers für Bose-Einstein Kondensate. Die einzelnen Elemente Spiegel, Strahlteiler und Phasenschieber können durch die Dipolpotentiale frei propagierender Laserstrahlen realisiert werden.

niedrige reflektiert. Die Wellenfunktionen, die frei fallende Bose-Einstein Kondensate beschreiben, besitzen aufgrund der in kinetische Energie umgesetzten Wechselwirkungsenergie ein hohes Impulsspektrum; sie lassen sich durch geeignete Wahl der Parameter des Strahlteilers kohärent in zwei gleich stark besetzte Teilwellenpakete aufspalten. Die anschließende Überlagerung führt zur Materiewelleninterferenz. Im Gegensatz hierzu lassen sich einzelne Atome einer thermischen Quelle mit einem hohen atomaren Fluss nach dem heutigen Stand der Technik praktisch nicht in Zuständen mit einem ähnlich hohen Impulsspektrum präparieren; wird aber eine thermische Quelle mit einem hohen Impulsspektrum der emittierten Atome verwendet, sodass einzelne Atome je nach ihrem Impuls reflektiert oder transmittiert werden, so sind keine Interferenzen zu erwarten.

Im Rahmen dieser Arbeit und in Zusammenarbeit mit [31] wurden verschiedene auf Dipolpotentialen basierende atomoptische Elemente entwickelt und erstmals an Bose-Einstein Kondensaten eingesetzt und charakterisiert. Neben der holographischen Methode der Phasenaufprägung (Kap. 4, 5) wurden Experimente mit Linsen, Spiegeln [9], Strahlteilern und Wellenleitern [32, 81] durchgeführt.

Die folgenden Abschnitte fassen die Ergebnisse kurz zusammen.

## 6.1 Atomoptische Linsen

Linsen sind wichtige atomoptische Elemente, die u.a. in der Atomlithographie ein hohes Anwendungspotential besitzen. Zur Fokussierung oder Abbildung neutraler Atome können unterschiedliche Effekte ausgenutzt werden, unter anderem die Wechselwirkungen der Atome

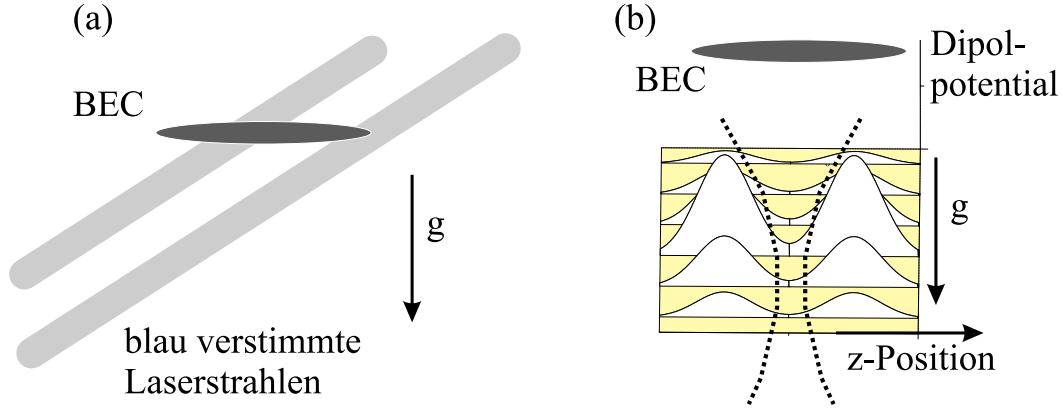


Abbildung 6.2: Prinzip einer auf Dipolpotentialen basierenden Zylinderlinse für Atome. (a) Zwei weit blau verstimmete Gaußsche Laserstrahlen werden unterhalb eines BEC eingestrahlt. (b) Das resultierende fokussierende Potential mit einem Minimum zwischen den beiden Strahlen; die gestrichelten Kurven deuten Äquipotentialflächen an.

mit magnetischen Feldern, Zonenplatten, Lichtkräften (für einen Überblick siehe [150]) und elektrischen Feldern [152].

Im hier beschriebenen Experiment wurde eine Zylinderlinse mit Hilfe des Dipolpotentials eines weit blau verstimmtten Lichtfelds realisiert. Abb. 6.2 zeigt den schematischen Aufbau: Zwei Laserstrahlen der Wellenlänge  $\lambda = 532 \text{ nm}$  mit einer Strahltaile von  $w \approx 30 \mu\text{m}$  ( $1/e$ -Abfall der Intensität) und einem horizontalen Abstand von  $90 \mu\text{m}$  werden ca.  $110 \mu\text{m}$  unterhalb des Bose-Einstein Kondensats eingestrahlt. Das Dipolpotential im Intensitätsmaximum der Strahlen lässt sich über die maximale Fallhöhe, aus der Atome reflektiert werden, direkt messen und beträgt  $U_{dp} \approx 2.5 \cdot 10^{-28} \text{ J}$ . Der resultierende Verlauf des Dipolpotentials lässt sich im zentralen Bereich zwischen den Strahlen harmonisch nähern. In einem harmonischen Potential wächst die (fokussierende) Dipolkraft linear mit dem Abstand von der Symmetrieachse („optischen Achse“). Daher lassen sich kollimierte Strahlen in harmonischen Potentialen ideal fokussieren. Materiewellen, die eine Linse mit einem harmonisches Potential durchlaufen, lassen sich prinzipiell auf eine Fleckgröße von

$$w \approx 2 \frac{f \lambda_{dB}}{D}, \quad (6.1)$$

fokussieren [150], mit der Brennweite der Linse,  $f$ , und dem ausgeleuchteten Durchmesser der Linse,  $D$ . Mit der in  $120 \mu\text{m}$  freiem Fall erlangten kinetischen Energie der Rb-Atome ergibt sich eine de Broglie Wellenlänge von  $\lambda_{dB} = 2\pi\hbar/\sqrt{2mE_{kin}} \approx 0.1 \mu\text{m}$ . Für ein stark fokussierendes Potential lassen sich also Fleckgrößen weit unterhalb der optischen Auflösungsgrenze erreichen.

Verschiedene Effekte begrenzen die im Experiment erreichbare minimale Fleckgröße:

1. Die Geschwindigkeitskomponenten der einfallenden Welle werden unterschiedlich lange

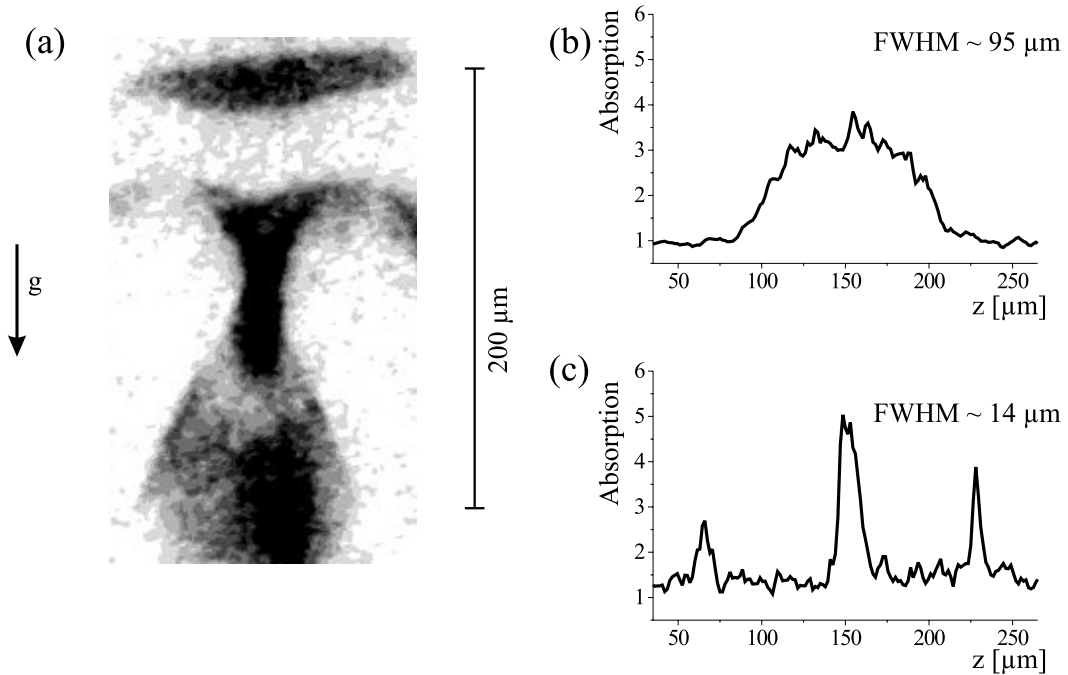


Abbildung 6.3: (a): Bose-Einstein Kondensate beim Durchgang durch eine mit Dipolpotentialen realisierte Zylinderlinse. (b), (c): Schnitte durch die Absorptionsschichten; (b) unfokussiert und (c) im Fokus.

dem fokussierenden Potential ausgesetzt und so mit unterschiedlichen Brennweiten fokussiert (*chromatische Aberration*). Dieser Effekt ist für atomare Ensembles mit einer relativen Geschwindigkeitsbreite  $\Delta v/v \ll 2f\lambda_{dB}/D^2$  zu vernachlässigen [150]. In dem betrachteten Regime beträgt die Geschwindigkeitsbreite des Kondensats  $\Delta v/v \approx 4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}/50 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ; die chromatische Aberration ist hier für Brennweiten im Bereich von  $f = \mathcal{O}(D)$  zu vernachlässigen.

2. Die harmonische Näherung gilt nur im achsnahen Bereich. Erstreckt sich die zu fokussierende Materiewelle in höhere Bereiche der Gaußschen Potentiale, so treten Aberrationen ähnlich der *sphärischen Aberration* in der Optik auf.

3. Die Gradienten des Dipolpotentials in der Fallrichtung sorgen für eine zusätzliche Aberration achsferner Anteile der Materiewelle, da sie die Durchflugzeit durch das Potential unterschiedlich beeinflussen.

4. Wechselwirkungseffekte der Atome spielen bei der Fokussierung mit Zylinderlinsen eine untergeordnete Rolle, da die Atomwolke in der freien Dimension weiter expandieren kann. Bei der Fokussierung eines BEC in mehreren Dimensionen, z.B. durch die Kombination zweier Zylinderlinsen, ist die Fleckgröße zusätzlich durch die maximal erreichbare Wechselwirkungsenergie, die die Gesamtenergie des Systems nicht überschreiten kann, begrenzt.

Abbildung 6.3 zeigt Absorptionsschichten von Bose-Einstein Kondensaten, die von der oben beschriebenen Zylinderlinse fokussiert werden. Zur Verdeutlichung der Fokussierung

wurden hier Bilder von Kondensaten zu unterschiedlichen Zeiten während der Wechselwirkung mit der Linse zusammengefügt. Die Halbwertsbreite der atomaren Verteilung wird hier von etwa  $95\ \mu\text{m}$  auf  $14\ \mu\text{m}$  reduziert <sup>1</sup>. Dieser Wert ist deutlich höher als die nach Gl. 6.1 zu erwartende Fleckgröße im sub- $\mu\text{m}$ -Bereich. Die chromatische Aberration und Wechselwirkungseffekte sind hier auszuschließen. Die Gründe für die beschränkte Fokussierung liegen in den Aberrationseffekten achsferner Strahlen.

Eine interessante Perspektive für die Fokussierung von Bose-Einstein Kondensaten ist die Erhöhung der atomaren Dichte, die durch eine Umsetzung der im freien Fall erlangten kinetischen Energie in Wechselwirkungsenergie erreicht werden kann. Dies ist möglich, indem die Effekte der Aberration achsferner Strahlen durch Linsensysteme mit angepasstem Potentialverlauf korrigiert werden.

## 6.2 Fokussierung eines Atomlaserstrahles

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Zylinderlinse wurde auch benutzt, um die ausgekoppelten Atome eines Atomlasers (siehe Kap. 2.2.6) zu fokussieren. Da der ausgekoppelte Atomstrahl einen geringeren Teil der Linse ausleuchtet, können die Effekte der Aberration achsferner Strahlen hier stärker unterdrückt werden. Außerdem ist es möglich, mit der Auskopplung in atomare Zustände unterschiedlicher  $m_F$ -Quantenzahlen monochromatische Atomstrahlen verschiedener Geschwindigkeiten herzustellen. Hiermit wurde die chromatische Aberration der Linse untersucht.

Abb. 6.4 gibt die Absorptionaufnahme eines quasi-kontinuierlichen Atomlasers, der von einer Linse fokussiert wird, wieder. Die Intensität des auskoppelnden RF-Feldes wurde so hoch gewählt, dass sowohl die atomare  $|m_F = 0\rangle$ -Komponente als auch die  $|m_F = -1\rangle$ -Komponente mit einer hohen Anzahl von Atomen besetzt waren. Die Parameter der fokussierenden Zylinderlinse entsprechen den Parametern aus Abschnitt 6.1. Die Aufnahme ist durch Mittelung von sechs Einzelaufnahmen mit 2 ms, 2.3 ms und 2.7 ms Auskoppelzeit aus dem Kondensat entstanden.

Die unterschiedlich langen Wechselwirkungszeiten der beiden Komponenten des Atomlasers mit dem Potential der Linse führen dazu, dass diese an unterschiedlichen Stellen fokussiert werden. In Abb. 6.5 sind Messwerte der Halbwertsbreiten der beiden Komponenten in Abhängigkeit von der Position im Atomlaserstrahl angegeben. Während der Fokus der (langsameren)  $|m_F = 0\rangle$ -Komponente im Bereich hohen Linsenpotentials liegt („im Nahfeld“, Abb. 6.5 a), wird die  $|m_F = -1\rangle$ -Komponente erst etwa  $200\ \mu\text{m}$  nach Durchgang durch

---

<sup>1</sup>Die hier gemessene Breite der atomaren Verteilung ist noch nicht durch das Auflösungsvermögen des Detektionssystems,  $(10 \pm 2)\ \mu\text{m}$ , begrenzt (vergleiche Kap. 6.2).



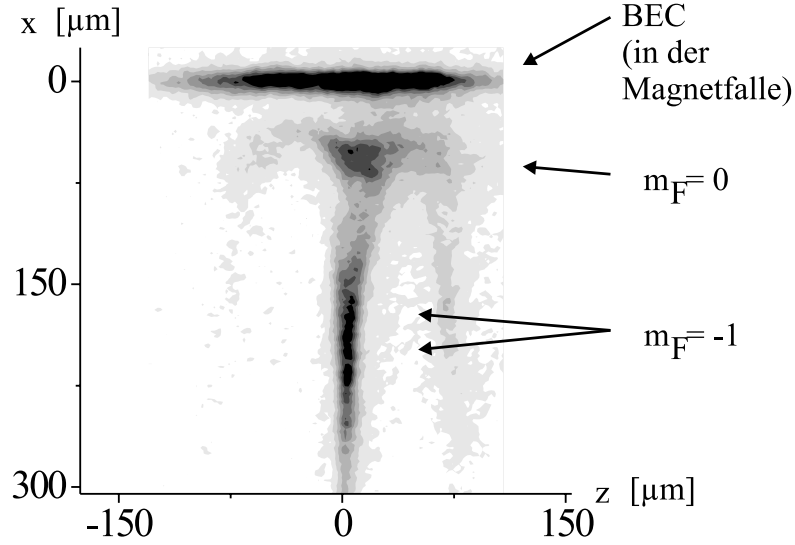


Abbildung 6.4: Fokussierung eines Atomlaserstrahls. Durch Auskopplung aus dem BEC mit einem RF-Feld werden die Zustände  $|m_F = 0\rangle$  und  $|m_F = -1\rangle$  besetzt. Der Anteil  $|m_F = 0\rangle$ -Anteil fällt im Gravitationsfeld, der  $|m_F = -1\rangle$ -Anteil wird zusätzlich durch das inhomogene Magnetfeld beschleunigt. Die beiden Komponenten werden von der atomoptischen Linse an unterschiedlichen Positionen fokussiert (*chromatische Aberration*). Dieses Absorptionsbild zeigt das System nach 2-3 ms kontinuierlicher Auskopplung und 1 ms zusätzlicher Expansion.

die Linse fokussiert („im Fernfeld“, Abb. 6.5 b). Da die  $|m_F = -1\rangle$ -Komponente bei der Wechselwirkung mit der Linse eine höhere Geschwindigkeit besitzt, sind für sie auch die Effekte der Aberration achsferner Strahlen durch Dipolpotential-Gradienten in Strahlrichtung wesentlich herabgesetzt. Die minimale gemessene Halbwertsbreite beträgt hier  $(10 \pm 2) \mu\text{m}$  und ist durch das Auflösungsvermögen des Detektionssystems begrenzt.

Zum Vergleich der chromatischen Aberration der Linse mit der Theorie wurde die Schrödinger-Gleichung für die Parameter des Experiments numerisch in 1D gelöst (Abb. 6.5 c,d). Zur Simulation der Wechselwirkung der  $|m_F = -1\rangle$ -Komponente mit dem Dipolpotential wurde die Propagation durch das Potential als konstant beschleunigte Bewegung angenommen. Die Brennweiten der Komponenten liegen hier bei  $f(m_F = 0) = 25 \mu\text{m}$  und  $f(m_F = -1) = 200 \mu\text{m}$ , in qualitativer Übereinstimmung mit den experimentellen Werten von  $f(m_F = 0) = 10_{-5}^{+10} \mu\text{m}$  und  $f(m_F = -1) = 250_{-50}^{+100} \mu\text{m}$ .

Effekte der Aberration achsferner Strahlen durch die Potentialgradienten in  $x$ -Richtung werden in der Simulation nicht berücksichtigt; deshalb wird in den Simulationen die atomare Verteilung auch der  $|m_F = 0\rangle$ -Komponente bis in den sub- $\mu\text{m}$  Bereich fokussiert, während die Fleckgröße dieser Komponente in den Messungen deutlich über der Auflösungsgrenze des Detektionssystems liegt. Um ein Linsensystem für die Erzeugung minimaler Fleckgrößen zu

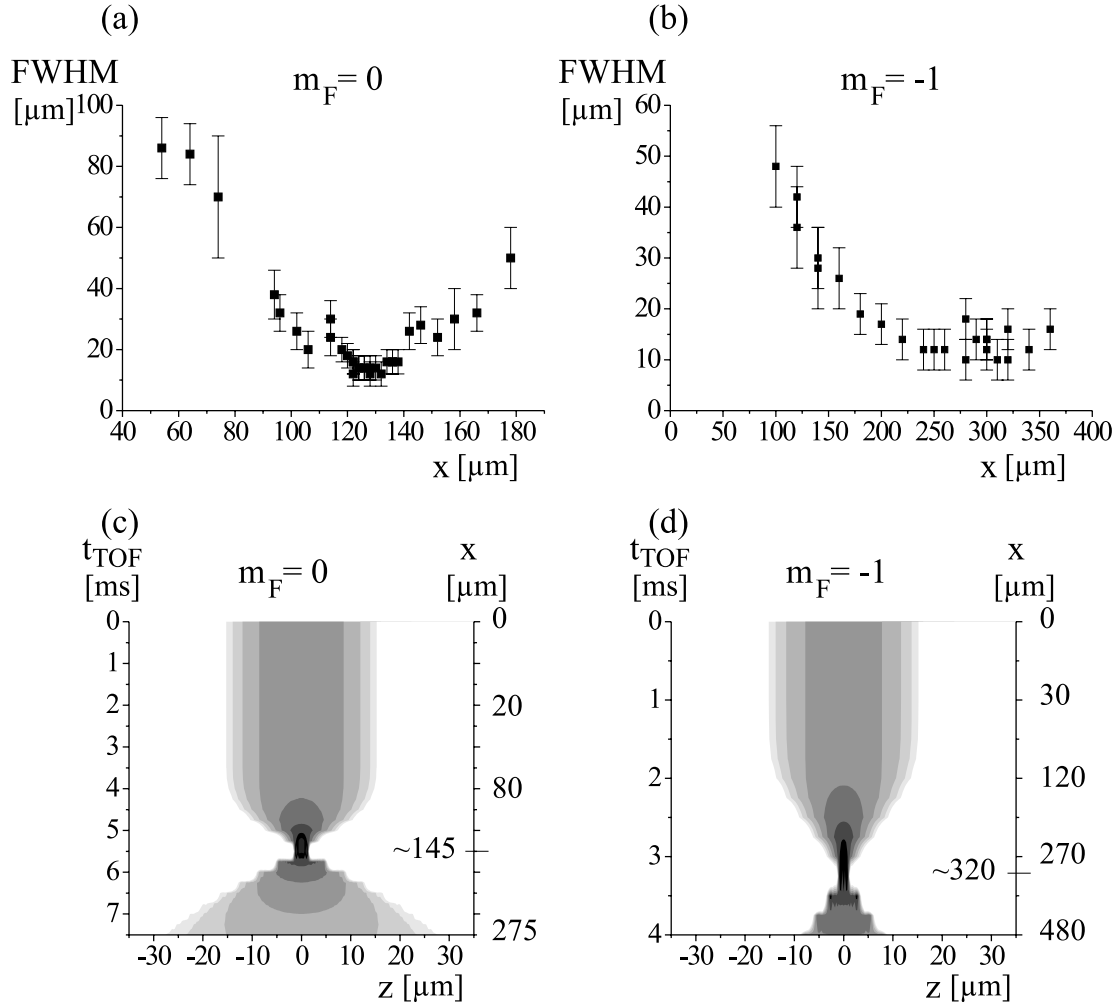


Abbildung 6.5: Vergleich experimenteller Resultate zur chromatischen Aberration einer Linse für einen Atomlaser mit numerischen Simulationen. (a, b): Halbwertsbreiten der Atomlaserstrahlen während der Fokussierung. (c, d): Dichteprofile der Wellenfunktionen in Simulationen der Schrödinger-Gleichung für die experimentellen Parameter der Fokussierung der  $|m_F = 0\rangle$ - und der  $|m_F = -1\rangle$ -Komponente eines Atomlasers.

entwerfen, sind somit numerische Simulationen in mehreren Dimensionen notwendig.

Die hier erstmalig an Atomlasern demonstrierten, auf blauverstimmten Dipolpotentialen basierenden atomoptischen Linsen stellen ein Manipulationselement dar, mit dem sich Atomlaserstrahlen auf extrem kleine Fleckgrößen fokussieren lassen. Über die Parameter der Linsen lassen sich ihre abbildenden Eigenschaften sehr flexibel ändern. Beispiele für ihren Einsatz sind ein angepasstes Laden des Atomlaserstrahls in eine 1D-Wellenleiter-Geometrie und neue Litographieverfahren für die Nanotechnologie.

## 6.3 Atomoptische Spiegel, Strahlteiler und Wellenleiter

Weitere im Rahmen dieser Arbeit und in Zusammenarbeit mit [31] entwickelte und auf Dipolpotentialen beruhende atomoptische Elemente zur Manipulation von Bose-Einstein Kondensaten sind Spiegel, Strahlteiler und Wellenleiter. Sie wurden im Rahmen des Hannoveraner BEC-Projektes erstmalig an Bose-Einstein Kondensaten eingesetzt. Eingehende Diskussionen finden sich in [31, 62, 63, 56] und in mehreren Veröffentlichungen [9, 32, 81], von denen eine [32] im folgenden Anhang zu diesem Kapitel abgedruckt wird.

Dieser in (6.3.1) abgedruckte Artikel [32] diskutiert Anwendungen von Bose-Einstein Kondensaten als Quellen verschiedener atomoptischer Experimente; er ist wie folgt strukturiert:

Das erste Kapitel liefert eine Einleitung in optische Dipolpotentiale. Im darauf folgenden Kapitel wird die Evolution von Bose-Einstein Kondensaten untersucht, die im Schwerfeld fallen und an einem atomoptischen Spiegel, der durch ein weitverstimmtes Lichtfeld realisiert wird, reflektiert werden. Nach der Reflexion entwickeln sich im Dichteprofil der atomaren Wolke Strukturen, die von der Fallhöhe, der Intensität des Lichtfeldes sowie von der Wechselwirkungsenergie im Kondensat abhängen. Experimentelle Resultate hierzu werden mit Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung verglichen. Weiterhin erlaubt es der Vergleich mit dem Verhalten einer reflektierten thermischen Wolke, quantenmechanische Effekte bei der Reflexion von Kondensaten zu identifizieren.

Im darauf folgenden Kapitel werden Experimente zum Umladen von Bose-Einstein Kondensaten in atomare de Broglie-Wellenleiter vorgestellt. Diese Wellenleiter werden durch das Dipolpotential von Laguerre-Gaußschen Lichtfeldern realisiert. Ein Transport der atomaren Ensembles in den Wellenleiterstrukturen wurde realisiert. Anwendungen von atomaren Wellenleitern werden diskutiert.

Das letzte Kapitel dieser Veröffentlichung beschreibt Simulationen zur Erzeugung von Vortices in Bose-Einstein Kondensaten mit Hilfe der Phasenaufprägungsmethode und die ersten experimentellen Ergebnisse zur Erzeugung von dunklen Solitonen mit dieser Methode.

## 6.3.1 Anhang zu Kapitel 6

### Chapter 1

# ATOM OPTICS WITH BOSE-EINSTEIN CONDENSATES

S. Burger, K. Bongs, K. Sengstock, and W. Ertmer  
*Institut für Quantenoptik, Universität Hannover,  
30167 Hannover, Germany*

## 1. INTRODUCTION

The purpose of this lecture is to give an insight into coherent atom optics by discussing recent experiments using Bose-Einstein condensates in atom optical experiments.

Since the first experimental realization of Bose-Einstein condensation (BEC) in weakly interacting atomic systems <sup>1, 2, 3, 4</sup>, many fundamental experiments with BEC's have been performed <sup>5, 6</sup>. One of the most interesting future prospects for Bose-Einstein condensates is their application as a source of coherent matter waves <sup>7, 8, 9, 10</sup>, e.g., in atom optics and atom interferometry. This offers a significant advance similar to the introduction of lasers in light optics.

The application of coherent matter waves in phase sensitive experiments, like interferometers, demands for the understanding of their evolution when being manipulated by atom optical elements like mirrors and beamsplitters. The dynamics of coherent matter waves during and after the interaction with these elements is in comparison to single-atom optics much more complex and may easily lead to 'non-linear atom optics', e.g., to four wave mixing <sup>11</sup>.

In the first part of this lecture we will focus on the design of typical atom optical elements. One of the key elements are atom mirrors <sup>12</sup> which we have applied to Bose-Einstein condensates <sup>13</sup>. Another very important element for future applications are atom waveguides <sup>14</sup>. They may be used to confine the motion of Bose-Einstein condensates or the output of an atom laser to one dimension. In addition, they allow for new interferometric geometries by holding the condensate against gravity. Together with atom mirrors they can be used as resonators for atomic

de Broglie waves. In combination with partially transmitting mirrors this would be the reservoir of a directed atom laser. Finally, waveguides could even be used to explore superfluid behaviour of BEC's. We will discuss these aspects in the fourth part.

Atom mirrors and waveguides are 'classical' elements in the sense that they are represented by a conservative potential directly influencing the density distribution of the atomic ensemble. Recently, holographic methods which only have an effect on the phase of an atom or the collective phase of a BEC have been developed<sup>15</sup>. *Imprinting* a spatially varying phase on Bose-Einstein condensates is a powerful tool of atom holography. This technique and its application in converting ground state Bose-Einstein condensates to excited states like vortex or soliton states will be discussed in the last part of the lecture.

## 2. DIPOLE POTENTIALS

Due to the interaction between an atom and a far detuned light field (described by the ac Stark shift), atoms are either attracted or repelled from regions of high intensity depending on the sign of the detuning of the light. The coherent manipulation of atomic motion by these dipole forces is widely used in atom optics<sup>16</sup>.

In first order approximation, the potential energy corresponding to the dipole force acting on an atom in a far detuned light field is given by

$$U(r) = \frac{\hbar\Omega^2(r)}{4\delta_c}. \quad (1.1)$$

Here,  $\Omega(r)$  is the Rabi frequency, and  $\delta_c = \omega_l - \omega_0$  is the detuning of the light field, where  $\omega_l$  is the laser frequency, and  $\omega_0$  is the frequency of the relevant atomic transition.

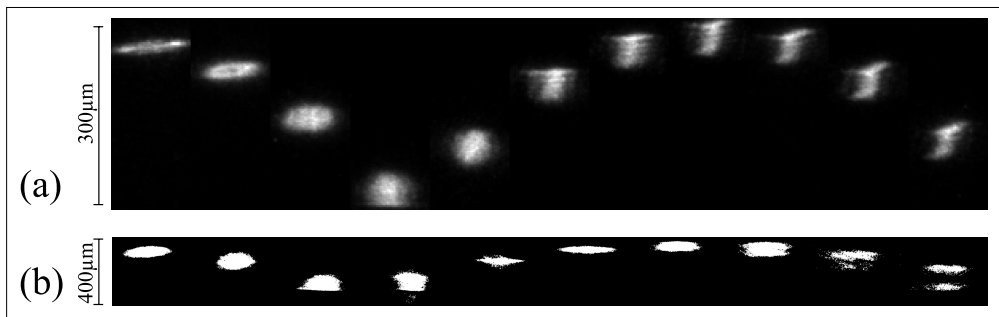
For a large laser detuning, spontaneous processes can often be neglected. This allows for a *coherent* manipulation of the atomic motion. For a dipole potential, then acting as a *coherent* atom optical element, the appropriate laser frequency has to be chosen. As can be seen from eqn.1.1, blue detuned light ( $\omega_l \gg \omega_0$ ) repels the atoms whereas red detuned light ( $\omega_l \ll \omega_0$ ) attracts the atoms to regions of high laser intensity. Thus it is possible to trap or guide atoms in appropriate geometries of dipole potentials. Compared to red detuned light potentials, blue detuned light potentials have the advantage of confining the atoms in a region of low laser intensity, thereby light scattering which leads to decoherence is suppressed more.

In the subsequent sections we describe experiments in which optical dipole potentials are created by blue detuned, far off-resonant laser light.

### 3. MIRRORS FOR BEC

Here we discuss experiments demonstrating the bouncing of atomic BEC's off a mirror formed by a repulsive dipole potential. Condensates released from a magnetic trap fall under the influence of gravity and interact with a blue-detuned far-off-resonant “sheet” of light.

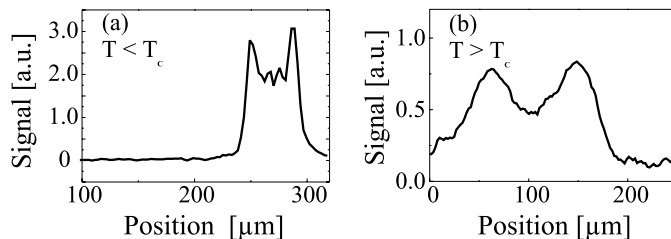
In the experimental setup<sup>17</sup>, condensates typically containing  $10^5$   $^{87}\text{Rb}$  atoms in the ( $F=2$ ,  $m_F=+2$ )-state are produced every 20s. Less than 10 % of the atoms of the cloud are in the non-condensate fraction, this corresponds to a temperature range of  $\simeq 200$  nK. The fundamental frequencies of the magnetic trap (a ‘cloverleaf’ trap<sup>18</sup>) are  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 17\text{Hz}$  and  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 340\text{Hz}$  along the axial and radial directions, respectively. Therefore, the condensates are pencil-shaped with the long axis (length  $\approx 100\mu\text{m}$ ) oriented horizontally. The trap can be switched off within  $200\mu\text{s}$ , and – after a variable time delay – the density distribution of the atomic sample can be detected using absorption imaging, dark field imaging, or phase-contrast imaging. The 2D-image plane contains the weak trap axis as well as the strong trap axis along the direction of gravity.



*Figure 1.1* (a) Series of dark-field images for BEC's of  $^{87}\text{Rb}$  bouncing off a light sheet  $270\mu\text{m}$  below the magnetic trap. Each image was taken with a new condensate and with an additional time delay of 2ms. The density of the condensate during the first few ms of expansion causes a phaseshift in the detection light of more than  $2\pi$ , which explains the dark area in the middle of the first two images. (b) A thermal cloud bouncing off a light sheet placed  $230\mu\text{m}$  below the magnetic trap splits into two parts.

The atom mirror is created by a Gaussian laser beam from a frequency doubled Nd:Vanadate laser ( $\lambda = 532\text{nm}$ ), focused to a waist of

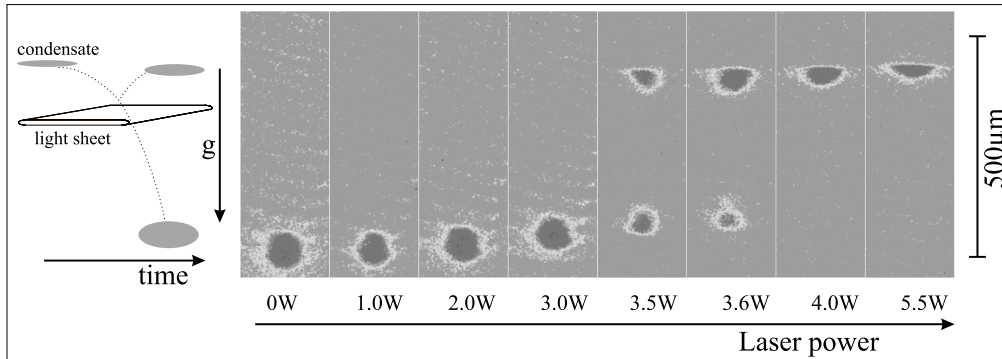
about  $10\ \mu\text{m}$  and spatially modulated with an acousto-optic deflector in the horizontal plane. The modulation period of typically  $10\ \mu\text{s}$  is much shorter than the time the atoms are spending inside the dipole potential. For the atoms this results in a time-averaged static dipole potential. In contrast to magnetic mirrors or evanescent wave mirrors, changing the modulation waveform gives the flexibility to externally define the intensity profile. For the experiments presented here, a flat light sheet oriented nearly perpendicular to the direction of gravity is used. The time-averaged beam profile has a spatial extent of  $\simeq 200\ \mu\text{m}$  in the horizontal direction. The interaction of the atoms with the light field is dominated by the  $780\text{nm}$  and  $795\text{nm}$  dipole transitions, leading to a repulsive potential barrier with a detuning large enough that spontaneous emission becomes negligible. Ultra cold atomic clouds dropped from a height of up to  $300\ \mu\text{m}$  can thus totally be reflected.



*Figure 1.2* Cross sections of images of a bouncing BEC (a) and a bouncing thermal cloud (b). Graph (a) corresponds frame 9 of Fig.1.1(a). Graph (b) is a cross section of the last frame in Fig.1.1(b).

In the experiments described here, the clouds were reflected off the mirror up to three times before they laterally move out of the field of view due to a slight slope in the orientation of the light sheet. The behaviour of the reflected atomic samples can be modified by changing the drop height, as well as the power and waist of the light sheet. This allows for the observation of two regimes in the wave packet dynamics: the dispersive reflection off weak dipole potentials (‘soft’ mirror) and the nearly non-dispersive reflection off strong dipole potentials (‘hard’ mirror).

Fig. 1.1(a) shows a time-of-flight series of Bose-Einstein condensates bouncing off a soft mirror. Each frame is recorded with a different condensate, created under identical experimental conditions. The light sheet is positioned  $270\ \mu\text{m}$  below the magnetic trap and shows up as the sharp lower edge in the fourth frame. The high kinetic energy accumulated before hitting the atom mirror causes the atomic cloud to penetrate deep into the dipole potential before being reflected. The corresponding



*Figure 1.3* Absorption images of BEC's after 10 ms time-of-flight and after interaction with the dipole potential of a light sheet placed about  $200\mu\text{m}$  below the magnetic trap. For different potential heights the light sheet acts as phase shifter, delaying the atoms (0W...3W), as dispersive beam splitter (3.5W, 3.6W), or as atom mirror (4W, 5.5W).

classical turning point is situated close to the maximum of the Gaussian intensity profile, in a region with a weak gradient of the repulsive potential. Further increasing the drop height or reducing the laser power results in a partial transmission through the mirror.

As the condensate reapproaches the initial altitude, it develops self interference structures (frames 6 to 11 in Fig.1.1(a) and Fig.1.2(a)) which do not occur for temperatures above the critical temperature for BEC,  $T_c$ . The selfinterference structures prove the persistence of matter-wave coherence for BEC's reflected off the dipole potential atom mirror<sup>13</sup>.

In another set of measurements, a nearly non-dispersive mirror for Bose-Einstein condensates was created by placing an intense light sheet closer to the magnetic trap ( $155\mu\text{m}$  drop height). This resembles reflection off an infinite potential step. Close to the upper turning point, the atom cloud is refocussed to a narrow distribution along the direction of gravity, and develops into a double-peak structure shortly after the upper turning point. No interference structures such as those presented in Fig.1.1(a) are observed here.

In order to compare the bouncing of condensates to single atom optical effects, bouncing experiments with atom clouds cooled to a temperature just above the critical temperature,  $T_c$ , have been performed. Surprisingly, thermal clouds of ultra cold atoms also reveal splitting after reflection off a hard atom mirror. Typically, this splitting is more pronounced than the double peaked structure for BEC's (see Fig.1.1(b) and 1.2(b)).



From simulations of the classical Liouville equation for the flow of density in phase space it can be seen that, indeed, classical dynamics leads to splitting of the cloud right after passing through the upper turning point.

To understand how the interference structures in bouncing BEC's arise, numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation have been performed to mimic the experimental behaviour of the condensate. The trapped condensate has a radial width of  $\Delta z \sim \text{few } \mu\text{m}$ . The velocity spread is thus of order  $\Delta v \simeq \hbar/M\Delta z \simeq 10^{-1} \mu\text{m/ms}$ , with atom mass  $M$ . A classical cloud with such parameters does not show any splitting or specific structure. Similarly, the wave packet of a single atom evolving according to the linear Schrödinger equation does not split. In the condensate, however, the potential energy of the atom-atom interaction is transferred into kinetic energy within few ms of ballistic expansion, allowing thus for the splitting.

As an important result from the simulations, splitting and selfinterference structures of the condensate are very sensitive to the value of the initial mean field energy – therefore, its appearance allows to estimate the number of atoms in the condensate fraction. For the value of the nonlinear coupling given above, splitting is observed only for atom numbers  $N \geq 5 \times 10^4$ . This is in good agreement with the experimental results, as the splitting vanished for smaller condensates.

In agreement with the experimental results described above, the numerical results also show additional structures before and after the upper turning point when a soft mirror is placed  $270 \mu\text{m}$  below the trap (Fig.1.4). Evidently, when the initial gravitational energy is comparable to the mirror height, the softness of the mirror causes velocity dependent dispersion for the reflected matter waves, leading to interferences and density modulation.

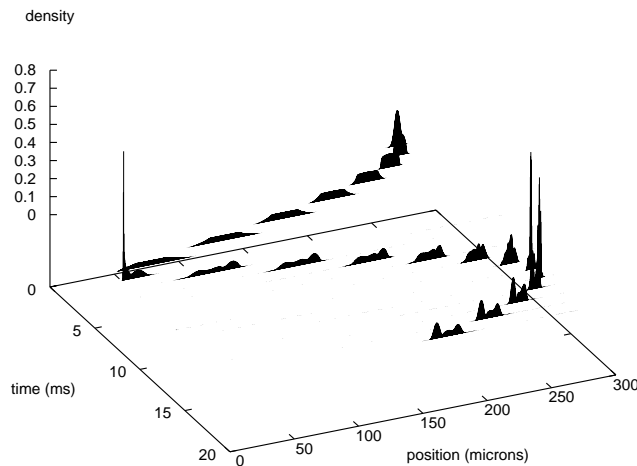
The interference structure can be explained by the fact that the split parts of the wave packet overlap in the central region, where the particles have positions and velocities very close to the mean ( $\Delta v \sim 0.5 \text{mm/s}$ , which corresponds to a fringe separation of  $h/M\Delta v \sim 10 \mu\text{m}$ , as observed). Each of the two parts has a different spatial phase dependence, and interference is observed. This effect is enhanced for soft mirrors. Indeed, the analysis indicates that in the quantum regime splitting cannot be regarded as a purely classical effect.

The numerical results agree well with the experimental observations and clearly explain the appearance of the different splitting behaviour for non-condensed samples and BEC's as well as the self-interference structure for bouncing off a 'soft' mirror.

The observation of splitting and of interference can be used to characterize and determine mirror properties such as roughness and steepness, and coherence properties of the condensate.

In addition to creating an atom mirror with reflectivity close to unity, partially reflecting mirrors and a phase shifter can be created by reducing the intensity of the light sheet. Then, the optical potential delays the atoms but does not cause reflection (see Fig.1.3).

These elements can in the future be applied to develop atom interferometers for Bose-Einstein condensates. The observed coherent splitting itself may also be applied to realize an atom interferometer in a pulsed scheme, e.g., by the application of additional light fields acting as mirrors and phase shifters for the individual partial waves. Furthermore, mirrors based on optical potentials can serve as detection scheme for matter wave coherence, i.e., the onset of BEC or the output properties of an atom laser. They may even be used to systematically characterize the coherence properties of these sources, or of coherent matter waves being manipulated by other techniques.



*Figure 1.4* Numerical results showing the time evolution of the condensate corresponding to the parameters of Fig.1.1 The ‘soft’ mirror is situated 270 microns below the magnetic trap, the number of atoms is  $N= 8 \times 10^4$ . (with friendly permission from A. Sanpera.)

#### 4. LOADING BEC'S INTO A DE BROGLIE WAVEGUIDE

Guiding of atoms has been demonstrated in the last years in experiments using hollow fiber-guides<sup>19, 20, 21, 22</sup> or freely propagating light beams<sup>23, 24</sup>. In these experiments, however, the temperature ranges have been orders of magnitude higher than the temperatures achievable in a BEC experiment. With an ultracold atom cloud slowly moving in a waveguide the population of the lowest transverse modes of the waveguide becomes feasible.

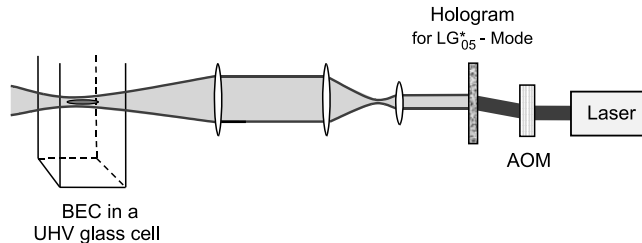
This section deals with the loading of a Bose-Einstein condensate to a linear waveguide formed by a far off resonant, hollow laserbeam. Due to the repulsive dipole force of the beam the atomic ensemble could be confined to the low intensity region with a loading rate of up to 100%. Trapping times are so far mainly limited by the longitudinal movement inside the waveguide. Heating effects within the waveguide have been observed.

We use a Laguerre-Gaussian beam of fifth order,  $LG_{05}$  ('donut-mode' of 5<sup>th</sup> order), to hold and guide the atoms loaded from Bose-Einstein condensates. The donut beam is generated from a  $TEM_{00}$  mode by a blazed mode converting hologram<sup>25</sup>. The intensity distribution in the donut mode,  $I(r)$ , is given by

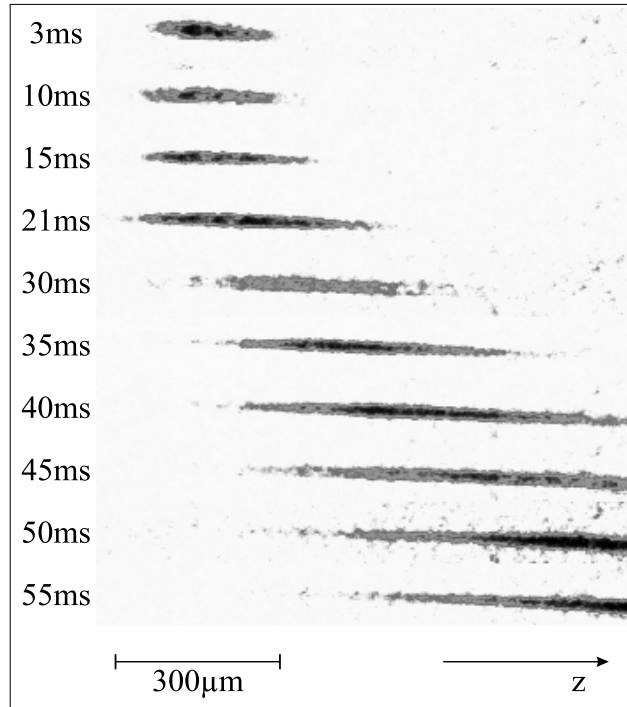
$$I(r) = \frac{8Pr^{10}}{15\pi r_0^{12}} \exp\left(-2\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (1.2)$$

with the laser power,  $P$ , and the radial parameter of the  $LG_{05}$  beam,  $r_0$ .

After transmission through the hologram, the laser beam is expanded by a telescope, and finally focused to a size of  $r_0 = 12\mu m$  (see Fig.1.5).



*Figure 1.5* Experimental setup: the light from a frequency doubled Nd:Vanadate laser passes an acousto-optical modulator, is converted to a Laguerre-Gaussian beam, and is directed to the magnetically trapped BEC inside a UHV glass cell.



*Figure 1.6* Atoms from a BEC loaded to a donut mode waveguide and sliding downhill ( $z$ -direction) due to gravity. Broadening of the cloud due to heating effects and to expansion of the BEC is observed. With ultracold atomic clouds it has nicely become possible to monitor the atomic dynamics within the waveguide.

Using eqn.1.1 with a laser wavelength of  $\lambda = 532\text{nm}$ , and a power of  $P = 1.2\text{W}$ , the resulting dipole potential at the focal plane has a maximum value of  $U_{max} \approx 2 \times 10^{-28}\text{J}$ , corresponding to a temperature of  $T \approx 20\mu\text{K}$ .

After a BEC has formed, we instantaneously switch from the magnetic trap to the waveguide potential. The donut beam is adjusted such that the Bose-Einstein condensate is trapped in two dimensions in the dark inner region of the light field. The beam axis is aligned with the long axis of the pencil-shaped condensate, slightly tilted which allows for a longitudinal movement of the atoms inside the waveguide due to gravity.

The evolution of the BEC inside the donut mode is governed by gravity, expansion due to the initial mean field energy and by heating effects. Freely propagating dipole potential waveguides allow to easily monitor the evolution of BEC's inside the donut by taking absorption and dark field images of the atomic cloud after a variable evolution time.

Fig.1.6 shows the evolution of a BEC loaded into the waveguide. The loading efficiency  $\eta$ , i.e., the number of atoms trapped in the waveguide over the total number of atoms, depends on the potential height as well as on the spatial overlap of the BEC in the magnetic trap and the waveguide. In this measurement, the overlap between condensate and waveguide resulted in a loading efficiency to the waveguide of  $\eta = (70 \pm 10)\%$ . The waveguide is tilted by an angle  $\alpha$  relative to the horizontal direction, such that the atoms captured in the dipole potential are accelerated downwards with an acceleration  $a = g \sin \alpha$ , where  $g$  is the gravitational acceleration. The center of the atomic distributions follows a parabola from which – in comparison to free fall – the slope of the donut mode is determined to be  $(4.2 \pm 0.3)$ degrees. In this measurement the longitudinal expansion of the atomic cloud is dominated by heating due to beam pointing and intensity fluctuations of the donut laser beam. For a stabilized beam it should be possible to transfer the BEC to the lowest transverse vibrational level of the dipole potential, which will enable coherent transport in future experiments.

A main advantage of dipole traps over magnetic traps is that they allow to trap atoms independent of their magnetic substate. Using a dipole trap as a reservoir for an atom laser then allows, e.g., to generate an atom laser beam of any magnetic substate.

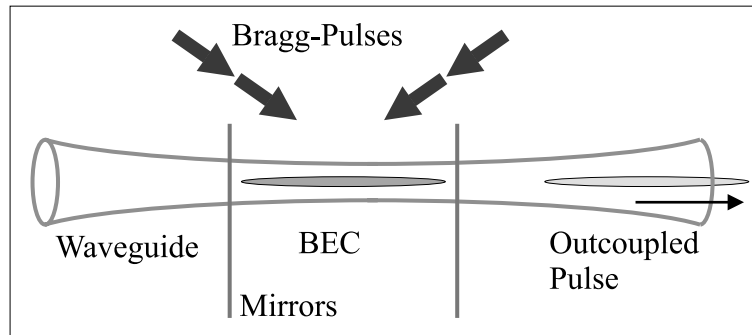


Figure 1.7 Experimental setup for a "donut-guided" atom laser.

In order to form an analogue to an optical laser cavity for an atom laser it is possible to introduce two additional dipole potential mirrors closing the waveguide (see Fig.1.7). As has been shown in the last section, the reflectivity of these mirrors is velocity-dependent. Therefore by applying Bragg-pulses transferring an appropriate momentum to the condensate it should be possible to couple out parts of the condensate. A main advantage of this scheme would be the directed output of coherent matter waves into the donut waveguide.

Other interesting aspects for future work are, e.g., guiding in different potential shapes using Laguerre-Gaussian modes of different orders as waveguides, one dimensional expansion due to the mean field energy of the condensate in a tightly confining  $LG_{01}$  mode, or the use of waveguides in atom interferometers.

## 5. ATOM HOLOGRAPHY: ENGINEERING THE PHASE OF A BEC

In the first part of this section, the “phase imprinting method” in connection to the creation of vortices is discussed. The second part describes experimental results on the creation of dark solitons in BEC’s with the phase-imprinting method.

### 5.1 GENERATION OF VORTICES IN BEC’S BY THE PHASE-IMPRINTING METHOD

One of the challenges of the physics of trapped Bose-Einstein condensates concerns the demonstration of their superfluid behaviour. Superfluidity is inevitably related to the existence of vortices and persistent currents in BEC.

Several methods were proposed to generate vortices in non-rotating traps: stirring the condensate using a blue detuned laser beam<sup>26, 27</sup>, or several laser beams<sup>28</sup>; adiabatic passage<sup>29</sup> or Raman transitions<sup>30</sup> in bi-condensate systems. Such vortices are typically not stable, and can exhibit dynamical or energetic instability. In the first case vortices decay rapidly, in the second the vortices are stable within the framework of the mean field theory, and their corresponding decay requires to take into account interactions of the BEC with the thermal cloud. In the latter case the vortex dynamics is expected to be sufficiently slow, and thus experimentally accessible<sup>31</sup>.

In rotating traps vortices appear in a natural way as thermodynamic ground states with quantized angular momentum<sup>32, 33</sup>. Stability and other properties of vortices in rotating traps have been thoroughly discussed in Refs.<sup>34, 35, 36</sup>.

Recently, vortices in a two component BEC have been observed by Matthews *et al.*<sup>37</sup>. Raman *et al.*<sup>38</sup> measured a critical onset of the heating effects of perturbations of Bose-Einstein condensates which is also closely connected to superfluidity and the existence of vortices.

Here, we refer to a procedure of vortex generation using “phase imprinting”<sup>15</sup>. This method consists of i) passing a far off resonant laser pulse through an absorption plate whose absorption coefficient depends on the rotation angle  $\varphi$  around the propagation axis and ii) creating the

corresponding Stark shift potential inside a BEC by imaging this laser pulse onto the condensate which leads to a  $\varphi$  dependent phase shift in the condensate wave function. This method is very efficient and robust, and allows for engineering of a variety of excited states of BEC's containing vortices. It is expected that in the ideal case the method allows to generate genuine vortices with integer angular momenta. The presence of imperfections should typically result in more complex vortex patterns.

The dynamical generation of vortices differs from the case of rotating traps, in which a *pure vortex* state with angular momentum  $L_z = 1$  (in units of  $\hbar$ ) is selected in the process of reaching the equilibrium. For the phase imprinting method, generation of *pure* vortices requires a fine tuning of parameters which is hard to achieve in experiments. This method is suitable for creation of generic states with *vorticity*<sup>39</sup>, i.e., states with several vortex lines, around which the circulation of velocity does not vanish<sup>40</sup>.

It can be shown that a short pulse of light with a typical duration of the order of fractions of microseconds with properly modulated intensity profile creates vorticity in a Bose-Einstein condensate initially in its ground state<sup>15</sup>. If the incident light is detuned far from the atomic transition frequency its main effect on the atoms is to induce a Stark shift of the internal energy levels. As the intensity of light depends on the position, the Stark shift will also be position dependent as will be the phase of the condensate.

The main feature characterizing a vortex is related to the particular behaviour of the phase of the wave-function at the vortex line: the phase “winds up” around this line, i.e., it changes by an integer multiple  $m$  of  $2\pi$  on a path surrounding the vortex, where  $m$  is the vortex charge. The light beam, before impinging on the atomic system, is shaped by an absorption plate with an absorption coefficient that varies linearly around the plate axis with rotation angle  $\varphi$  (see Fig. 1). As a result,  $V_l(\mathbf{r}, t)$  depends on the distance  $\rho$  from the propagation axis, and the azimuthal angle  $\varphi$ .

In the ideal case this absorption plate causes a real jump of the potential at, say  $\varphi = 0$ . Due to a finite imaging resolution, in the real case the potential corresponds to

$$V_l(\rho, \varphi) = \begin{cases} \hbar I \varphi \sin^2(\pi \rho / 2L) & \text{for } \rho \leq L \\ \hbar I \varphi & \text{for } \rho > L, \end{cases} \quad (1.3)$$

during the short laser pulse. Here,  $I$  denotes the characteristic Stark shift,  $L$  is the characteristic length scale on which the absorption profile is smoothed.

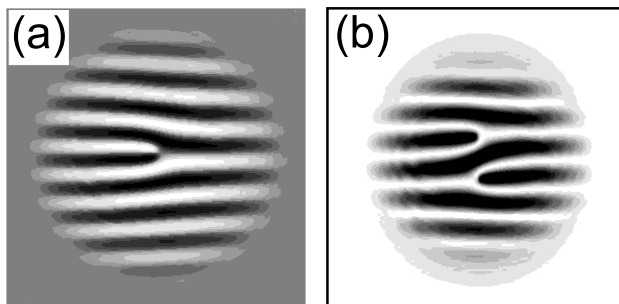


Figure 1.8 Interference pattern of the vortex state (5 ms after phase imprinting): (a) superimposed with a plane wave of  $k = 1.8 \mu\text{m}^{-1}$  moving vertically in the plane of the figure; (b) 5 ms after applying Bragg pulses transferring momentum to a part of the condensate (along the vertical axis in the plane of the figure). The ideal case of equal splitting of the whole condensate has been assumed. The incident pulse was focused at the trap center and had a sharp step in the intensity profile ( $\delta = 0.04$ ).

One of the most important questions concerning the investigation of vortices is an efficient method for their detection. Experimentally, monitoring density profiles with the necessary resolution is difficult, since the vortex core is very small. The best way is to monitor the phase of the wave function in an interference measurement. Such interference measurements are routinely done in nonlinear optics<sup>41</sup>. In the context of vortex detection in BEC, they were proposed by Bolda and Walls<sup>39</sup>, similar methods were proposed in<sup>42</sup>. If both condensates are in the ground state (no vortices), one expects interference fringes as those observed by Andrews *et al.*<sup>43</sup>. In the case of interference of one condensate in the ground state with the second one in the  $m = 1$  vortex state, a fork-like dislocation in the interference pattern appears. The distance between the interference fringes is determined by the relative velocity of the condensates, which can be controlled experimentally. This is a very efficient and clear method of vorticity detection. It requires, however, the use of two independent condensates.

As has been suggested<sup>15</sup>, the detection can be simplified by combining the interference method with the recently developed Bragg diffraction technique<sup>44, 45</sup>. The idea is to transfer part of the atoms coherently to another momentum state using one or several stimulated two-photon Raman scattering processes. The procedure is as follows:

- i) First a vortex or vorticity state is created in the trap.
- ii) The trap is opened and the condensate expands.
- iii) Bragg pulses are applied in order to transfer a small momentum to part of the wavefunction. The resulting wave function is the superpo-



sition of two vortex (or vorticity) states moving apart from each other, with a velocity that can be easily controlled by choice of the angle between the Bragg beams. In simulations using the split operator method in 2D, typical velocities were of the order of 1mm/s, which allow for efficient detection after 4-5 ms when the vortices are about  $5\mu\text{m}$  apart. iv) Detection consists of optical imaging that is accomplished within a few  $\mu\text{s}$ . The interference patterns have a characteristic length scale of a few  $\mu\text{m}$ .

Fig.1.8(a) shows a typical result of the numerical simulations obtained a few ms after the creation of a vortex state using the detection method of <sup>39</sup> based on the interference of a condensate in the vortex state with a condensate in the plane wave state. The characteristic fork-like pattern reflects the fact that the phase winds up by  $2\pi$  as one circulates around the vortex line. Fig.1.8(b) shows results of the simulation of the interference pattern for the method of detection proposed in <sup>15</sup>. A few milliseconds after applying the Bragg pulses a double fork structure can clearly be seen. The forks are oriented in opposite directions, because the condensates have the same helicity, but opposite velocities.

In future experiments it should be possible to study the creation and dynamics of vorticity using the phase imprinting and interference detection methods.

## 5.2 GENERATING DARK SOLITONS IN CONDENSATES OF <sup>87</sup>Rb

Beside vortices, an important class of excited states of BEC's are the so called "dark solitons" or "kink-wise" states. Their properties and ways to create them have been discussed extensively in the literature <sup>46, 47, 48, 15, 29</sup>.

The macroscopic wavefunction of a dark soliton in a cylindrical harmonic trap has a nodal plane perpendicular to the symmetry axis of the confining potential. Thus, the corresponding density distribution shows a minimum around the nodal plane with a width of the order of the correlation length  $l_0 = (4\pi an_0)^{-1/2}$  of the condensate. A dark soliton state in a homogeneous BEC of density  $n_0$  is described by the wavefunction <sup>46</sup>

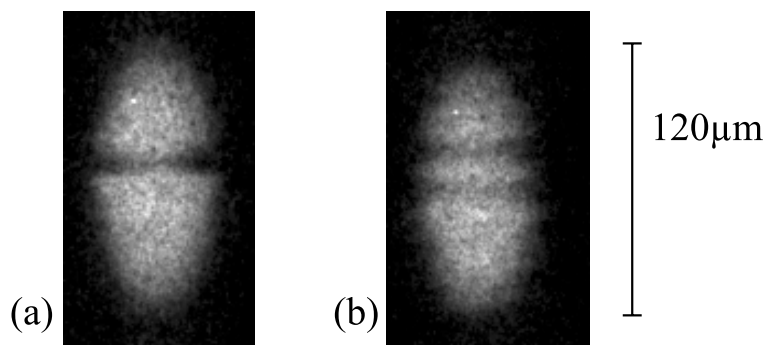
$$\Psi_0(x) = \sqrt{n_0} \left( i \frac{v_k}{v_s} + \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{v_s^2}} \tanh \left[ \frac{x - x_k}{l_0} \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{v_s^2}} \right] \right), \quad (1.4)$$

with the position and velocity of the nodal plane  $x_k$  and  $v_k$ , and the speed of sound  $v_s = \sqrt{4\pi an_0} \hbar/m$ , where  $a$  and  $m$  are the s-wave scattering length and the mass of the atomic species, respectively.

For  $T = 0$  in 1D, dark solitons are stable. In this case, only solitons with zero velocity in the trap center do not move; otherwise they oscillate along the trap axis<sup>49</sup>. However, in 3D at finite  $T$ , dark solitons exhibit thermodynamic and dynamical instabilities. The interaction of the soliton with the thermal cloud causes dissipation which accelerates the soliton. Ultimately, it reaches the speed of sound and disappears<sup>50</sup>. The dynamical instability originates from the transfer of the (axial) soliton energy to the radial degrees of freedom and leads to the undulation of the DS-plane, and ultimately to the destruction of the soliton. This instability is essentially suppressed for solitons in cigar-shaped traps with a strong radial confinement<sup>51</sup>.

Here we present experiments using the phase imprinting method to create soliton states of BEC's of  $^{87}\text{Rb}$ <sup>52</sup>. In these experiments, condensates containing  $\approx 10^5$  atoms in the ( $F=2$ ,  $m_F=+2$ )-state in a nearly 1D geometry are produced every 20s. The fundamental frequencies of our magnetic trap are in this case  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 14\text{Hz}$  and  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 425\text{Hz}$  along the axial and radial directions, respectively. Therefore, the condensates are pencil-shaped with the long axis oriented horizontally. Typical dimensions of the condensates along this axis are  $100 - 130\mu\text{m}$ . The density distribution of the atomic sample is detected using absorption imaging.

The creation of dark solitons consists again of the imprinting of an appropriate phase and a successive evolution in the magnetic trap. The phase distribution is imprinted by temporarily exposing the half space ( $x < 0$ ) to an additional homogenous potential (where the center of the condensate wavefunction is located at  $x = 0$ ). This is done with the



*Figure 1.9* Absorption images of two BEC's with kink-wise structures propagating in the direction of the long condensate axis. The evolution time in the magnetic trap was 0.2ms in image (a) and 3ms in image (b). The images were taken after 4 ms of time-of-flight.

dipole potential of a defocused laser beam ( $\lambda = 532\text{nm}$ ) which is partly blocked with a razor blade (see Fig.1.10). The transition from dark to bright at the position of the BEC can be as sharp as the resolution of the optical system which images the razor blade to the condensate. In our experiment this resolution is  $< 3\mu\text{m}$ .

The time the dipole potential is applied,  $t_p$ , is short compared to the correlation time of the condensate,  $t_c = \hbar/\mu$ , with the chemical potential  $\mu$ . This ensures that the effect of the light pulse is mainly a change of the topological phase of the BEC, and the change of the condensate density during the pulse due to the dipole force can be neglected.

The intensity of the applied laser field of  $I \approx 50\text{W}/\text{mm}^2$  results in a dipole potential of  $U \approx 5 \times 10^{-29}\text{J}$ . Thus a pulse of ten microseconds results in a phase shift  $\Delta\Phi = U \times \tau/\hbar$  of the order of  $\pi$ .

After applying the dipole potential profile we let the atoms evolve in the magnetic trap for a variable time  $t_{ev}$ . In order to image the BEC it is then released from the trap and an absorption image is taken after a time-of-flight of 4ms.

As can be seen in Fig.1.9(a), for a short evolution time  $t_{ev}$  the resulting density profile of the BEC shows a pronounced minimum at the center of the cloud. As  $t_{ev}$  is increased this minimum moves along the cloud's axis and after a time of typically  $t_{ev} \approx 1.5\text{ms}$ , a second density minimum can be monitored (Fig.1.9(b)). This minimum thereafter moves in the opposite direction. Fig.1.11 shows the evolution of these minima over a time of 8ms, after which they fade away.

It is remarkable that the structures move with velocities down to  $1\text{mm}/\mu\text{s}$  which is much smaller than the speed of sound which is about  $v_s \approx 3.7\text{mm}/\text{s}$  for our experimental parameters.

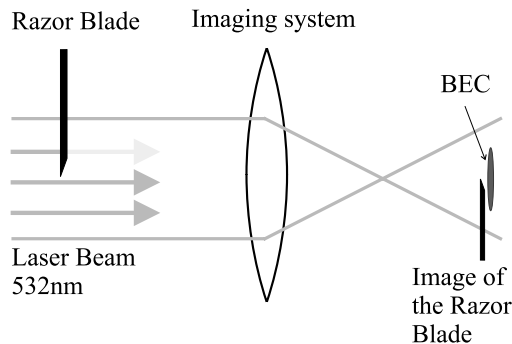
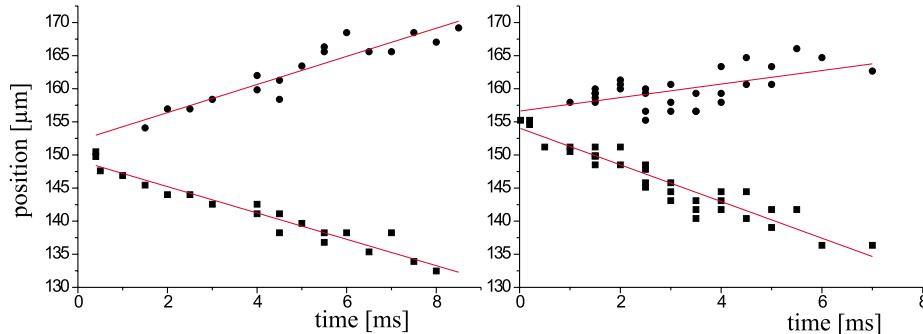


Figure 1.10 Setup for a phase-imprinting experiment.



*Figure 1.11* Evolution of the density minima in the magnetic trap. Position of the observed density minima (see Fig.1.9) in dependence of the evolution time in the magnetic trap. The two sets are taken with different phase-imprinting times  $\tau$ . The lines are linear fits to guide the eye; they correspond to constant velocities. The structures move with different velocities and velocities smaller than the speed of sound  $v_s \approx 3.7\text{mm/s}$ .

The velocities depend on the imprinted intensity of the laser field, for properly chosen parameter sets (Fig.1.11(b)) the two density minima apparently move with highly differing velocities. The comparison to numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation for our experimental conditions confirms this behaviour<sup>52</sup>.

Dark solitons as demonstrated here are a new type of excitations of non-linear matter waves and are closely related to non-linear optics<sup>53</sup> and superfluidity. Further experiments can therefore lead to a better understanding of the connections between these fields and the physics of matter waves.

## 6. CONCLUSIONS

In this lecture we have investigated various applications of Bose-Einstein condensates as sources for experiments in atom optics.

The evolution of Bose-Einstein condensates falling under gravity and bouncing off a mirror formed by a far-detuned sheet of light has been studied. After reflection, the atomic density profile develops splitting and interference structures which depend on the drop height, on the strength of the light sheet, as well as on the initial mean field energy and size of the condensate. We compare experimental results with simulations of the Gross-Pitaevski equation. A comparison with the behaviour of bouncing thermal clouds allows to identify quantum features specific for condensates.

Bose-Einstein condensates of  $^{87}\text{Rb}$  have been loaded to a linear waveguide for atomic deBroglie waves. The waveguide is created by the optical dipole force of a far off-resonant, blue detuned Laguerre-Gaussian laser beam of high order. The atomic cloud can be transported inside this waveguide over long distances.

We have discussed the creation of vortices using a phase imprinting method. This method was further used to create dark soliton states in Bose-Einstein condensates.

### **Acknowledgements**

Part of the work presented here has been done in fruitful and stimulating cooperation with G. Birkl, S. Dettmer, Ł. Dobrek, M. Gajda, M. Kovacev, M. Lewenstein, K. Rzażewski, and A. Sanpera.

This work is supported by SFB407 of the *Deutsche Forschungsgemeinschaft*.

## References

- [1] M.J. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. *Science*, **269**:198, 1995.
- [2] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:3969, 1995.
- [3] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, and R.G. Hulet. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:1687, 1995. C.C. Bradley et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**: 985, 1997.
- [4] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, and T.J. Greytak. *Phys. Rev. Lett.*, **81**:3811, 1998.
- [5] *For an overview see:* F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari. *Rev. Mod. Phys.*, **71**:463, 1999.
- [6] *For an overview see:* articles by W. Ketterle *et al.* and by E. Cornell *et al.* In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Varenna July 1998*.
- [7] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **78**:582, 1997.
- [8] B.P. Anderson and M.A. Kasevich. *Science*, **282**:1686, 1998.
- [9] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. *Science*, **283**:1706, 1999.
- [10] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:3008, 1999.
- [11] L. Deng, E.W. Hagley, J.W. En, M. Trippenbach, Y. Band, P.S. Julienne, J.E. Simsarian, K. Helmerson S.L. Rolston, and W.D. Phillips. *Nature*, **398**:218, 1999.
- [12] M.A. Kasevich, D. Weiss, and S. Chu, *Opt. Lett.* **15**, 607, 1990; C.G. Aminoff, A. M. Steane, P. Bouyer, P. Desbiolles, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3083, 1993; T.M. Roach, H. Abele, M.G. Boshier, H.L. Grossman, K.P. Zetie, and E.A. Hinds, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 629, 1995; P. Szriftgiser, D. Guéry-Odelin, M. Arndt, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4, 1996; A.

- Landragin, J.-Y. Courtois, G. Labeyrie, N. Vansteenkiste, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1464, 1996; A. Sidorov, *et al.*, *Quant. Semiclass. Opt.* **8**, 713, 1996.
- [13] K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, W. Ertmer, K. Rzażewski, A. Sanpera, and M. Lewenstein. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(18):3577, 1999.
- [14] *For an overview see:* J.P. Dowling and J. Gea-Banacloche. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **37**:1, 1997.
- [15] L. Dobrek, M. Gajda, M. Lewenstein, K. Sengstock, G. Birkl, and W. Ertmer. *Phys. Rev. A.*, **60**(5):R 3381, 1999.
- [16] *For an overview see:* C.S. Adams, M. Sigel, and J. Mlynek. *Phys. Rep.*, **240**:143, 1994.
- [17] K. Bongs, C. Fühner, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, and W. Ertmer. to be published.
- [18] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(3):416, 1996.
- [19] M.J. Renn, D. Montgomery, O. Vdovin, D.Z. Anderson, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. *Phys. Rev. Lett.*, **75**:3253, 1995.
- [20] M.J. Renn, E.A. Donley, E.A. Cornell, C.E. Wieman, and D.Z. Anderson. *Phys. Rev. A.*, **53**:R648, 1996.
- [21] H. Ito, T. Nakata, K. Sakaki, M. Ohtsu, K. I. Lee, and W. Jhe. *Phys. Rev. Lett.*, **76**:4500, 1996.
- [22] G. Wokurka, J. Keupp, K. Sengstock, and W. Ertmer. *Procs. EQEC*, QFG 5, 235, 1998.
- [23] M. Schiffer, M. Rauner, S. Kuppens, M. Zinner, K. Sengstock, and W. Ertmer. *Appl. Phys. B*, **67**:705, 1998.
- [24] S. Kuppens, M. Rauner, M. Schiffer, K. Sengstock, and W. Ertmer. *Phys. Rev. A.*, **58**(4):3068, 1998.
- [25] S. Kuppens, M. Rauner, M. Schiffer, G. Wokurka, T. Slawinski, M. Zinner, K. Sengstock, and W. Ertmer In K. Burnett, editor, *OSA TOPS*(7), pages 102–107, 1997.
- [26] B. Jackson, J.F. McCann, and C.S. Adams. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:3903, 1998.
- [27] B.M. Caradoc-Davies, R.J. Ballagh, and K. Burnett. *cond-mat/9902092*.
- [28] K.-P. Marzlin and W. Zhang. *Phys. Rev. A.*, **57**:3801, 1998. *ibid.* 4761, 1999.
- [29] R. Dum, J.I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2972, 1998.
- [30] K.-P. Marzlin, W. Zhang, and E.M. Wright. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:4728, 1997.

- [31] Stability of vortices in non-rotating traps of different shapes has been studied recently: D.S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2164, 1997 and cond-mat/9709212; A.A. Svidzinsky and A.L. Fetter, *Phys. Rev. A* **58**, 3168, 1998; H. Pu, C.K. Law, J.H. Eberly, and N.P. Bigelow, *Phys. Rev. A* **59**, 1533, 1999; T. Isoschima and K. Machida, *Phys. Rev. A* **59**, 2203, 1999; P.O. Fedichev and G. V. Shlyapnikov, cond-mat/9902204.
- [32] R.J. Marshall, G.H.C. New, K. Burnett, and S. Choi. *Phys. Rev. A.*, **59**:2085, 1995.
- [33] P.D. Drummond and J.F. Cornay. cond-mat/9806315.
- [34] F. Dalfovo and S. Stringari. *Phys. Rev. A.*, **53**:2477, 1996.
- [35] D.A. Butts and D.S. Rokhsar. *Nature*, **397**:327, 1999.
- [36] D.L. Feder, Ch.W. Clark, and B.I. Schneider. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:4956, 1999.
- [37] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(13):2498, 1999.
- [38] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D.S. Durfee, C.E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(13):2502, 1999.
- [39] E.L. Bolda and D.F. Walls. *Phys. Rev. Lett.*, **81**:5477, 1998.
- [40] D. Pines and Ph. Nozières. *Theory of quantum liquids*. Benjamin, 1966.
- [41] K. Staliunas, C.O. Weiss, G. Sleky, *Horizons of World Physics*, **228**, ed. M. Vasnetsov and K. Staliunas, (Nova Science Publishers, 1999); I.V. Basistiy *et al.*, *Opt. Comm.* **103**, 422, 1993; L.V. Kreminskaya, M.S. Soskin, A.I. Khizhnyak, *Opt. Comm.* **145**, 1998; J.F. Nye and M.V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **336**, 165, 1974.
- [42] J. Tempere and J. T. Devreese. *Solid State Comm.*, **108**(12):993, 1998.
- [43] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. *Science*, **275**:637, 1997.
- [44] M. Kozuma, L. Deng, E.W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:871, 1999.
- [45] J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(23):4569, 1999.
- [46] P.O. Fedichev, A.E. Muryshev, and G.V. Shlyapnikov. *Phys. Rev. A.*, **60**(4):3220, 1999.
- [47] A.E. Muryshev, H.B. van Linden van den Heuvell, and G.V. Shlyapnikov. *Phys. Rev. A.*, **60**:R2665, 1999.
- [48] T. Hong, Y.Z. Wang, and Y.S. Huo. *Phys. Rev. A.*, **58**(4):3128, 1998.
- [49] Th. Busch and J. Anglin. cond-mat/9809408.



- [50] P.O. Fedichev, A.E. Muryshev, and G.V. Shlyapnikov. *Phys. Rev. A.*, **60**(4):3220, 1999.
- [51] A.E. Muryshev, H.B. van Linden van den Heuvell, and G.V. Shlyapnikov. *Phys. Rev. A.*, **60**:R2665, 1999.
- [52] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, in press, 1999.
- [53] Y.S. Kivshar and B. Luther-Davies. *Physics Reports*, **298**:81–197, 1998.



# Kapitel 7

## Ausblick

In Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die experimentelle Erzeugung von dunklen Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten demonstriert; die Methode der Phasenaufprägung als atomoptische Technik zur Manipulation makroskopischer Wellenfunktionen ist hierbei etabliert worden. In systematischen Messungen wurden Untersuchungen der Dynamik, der Dissipation und der den Solitonen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsstromdichte durchgeführt. Ein direkter Vergleich mit Ergebnissen numerischer Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung, die aus einer engen Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe um M. Lewenstein hervorgehen, erlaubte die Charakterisierung der Eigenschaften der dunklen Solitonen. Als weiterer wichtiger Aspekt dieser Arbeit und des Hannoveraner BEC-Projektes wurden verschiedene atomoptische Elemente (Spiegel, Strahlteiler, Bragg-Beugung, Wellenleiter, Linse, Phasenaufprägungs-, „Hologramm“) zur Manipulation des Bose-Einstein Kondensates (z.T. erstmalig) demonstriert und detailliert untersucht.

Aufbauend auf den entwickelten Methoden lässt sich eine Vielzahl fundamentaler Fragestellungen experimentell untersuchen.

Zur Zeit werden Dipolpotential-basierte Leiterstrukturen für Materiewellen in das Experiment integriert, die mit Hilfe eines adiabatischen Ensembletransfers aus der Magnetfalle, einer veränderten Geometrie und eines nahezu harmonischen einschließenden Potentials (TEM<sub>01</sub>\*-Mode) ein Führen der Atome im niedrigsten transversalen Energiezustand erlauben<sup>1</sup>. Die hohe Flexibilität der verwendeten Dipolpotentiale erlaubt es, die Dimensionalität des Systems adiabatisch von 3D auf quasi-1D zu ändern.

Die Untersuchung der makroskopischen BEC-Wellenfunktion unter diesen Bedingungen verspricht eine Reihe wichtiger Erkenntnisse, z.B. zur Umsetzung der Wechselwirkungsenergie in Bewegungsenergie in einer Dimension, zur Abhängigkeit der Stößeigenschaften von

---

<sup>1</sup>Bereits in ersten Experimenten konnte die Heizrate des Ensembles im Wellenleiter stark reduziert werden, sodass eine Verlängerung der Speicherzeit des Ensembles im Wellenleiter um eine Größenordnung auf bis zu 400 ms erreicht wurde (vergleiche Kap 6.3, [81]).

der Dimensionalität und zur superfluiden Stömung des Kondensats in einem „zylindrischen“ Potential.

Von hohem Interesse sind Solitonen in homogenen quasi-eindimensionalen Bose-Einstein Kondensaten; diese entsprechen exakt der analytischen Lösung von Zakharov *et al.*, G. 4.12. Die kontrollierte Erzeugung und Untersuchung dieser Systeme ist möglich, indem Bose-Einstein Kondensate in „single-mode Wellenleiter“ umgeladen werden und indem daraufhin mit Hilfe der Phasenaufprägungsmethode Solitonen erzeugt werden.

Auch die in aktuellen theoretischen Arbeiten diskutierte und in Experimenten mit langen Beobachtungsdauern essentielle Frage der Abhängigkeit der dynamischen Dissipation von der Dimensionalität des Systems kann an Solitonen in Wellenleitern studiert werden. Weiterhin verspricht die Untersuchung von Wechselwirkungen von Solitonen in einer und in mehreren Dimensionen, weiteren Aufschluss über den Teilchencharakter der Solitonen zu geben und Anknüpfungspunkte der Kondensatphysik an die Elementarteilchenphysik zu liefern.

Weiteres Verständnis der Wechselwirkung und der Dissipation von Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten lässt sich durch die orts aufgelöste Messung der Phase des Solitonenzustandes gewinnen. Der Einsatz atomoptischer Elemente wie Spiegel (vgl. Kap. 6.3) und Bragg-Strahlteiler (vgl. Kap. 2.2.7) erlaubt interferometrische Messungen mit Bose-Einstein Kondensaten als kohärenten Quellen von Materiewellen. Verschiedene Konzepte zur Interferometrie an Solitonenzuständen werden zur Zeit entwickelt [56].

Zum „Maßschneidern“ von Wellenfunktionen – d.h. einer simultanen kontrollierten Beeinflussung der Dichte- und der Phasenverteilung durch eine Kombination der Phasenaufprägungsmethode mit dem Dipolpotential eines langfristig eingestrahnten ( $\Delta t \gg t_{cor}$ ) Laserfeldes – sind im Rahmen dieser Arbeit erste an realistischen experimentellen Parametern orientierte numerische Simulationen durchgeführt worden, die z.B. die Möglichkeit der Erzeugung sehr langsamer ( $u \ll c_s$ ) dunkler Solitonen mit dieser Methode belegen.

Neben grundsätzlichen Erkenntnissen bei der Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften der Bose-Einstein Kondensation, wie der Untersuchung von Vortex- und Solitonenzuständen, sind vom Einsatz von Bose-Einstein Kondensat in weiteren Bereichen der Physik wesentliche wissenschaftliche und technische Fortschritte zu erwarten. Eine ähnliche Revolutionierung wie die der optischen Interferometrie durch die Einführung des Lasers steht durch den Einsatz von Bose-Einstein Kondensaten als Quellen kohärenter Materiewellen in der Atominterferometrie bevor [149]. Breit diskutiert werden auch der Einsatz in der Atomlitographie und in Quantencomputern.

Mittel- und langfristige Ziele in der Entwicklung kohärenter Quellen, die im Rahmen der Projekte des Sonderforschungsbereichs 407 verfolgt werden, sind die kontinuierliche Bose-Einstein Kondensation mit Mitteln der Laserkühlung (im „*festina lente*“-Regime), kontinu-

ierliche Atomlaser und die Miniaturisierung von BEC-Experimenten bis hin zum Einsatz von Kondensaten in mikrostrukturierten Bauelementen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit stellen einen wichtigen Schritt im Verständnis der Bose-Einstein Kondensation sowie in der Entwicklung neuer atomoptischer Techniken zur Manipulation und Untersuchung dieses makroskopischen Quantenphänomens dar.

# Anhang A

## Die Dipolkraft

Dipolpotentiale sind in der Atomoptik zu weit verbreiteten Hilfsmitteln geworden, die sehr flexibel einsetzbar sind (siehe z.B. [150] zu Dipolpotentialen in der Atomoptik und [20, 153, 9, 26] zu Dipolpotentialen zur Manipulation von Bose-Einstein Kondensaten).

Befindet sich ein Atom in einem inhomogenen nichtresonanten Lichtfeld, dann kann es durch stimulierte Raman-Prozesse (korrelierte Absorptions- und Emissionsprozesse) Photonen in den verschiedenen Moden des Strahlungsfelds umverteilen. Das Dipolpotential beschreibt die Kraft, die bei der kohärenten Umverteilung auf das Atom wirkt (Dipolkraft).

Die Dipolkraft kann auch in Analogie zum getriebenen klassischen Oszillator verstanden werden: Eine in einem harmonischen Potential gebundene Ladung, die einem elektromagnetischen Wechselfeld (dem Feld des nichtresonanten Lichtes) ausgesetzt ist, führt zu einem oszillierenden Dipolmoment, welches sich in Phase mit dem treibenden Feld befindet, wenn die anregende Frequenz unterhalb der Resonanzfrequenz der Ladung im Potential liegt, und welches eine Phase  $> \pi$  zum treibenden Feld aufweist, wenn die anregende Frequenz oberhalb der Resonanz liegt. Unterhalb der Resonanz ist daher die Wechselwirkungsenergie von Oszillator und Feld negativ, in einem inhomogenen Feld wird der Oszillator also in den Bereich höheren Feldes gezogen. Oberhalb der Resonanz spürt der Oszillator dagegen eine Kraft in Richtung niedrigerer Intensität des Feldes.

Aus einer quantenmechanischen Rechnung mit Hilfe des *dressed atom*-Modells [154] ergibt sich für ein Atom mit Übergängen der Frequenzen  $\omega_i$  und Lebensdauern  $\tau_i$  in einem Strahlungsfeld der Frequenz  $\omega_l$  und Intensität  $I$  genähert das Dipolpotential  $U_{dp}$ ,

$$U_{dp} = - \sum_i \frac{\hbar \Omega_i^2}{4} \left( \frac{1}{\omega_i - \omega_l} + \frac{1}{\omega_i + \omega_l} \right), \quad (\text{A.1})$$

mit den Rabi-Frequenzen der Übergänge,  $\Omega_i$ , die sich aus den Lichtintensitäten  $I$ , den Linienbreiten  $2\pi\Gamma_i = 2\pi/\tau_i$  und den Sättigungsintensitäten  $I_{sat,i} = \pi\hbar c/3\lambda^3\tau$  der Übergänge

ergeben:

$$\Omega_i^2 = \frac{\Gamma_i^2}{2} \frac{I}{I_{sat,i}} . \quad (\text{A.2})$$

Zu beachten ist hier, dass der Betrag des Dipolpotentials für einen Übergang mit zunehmender Verstimmung  $\delta_i = \omega_l - \omega_i$  und für  $(\omega_i - \omega_l) \ll (\omega_i + \omega_l)$  in einer  $1/\delta$ -Abhängigkeit abnimmt. Im Gegensatz dazu nimmt die mit inkohärenten Prozessen verbundene Rate für spontane Prozesse,  $R_i$ , für große Verstimmungen in einer quadratischen Abhängigkeit mit der Verstimmung ab:

$$R_i = \frac{\Gamma_i}{2} \frac{I/I_{sat,i}}{1 + I/I_{sat,i} + (2\delta_i/\Gamma_i)^2} . \quad (\text{A.3})$$

Durch Wahl einer genügend hohen Verstimmung lassen sich daher auch bei hohen Lichtintensitäten und damit starken Dipolpotentialen vernachlässigbar niedrige Raten für spontane Prozesse erreichen.

# Anhang B

## Die verwendeten Lasersysteme

Das im Rahmen dieser Arbeit aufgebaute komplexe Lasersystem (siehe Abb. B.1) erlaubt es, die Atome in den unterschiedlichen Stufen des Experiments effektiv zu manipulieren und zu detektieren.

Es besteht aus verschiedenen stabilisierten und teilweise nachverstärkten Laserquellen (Argon-Ionenlaser, Titan:Saphir-Laser, frequenzverdoppelter Neodym:Vanadat-Laser, Diodenlaser, MOPA (*“Master Oscillator Power Amplifier”*)), deren Strahlung aufgeteilt und mit verschiedenen frequenzverändernden Elementen (akustooptische und elektrooptische Modulatoren, AOMs, EOMs) fein abgestimmt und schnell geschaltet werden kann. Die Laser sind auf einem schwingungsgedämpften Tisch aufgebaut, von dem aus das Licht durch Glasfasern zu der auf einem anderen Tisch aufgebauten Vakuumapparatur geleitet wird. Dies hat die Vorteile einer hohen Unterdrückung von störender Streustrahlung und einer Raumfilterung der Laserstrahlung, die zu einer sehr guten Modenqualität führt.



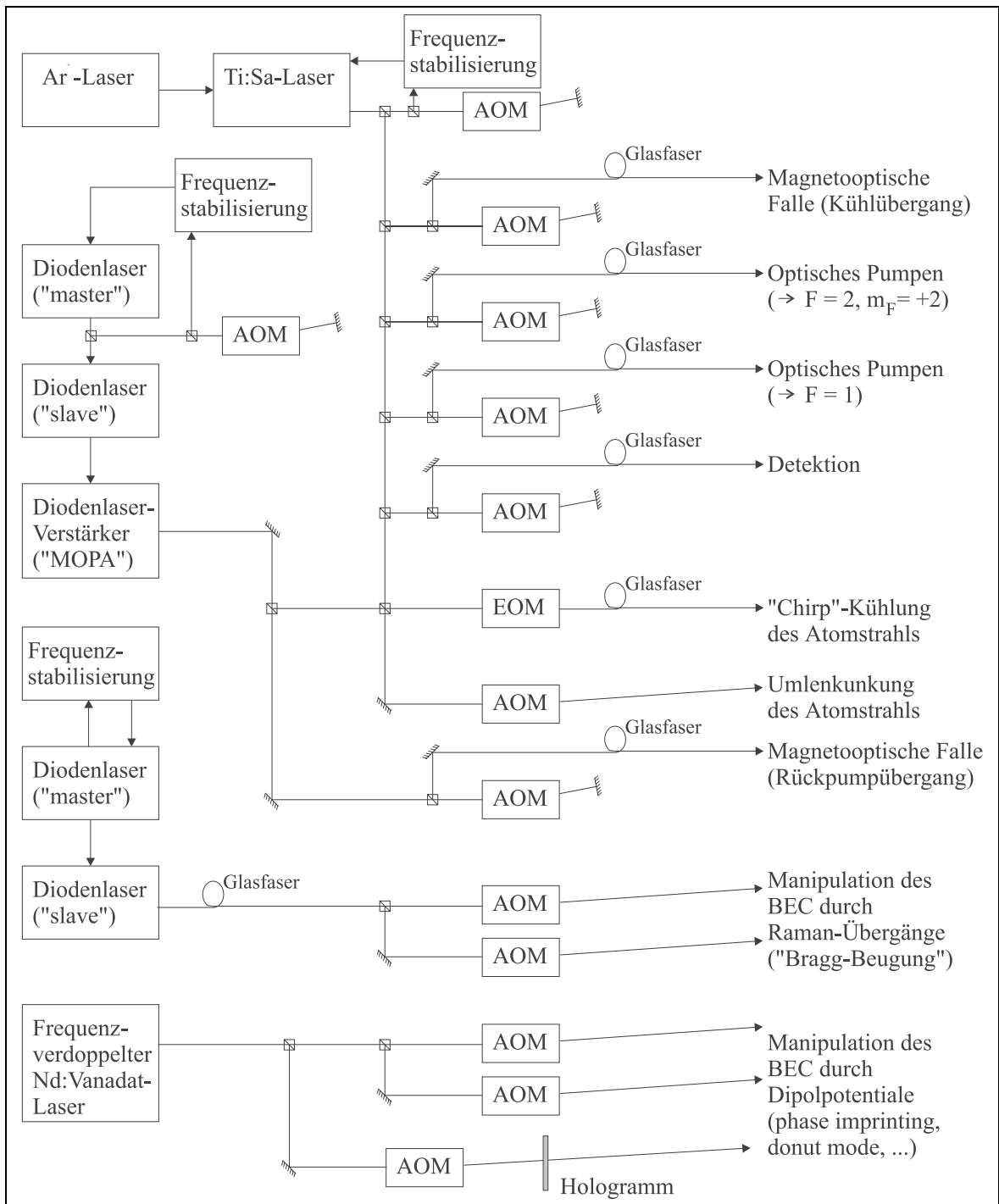


Abbildung B.1: Schematischer Aufbau der im BEC-Experiment verwendeten Lasersysteme.



# Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, **269**:198, 1995.
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(22):3969, 1995.
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(9):1687, 1995. *ibid.* **79**:1170, 1997.
- [4] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **78**:582, 1997.
- [5] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, **282**:1686, 1998.
- [6] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, **283**:1706, 1999.
- [7] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:3008, 1999.
- [8] L. Deng, E. W. Hagley, J. W. En, M. Trippenbach, Y. Band, P. S. Julienne, J. E. Simsarian, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Four-wave mixing with matter waves. *Nature*, **398**:218, 1999.
- [9] K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, and W. Ertmer, K. Rzążewski, A. Sanpera, and M. Lewenstein. Coherent evolution of bouncing Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(18):3577, 1999.
- [10] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Phase-coherent amplification of atomic matter waves. *Nature*, **402**:641, 1999.
- [11] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, **397**:594, 1999.
- [12] S. N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, **26**:178, 1924.
- [13] L. de Broglie. Radiation - waves and quanta. *Comptes rendus*, **177**:507, 1923. [*Am. J. Phys.* **40**(9), 1315 (1972)].
- [14] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, **1925**:3, 1925.

- [15] A. Griffin. A brief history of our understanding of BEC: From Bose to Beliaev. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 1–13. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [16] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, **81**:3811, 1998.
- [17] D. Kleppner, T. J. Greytak, T. C. Killian, D. G. Fried, L. Willmann, D. Landhuis, and S. C. Moss. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 177–199. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [18] Jia Ling Lin and J. P. Wolfe. Bose-Einstein condensation of paraexcitons in stressed  $\text{Cu}_2\text{O}$ . *Phys. Rev. Lett.*, **71**(8):1222, 1993.
- [19] E. A. Cornell, J. R. Ensher, and C. E. Wieman. Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 15–66. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [20] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 67–199. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [21] *BEC home page*, Georgia Southern University. <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html>.
- [22] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(13):2498, 1999.
- [23] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **84**:806, 2000.
- [24] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, and K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(25):5198, 1999.
- [25] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, **287**:97, 2000.
- [26] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kulewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle. Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(13):2502, 1999.
- [27] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, and W. Ketterle. Bosonic stimulation in the formation of a Bose-Einstein condensate. *Science*, **279**:1005, 1998.
- [28] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Coherence, correlations, and collisions: What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(3):337, 1997.

- [29] L. Dobrek, M. Gajda, M. Lewenstein, K. Sengstock, G. Birkl, and W. Ertmer. Optical generation of vortices in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A.*, **60**(5):R 3381, 1999.
- [30] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(23):4569, 1999. *ibid.* **84**:2283, 2000.
- [31] K. Bongs. Atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten. Dissertation, Universität Hannover, 1999.
- [32] S. Burger, K. Bongs, K. Sengstock, and W. Ertmer. Atom optics with Bose-Einstein condensates. In S. Martellucci, editor, *Bose-Einstein condensates and atom lasers*. Int. School of Quant. Electr., 27<sup>th</sup> Course, Erice, Sicily (1999), Kluwer Academic Publishers, 2000. in Druck.
- [33] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [34] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, **1924**:261, 1924.
- [35] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Theory of trapped Bose-condensed gases. *Rev. Mod. Phys.*, **71**:463, 1999.
- [36] A. L. Fetter. Theory of a dilute low-temperature trapped Bose condensate. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 201–264. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [37] T. J. Greytak and D. Kleppner. Lectures on spin-polarized hydrogen. In G. Grynberg and R. Stora, editors, *Tendances actuelles en physique atomique*, pages 1125–1230. Les Houches, Session XXXVIII (1982), Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
- [38] B. H. Bransden and C. J. Joachain. *Introduction to Quantum Mechanics*. Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1989.
- [39] M. R. Andrews, M.-O. Mewes, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Direct, nondestructive observation of a Bose condensate. *Science*, **273**:84, 1996.
- [40] G. Lenz, P. Meystre, and E. M. Wright. Nonlinear atom optics: General formalism and atomic solitons. *Phys. Rev. A.*, **50**:3271, 1994.
- [41] J. Dalibard. Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 321–349. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [42] J. I. Cirac and M. Lewenstein. Pumping atoms into a Bose-Einstein condensate in the boson accumulation regime. *Phys. Rev. A.*, **53**:2466, 1996.
- [43] H. M. J. M. Boesten, C. C. Tsai, J. R. Gardner, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. Observation of a shape resonance in the collision of two cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms. *Phys. Rev. A*, **55**(1):636, 1997.
- [44] H. M. J. M. Boesten, A. Moerdijk, and B. J. Verhaar. Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments. *Phys. Rev. A*, **54**(1):R29, 1996.

- [45] L. P. Pitaevskii. Trapped Bose-Einstein condensed gas: mean field approximation and beyond. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 287–319. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [46] N. N. Bogolubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. USSR*, **11**:23, 1947.
- [47] E. P. Gross. *Nuovo Cimento*, **20**:454, 1961.
- [48] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, **13**(2):451, 1961.
- [49] A. Griffin. Theory of excitations of the condensate and non-condensate at finite temperatures. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 591–623. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [50] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(6):985, 1997.
- [51] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, **392**:151, 1998.
- [52] J. Stenger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Strongly enhanced inelastic collisions in a Bose-Einstein condensate near Feshbach resonances. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:2422, 1999.
- [53] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Stable  $^{85}\text{Rb}$  Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions. E-print cond-mat/0004290, 2000.
- [54] F. Dalfovo. Dynamics of trapped bose-condensed gases in mean-field theory. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 555–572. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [55] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger, and W. Ketterle. Reversible formation of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **81**(11):2194, 1998.
- [56] T. Rinkleff. Bragg-Spektroskopie an Bose-Einstein Kondensaten. Diplomarbeit, Universität Hannover, 2000. in Vorbereitung.
- [57] S. Burger. Dichteerhöhung in einer magnetooptischen Falle für Rubidiumatome. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1996.
- [58] M. Roemer. Konzeption und Aufbau einer magnetischen Falle für die Erzeugung eines kohärenten Ensembles von Rubidiumatomen. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1997.
- [59] T. Südmeyer. Präparation kalter atomarer Ensembles für die Bose-Einstein Kondensation. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1998.
- [60] C. Fühner. Numerische Simulation und Optimierung der Verdampfungskühlung. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1997.
- [61] N. Bantleon. Detektion von Bose-Einstein Kondensaten. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1998.

- [62] M. Kovačev. Das Führen von Bose-Einstein Kondensaten in Laguerre-Gauß Moden. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1999.
- [63] S. Dettmer. Optische Manipulation der Wellenfunktion von Bose-Einstein Kondensaten. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1999.
- [64] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(3):416, 1996.
- [65] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced Bragg diffraction. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:871, 1999.
- [66] H. Metcalf and P. van der Straten. Cooling and trapping of neutral atoms. *Phys. Rep.*, **244**:203, 1994.
- [67] C. N. Cohen-Tannoudji. Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.*, **70**(3):707, 1998.
- [68] Special Issue: Laser cooling of neutral atoms. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**(11), 1989.
- [69] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(23):2631, 1987.
- [70] A. Senf. Aufbau einer magnetooptischen Falle für Rubidiumatome. Staatsexamensarbeit, Universität Hannover, 1999.
- [71] W. Ertmer, R. Blatt, J. L. Hall, and M. Zhu. Laser manipulation of atomic beam velocities: Demonstration of stopped atoms and velocity reversal. *Phys. Rev. Lett.*, **54**(10):996, 1985.
- [72] J. Nellessen, J.-H. Müller, K. Sengstock, and W. Ertmer. Large-angle beam deflection of a laser-cooled sodium beam. *JOSA B*, **9**:2149, 1989.
- [73] W. H. Wing. *Prog. Quant. Electr.*, **8**:181, 1984.
- [74] Y. Gott, M. S. Ioffe, and V. Tel’Kovskii. *Nucl. Fusion 192 Suppl.*, **3**:1045, 1284, 1962.
- [75] Wolfgang Ketterle and N. J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **37**:181, 1996.
- [76] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, and J. T. M. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, **53**(1):381, 1996.
- [77] Huang Wu, E. Arimondo, and C. J. Foot. Dynamics of evaporative cooling for Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, **56**:560, 1997.
- [78] K. Bongs, C. Fühner, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, and W. Ertmer. Optimizing evaporative cooling towards Bose-Einstein condensation - Theory and experiment. to be published.
- [79] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet. Analysis of *in situ* images of Bose-Einstein condensates of lithium. *Phys. Rev. A*, **55**(5):3951, 1997.
- [80] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, **275**:637, 1997.

- [81] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, K. Sengstock, and W. Ertmer. Manipulation of Bose-Einstein condensates by dipole potentials. in Vorbereitung.
- [82] Y. Torii, Y. Suzuki, M. Kozuma, T. Sugiura, and T. Kuga, L. Deng and E. W. Hagley. Mach-Zehnder Bragg interferometer for a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, **61**:041602(R), 2000.
- [83] D. M. Stamper-Kurn, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, S. Inouye, S. Gupta, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Excitation of phonons in a Bose-Einstein condensate by light scattering. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(15):2876, 1999.
- [84] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons*. Springer, Heidelberg, 1994.
- [85] J. Scott-Russell. Report on waves. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, page 319, 1844.
- [86] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. The soliton: A new concept in science. *Proc. IEEE*, **61**(10):1443, 1973.
- [87] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Interaction between solitons in a stable medium. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **64**:1627, 1973. [Sov. Phys. JETP **37**, 823 (1973)].
- [88] H. Römer. *Theoretische Optik*. VCH, Weinheim, 1994.
- [89] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **61**:118, 1971. [Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972)].
- [90] Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies. Dark optical solitons: physics and applications. *Phys. Rep.*, **298**:81–197, 1998.
- [91] S. A. Gredeskul and Yu. S. Kivshar. Generation of dark solitons in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, **62**(8):977, 1989.
- [92] A. M. Weiner, J. P. Heritage, R. J. Hawkins, R. N. Thurston, E. M. Kirschner, D. E. Leaird, and W. J. Tomlinson. Experimental observation of the fundamental dark soliton in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, **61**:2445, 1988.
- [93] D. Krökel, N. J. Halas, G. Giuliani, and D. Grischkowsky. Dark-pulse propagation in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.*, **60**:29, 1988.
- [94] S. A. Gredeskul, Yu. S. Kivshar, and M. V. Yanovskaya. Dark-pulse solitons in nonlinear-optical fibers. *Phys. Rev. A.*, **41**(7):3994, 1990.
- [95] S. A. Gredeskul and Yu. S. Kivshar. Dark-soliton generation in optical fibers. *Opt. Lett.*, **14**:1281, 1989.
- [96] Yu. S. Kivshar and S. A. Gredeskul. Dark solitons produced by phase steps in nonlinear optical fibers. *Opt. Comm.*, **79**(5):285, 1990.
- [97] W. Zhao and E. Bourkoff. Generation of dark solitons under a cw background using waveguide electro-optic modulators. *Opt. Lett.*, **15**(8):405, 1990.
- [98] M. Nakazawa and K. Suzuki. Generation of a pseudorandom dark soliton data train and its coherent detection by one-bit-shifting with a Mach-Zehnder interferometer. *Electron. Lett.*, **31**:1084, 1995.



- [99] G. G. Luther and M. S. Alber. Nonlinear waves, nonlinear optics and your communications future. *BRIMS Rep.*, HPL-BRIMS-97-07, 1997.
- [100] M. Nakazawa and K. Suzuki. 10 Gbit/s pseudorandom dark soliton data transmission over 1200 km. *Electron. Lett.*, **31**:1076, 1995.
- [101] A. S. Parkins and D. F. Walls. The physics of trapped dilute-gas Bose-Einstein condensates. *Phys. Rep.*, **303**:1, 1998.
- [102] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick. Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. A.*, **58**(3):2417, 1998.
- [103] L. D. Carr, M. A. Leung, and W. P. Reinhardt. Dynamics of the Bose-Einstein condensate: quasi-one-dimension and beyond. E-print `cond-mat/0004287`, 2000.
- [104] P. O. Fedichev, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov. Dissipative dynamics of a kink state in a Bose-condensed gas. *Phys. Rev. A.*, **60**(4):3220, 1999.
- [105] W. P. Reinhardt and C. W. Clark. Soliton dynamics in the collisions of Bose - Einstein condensates: an analogue of the Josephson effect. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **30**(22):L785, 1997.
- [106] Th. Busch and J. Anglin. Mössbauer effect for dark solitons in Bose-Einstein condensates. E-print `cond-mat/9809408`, 1998.
- [107] Th. Busch and J. Anglin. Motion of dark solitons in trapped Bose-Einstein condensates. E-print `cond-mat/0001360`, 2000.
- [108] G. V. Shlyapnikov. priv. Mitteilung.
- [109] A. E. Muryshev, H. B. van Linden van den Heuvell, and G. V. Shlyapnikov. Stability of standing matter waves in a trap. *Phys. Rev. A.*, **60**:R2665, 1999.
- [110] Th. Busch and J. R. Anglin. Wave-function monopoles in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **60**:R2669, 1999.
- [111] K.-A. Suominen. priv. Mitteilung.
- [112] O. Zobay, S. Pötting, P. Meystre, and E. M. Wright. Creation of gap solitons in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **59**:643, 1999.
- [113] S. Pötting, O. Zobay, P. Meystre, and E. M. Wright. Magneto-optical control of bright atomic solitons. E-print `cond-mat/000408`, 2000.
- [114] W. Zhang, D. F. Walls, and B. C. Sanders. Atomic soliton in a traveling wave laser beam. *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1):60, 1994.
- [115] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, and M. Edwards. Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms. *Phys. Rev. A.*, **51**(6):4704, 1995.
- [116] D. L. Feder, M. S. Pindzola, L. A. Collins, B. I. Schneider, and C. W. Clark. Dark soliton states of Bose-Einstein condensates in anisotropic traps. E-print `cond-mat/0004449`, 2000.
- [117] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of Sound in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **79**:553, 1997.

- [118] T. Hong, Y. Z. Wang, and Y. S. Huo. Temporal dark solitons in nonuniform Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A.*, **58**(4):3128, 1998.
- [119] J. Ruostekoski, B. Kneer, and W. P. Schleich. Interference of a Bose-Einstein condensate in a hard-wall trap: Formation of vorticity. E-print [cond-mat/9908095](#), 1999.
- [120] T. F. Scott, R. J. Ballagh, and K. Burnett. Formation of fundamental structures in Bose-Einstein condensates. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **31**(8):L329, 1998.
- [121] R. Dum, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. Creation of dark solitons and vortices in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:2972, 1998.
- [122] M. Lewenstein. priv. Mitteilung.
- [123] J. Ruostekoski. Topological phase preparation in a pair of atomic Bose-Einstein condensates. E-print [cond-mat/9911391](#), 2000.
- [124] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller. Black holes in Bose-Einstein condensates. E-print [gr-qc/0002015](#), 1999.
- [125] J. A. C. Weidemann and B. M. Herbst. *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**:485, 1986.
- [126] G. Baym and C. J. Pethick. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1):6, 1996.
- [127] A. Sanpera. priv. Mitteilung.
- [128] P. Fedichev. priv. Mitteilung.
- [129] M. D. Girardeau and E. M. Wright. Many-body solitons in a one-dimensional condensate of hard core bosons. E-print [cond-mat/0002062](#), 2000.
- [130] P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Damping of low-energy excitations of a trapped Bose-Einstein condensate at finite temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, **80**(11):2269, 1998.
- [131] Yu. Kagan, N. V. Prokof'ev, and B. V. Svistunov. Supercurrent stability in a quasi-1d weakly interacting Bose gas. E-print [cond-mat/9908378](#), 1999.
- [132] P. O. Fedichev, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov. Damping of low-energy excitations of a Bose-condensed gas in the hydrodynamic regime. E-print [cond-mat/9911238](#), 1999.
- [133] Th. Busch and J. Anglin. Motion of dark solitons in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **84**:2298, 20007.
- [134] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Phys. Rev. A.*, **53**:2477, 1996.
- [135] E. L. Bolda and D. F. Walls. Detection of vorticity in Bose-Einstein condensed gases by matter-wave interference. *Phys. Rev. Lett.*, **81**:5477, 1998.
- [136] Emil Lundh, C. J. Pethick, and H. Smith. Vortices in Bose-Einstein-condensed atomic clouds. *Phys. Rev. A*, **58**:4816, 1998.
- [137] P. O. Fedichev and G. V. Shlyapnikov. Dissipative dynamics of a vortex state in a trapped Bose-condensed gas. *Phys. Rev. A*, **60**:R1779, 1999.

- [138] H. Pu, C. K. Law, J. H. Eberly, and N. P. Bigelow. Coherent disintegration and stability of vortices in trapped Bose condensates. *Phys. Rev. A*, **59**:1533, 1999.
- [139] D. L. Feder, Ch. W. Clark, and B. I. Schneider. Vortex stability of interacting Bose-Einstein condensates confined in anisotropic harmonic traps. *Phys. Rev. Lett.*, **82**:4956, 1999.
- [140] B. Jackson, J. F. McCann, and C. S. Adams. Vortex formation in dilute inhomogeneous Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:3903, 1998.
- [141] P. D. Drummond, K. V. Kheruntsyan, and H. He. Novel solitons in parametric amplifiers and atom lasers. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **1**(4):387–395, 1999.
- [142] K.-P. Marzlin and W. Zhang. Laser-induced rotation of a trapped Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A.*, **57**:3801, 1998. *ibid.* 4761, 1999.
- [143] Tomoya Isoshima and Kazushige Machida. Vortex stabilization in Bose-Einstein condensate of alkali-metal atom gas. *Phys. Rev. A*, **59**:2203, 1999.
- [144] B. M. Caradoc-Davies, R. J. Ballagh, and K. Burnett. Coherent dynamics of vortex formation in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **83**:895, 1999.
- [145] J. E. Williams and M. J. Holland. Preparing topological states of a Bose-Einstein condensate. *Nature*, **401**:568, 1999.
- [146] S. Kuppens, M. Rauner, M. Schiffer, G. Wokurka, T. Slawinski, M. Zinner, K. Sengstock, and W. Ertmer. Atom guiding in a blue detuned donut mode. In K. Burnett, editor, *TOPS on ultracold atoms and BEC*, pages 102–107. OSA, 1997.
- [147] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle. Suppression and enhancement of impurity scattering in a Bose-Einstein condensate. E-print cond-mat/0033387, 2000.
- [148] P. O. Fedichev and G. V. Shlyapnikov. Critical velocity in cylindrical Bose-Einstein condensates. E-print cond-mat/0004039, 2000.
- [149] S. Chu. Atom interferometry. In R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, editors, *Coherent atomic matter waves*. Les Houches, Session LXXII (1999). to be published.
- [150] C. S. Adams, M. Sigel, and J. Mlynek. Atom optics. *Phys. Rep.*, **240**:143, 1994.
- [151] J. P. Dowling and J. Gea-Banacloche. Evanescent light-wave atom mirrors, resonators, waveguides, and traps. *Adv. At. Mol. a. Opt. Phys.*, **37**:1, 1996.
- [152] H.-R. Noh, K. Shimizu, and F. Shimizu. Imaging of an atomic beam with electrostatic lenses. *Phys. Rev. A.*, **61**:041601(R), 2000.
- [153] K. Helmerson and W. D. Phillips. Cooling, trapping and manipulation of neutral atoms and BEC by electromagnetic fields. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, pages 391–438. International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, IOS Press, 1999.
- [154] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: The dipole force revisited. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**:1707, 1985.



## Danksagung

Viele Personen hatten am Gelingen dieser Arbeit einen wichtigen Anteil. Ich möchte mich bei allen sehr herzlich bedanken.

Herrn Professor Dr. Wolfgang Ertmer, meinem Doktorvater, danke dafür, mit einer faszinierenden Aufgabenstellung in ein hochmotivierendes Umfeld eingebunden gewesen zu sein. Durch seine stetige, intensive Unterstützung und Betreuung und viele entscheidende physikalische Ideen hat er diese Arbeit möglich gemacht.

Herrn Professor Dr. Maciej Lewenstein danke ich für wichtige Unterstützung und für sehr anregende und lehrreiche Diskussionen.

Herrn Professor Dr. Karsten Danzmann danke ich für die Übernahme des Koreferats dieser Arbeit und für spannende Einblicke in die Welt der Gravitationswellenastronomie.

Herrn Privatdozent Dr. Klaus Sengstock danke ich für seine große Unterstützung in allen Bereichen meiner Arbeit. Durch seinen engagierten und motivierenden Einsatz hat er diese Arbeit entscheidend geprägt.

Herrn Dr. Gerhard Birkel danke ich für seine wichtige, unermüdliche Hilfe in vielen grundlegenden Phasen dieser Arbeit.

Dr. Kai Bongs danke ich für die sehr angenehme und effektive Zusammenarbeit. Seine Hilfsbereitschaft und sein großer wissenschaftlicher Tatendrang haben das positive Klima in der Arbeitsgruppe sehr bereichert. Das Durchhaltevermögen in vielen langen „Messnächten“ wurde nicht zuletzt durch seine großzügige Versorgung mit Lebensmitteln gestärkt.

Michael Roemer, Claus Fühner, Thomas Südmeyer, Nils Bantleon, Milutin Kovačev, Stefanie Dettmer und Thomas Rinkleff danke ich für den großen Einsatz, mit dem sie während ihrer Diplomarbeiten das BEC-Team verstärkt haben. Stefanie Dettmer, Dirk Hellweg, Markus Kottke und Holger Schmaljohann danke ich für die gute Zusammenarbeit und ihr Engagement in der Fortführung des BEC-Projektes.

Stellvertretend für die gesamte Arbeitsgruppe von Wolfgang Ertmer möchte ich Dr. Ernst Rasel, Felix Buchkremer, Jochen Keupp, Peter Engels und Martin Zinner für viele angenehme Diskussionen und für ihre Hilfe danken.

Dr. Anna Sanpera, Dr. Luis Santos, Pierre Villain und Filip Floegel danke ich stellvertretend für Maciej Lewensteins Arbeitsgruppe im Institut für Theoretische Physik für die intensive und freundliche Zusammenarbeit in einem internationalen Umfeld.

Stellvertretend für alle Mitarbeiter des Instituts für Quantenoptik danke ich Frau Krämer, Herrn Dr. Rudolf Gaul und Herrn Heidekrüger für ihre Unterstützung.

Vor allem danke ich meinen Eltern, Antje und Dr. Rolf Burger, und Petra Jaeckel.



## Lebenslauf

– Sven Burger –

28. Januar 1969 geboren in Kiel als Sohn von Dr. Rolf Burger und Antje Burger, geb. Rabe

### Schulausbildung:

1975 – 78 Grundschule in Strande bei Kiel  
1978 – 79 Grundschule in Neustadt in Holstein  
1979 – 88 Kreisgymnasium Neustadt in Holstein  
1988 Abitur

### Zivildienst:

November 1988 – Juni 1990 Krankenpflege im Bernhard-Nocht-Institut für Tropenmedizin, Hamburg

### Studium:

1990 – 1992 Physikstudium an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg  
Juli 1992 Vordiplom  
1992 – 1993 Physikstudium im ‘EEC-Year-Abroad’-Programm an der University of Glasgow, Schottland  
April – Juni 1993 Praktikum in der High Energy Physics Group der University of Glasgow  
1993 – 1996 Fortsetzung des Studiums an der Universität Hannover  
1995 – 1996 Diplomarbeit am Institut für Quantenoptik in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. W. Ertmer  
Thema der Diplomarbeit: *Dichteerhöhung in einer magnetooptischen Falle für Rubidiumatome*  
Dezember 1996 Diplomprüfungen  
Februar 1997 – Juni 2000 Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. W. Ertmer  
Thema: *Erzeugung und Untersuchung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten*