

**Untersuchungen und Berechnungen  
zur Medialen Achse  
bei berandeten Flächenstücken**

Vom Fachbereich  
Mathematik und Informatik  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
Dr. rer. nat.  
genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Math. Thomas Rausch  
geboren am 22. August 1965  
in Frankfurt am Main

1999

Referent: Prof. Dr. F.-E. Wolter  
Koreferent: Prof. Dr. G. Mühlbach  
Tag der Promotion: 21. Juli 1999  
Datum der Veröffentlichung: November 1999

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Berechnung der Medialen Achse einer kompakten Teilmenge  $A \subset S$  einer parametrischen,  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$  entwickelt, deren Randkurve  $\partial A$  krümmungstetig ist.

Hierzu wird zunächst die sogenannte Offsetfunktion von Flächenkurven und -punkten, sowie die induzierte Geodätische Offsetkurve untersucht. Es wird gezeigt, daß die Offsetfunktion einer  $C^2$ -stetigen Flächenkurve eine stetig partiell differenzierbare Funktion ist, falls die betrachtete Fläche mindestens  $C^2$ -stetig ist. Ferner wird eine Methode entwickelt, die Funktionswerte und die partiellen Ableitungen der Offsetfunktion zu berechnen.

Das Konzept der Geodätischen Offsetfunktion wird anschließend benutzt, um durch Lösen der sogenannten Medialen Differentialgleichung die Mediale Kurve zweier gegebener Objekte zu berechnen. Diese Kurve besteht aus den Flächenpunkten, für die es je eine Geodätische Kurve gleicher Bogenlänge zu den betrachteten Objekten gibt. Neben der Analyse ihrer geometrischen Eigenschaften wird ein Verfahren angegeben, um Mediale Kurven numerisch zu bestimmen. Schließlich wird gezeigt, wie Mediale Kurven erfolgreich benutzt werden können, um kürzeste Geodätische Kurven zwischen zwei gegebenen Objekten (Flächenkurven oder -punkten) zu berechnen.

Offsetfunktionen können ebenfalls dazu benutzt werden, um die Fokalkurve eines beliebigen Flächenobjekts zu berechnen. Hierbei handelt es sich um den Ort der Fläche, in dem die Tangenten der Offsetkurven des Objekts verschwinden; die Fokalkurve wird in der Literatur konjugierter Ort genannt, falls das Ausgangsobjekt ein Flächenpunkt ist. Diese Vorgehensweise führt zu der Behandlung der in dieser Arbeit eingeführten Fokalen Differentialgleichung. Es wird gezeigt, wie diese Differentialgleichung zur Approximation von Fokalkurven genutzt werden kann.

Zum Abschluß der Arbeit wird die Mediale Achse eines kompakten Teilgebiets  $A \subset S$  mit zweimal stetig differenzierbarer Randkurve untersucht. Neben einer lokalen Charakterisierung ihrer Elemente wird zur globalen Struktur gezeigt, daß die Mediale Achse ein starker Deformationsretrakt von  $A$  ist. Zentral für die Entwicklung eines Berechnungsschemas ist die hier bewiesene Beobachtung, daß die Mediale Achse eines einfach zusammenhängenden Gebiets ein topologischer Graph ist. Die Kanten des Graphen können durch Lösen der Medialen Differentialgleichung bestimmt werden; seine Ecken können nach der Anzahl ihrer distanzminimalen Verbindungen zu  $\partial A$  klassifiziert werden. Ausgehend von diesen Ergebnissen wird schließlich ein neuer Algorithmus zur Berechnung der Medialen Achse angegeben.

Schlagworte: Geodätische Offsetkurve, Fokalkurve, Mediale Achse



## Abstract

In this thesis a method for computing the medial axis of a compact subset  $A \subset S$  of a parametric  $C^2$ -surface  $S$  is developed. The border curve of  $A$  is considered to be curvature continuous.

For this purpose the so-called offset function of a given curve or point on the surface  $S$ , along with the induced geodesic offset curve is investigated. We show that the partial derivatives of the offset function exist and are continuous, provided the given curve and the considered surface are at least of class  $C^2$ . Moreover, a method for computing the offset function and its partial derivatives is presented.

The concept of geodesic offset functions is used to compute the medial curve of two given progenitor objects on  $S$  by solving the so-called medial differential equation. The medial curve consists of all points on the surface, for which two geodesic curves of equal arc length exists, each connecting the medial curve point with one of the progenitor objects. In addition to the analysis of the geometrical properties of medial curves, a numerical method for their computation is presented. Moreover, we show how medial curves can successfully be used to find a minimal geodesic join between two objects, i. e. curves or points on the considered surface.

Offset functions can also be employed to compute focal curves of an arbitrary surface object. A focal curve may be characterized as the locus on the surface, where the tangents of geodesic offset curves of a progenitor object have zero length; the focal curve is called conjugate locus in case the progenitor object is a single surface point. Our considerations lead us to the introduction of the so called focal differential equation describing the tangent vectors behavior of a focal curve. We show how this differential equation can be used to approximate focal curves.

Finally, we investigate the medial axis of a compact subset  $A \subset S$ , having a curvature continuous border curve. We give a characterization of local parts of the medial axis. We present also a global result stating that the medial axis is a strong deformation retract of  $A$ . Moreover, we show that the medial axis of a simply connected, bordered subsurface of  $S$  is a topological graph, which is an essential property with respect to the computation of the medial axis: the edges of the graph can be computed by solving the medial differential equation, its vertices may be classified by the number of distance minimal joins to  $\partial A$ . Based on these results a new algorithm for the computation of the medial axis is introduced.

Keywords: geodesic offset curve, focal curve, medial axis



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Differentialgeometrische Grundlagen</b>	<b>19</b>
2.1	Elementare Eigenschaften parametrischer Freiformflächen . . . . .	19
2.2	Geodätische Kurven . . . . .	26
2.3	Vektorfelder und der Satz von Jacobi . . . . .	29
2.4	Geodätische Polarkoordinaten . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Geodätische Offsetkurven</b>	<b>39</b>
3.1	Geodätische Offsetkurven von Flächenkurven . . . . .	39
3.2	Geodätische Offsetfunktionen . . . . .	43
3.3	Eigenschaften Geodätischer Offsetkurven . . . . .	58
3.4	Zweite Ableitungen Geodätischer Koordinaten . . . . .	66
3.5	Berechnung der partiellen Ableitungen von $y$ . . . . .	70
3.6	Numerische Berechnung von Offsetkurven . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Mediale Kurven</b>	<b>83</b>
4.1	Verallgemeinerte Mediale Kurven . . . . .	83
4.2	Eigenschaften Medialer Kurven mit konstantem Verhältnis . . . . .	88
4.3	Bogenlängenparametrisierte Mediale Kurven . . . . .	94
4.4	Geodätische Krümmung Medialer Kurven . . . . .	97
4.5	Berechnung von Startwerten der Medialen Differentialgleichung . . . . .	102
4.6	Beispiele zur Berechnung Medialer Kurven . . . . .	111
4.7	Mediale Kurven und Geodätische Verbindungskurven . . . . .	118

<b>5 Fokalkurven</b>	<b>125</b>
5.1 Differentialgleichung Fokaler Kurven . . . . .	125
5.2 Fokalpunkte und Geodätische Krümmungskreise . . . . .	131
5.3 Startwerte der Fokalen Differentialgleichung . . . . .	139
5.4 Numerische Beispiele . . . . .	143
<b>6 Mediale Achsen</b>	<b>155</b>
6.1 Cut Locus und Mediale Achse . . . . .	155
6.2 Eigenschaften der Medialen Achse . . . . .	161
6.3 Die Mediale Achse als Deformationsretrakt . . . . .	168
6.4 Start- und Verzweigungspunkte der Medialen Achse . . . . .	174
6.5 Berechnung der Medialen Achse . . . . .	188
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>201</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Normalkrümmung und Geodätische Krümmung einer Flächenkurve . . . . .	23
2.2	Geodätische Polarkoordinaten auf einem Ellipsoiden . . . . .	33
2.3	Geodätische Offsetkurven mit singulären Punkten auf einer Glockenfläche (I) . .	34
2.4	Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 2.3 . . . . .	35
2.5	Geodätische Offsetkurven mit singulären Punkten auf einer Glockenfläche (II) . .	36
2.6	Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 2.5 . . . . .	37
3.1	Geodätische Kurven und global kürzeste Verbindungen . . . . .	40
3.2	Offsetfunktion $\mathcal{O}_\alpha(s, t)$ einer gegebenen Progenitorkurve $\alpha(t)$ . . . . .	44
3.3	Geodätische Offsetkurven einer Kurve auf einer $C^2$ -stetigen BSpline-Fläche . . .	78
3.4	Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.3 . . . . .	79
3.5	Geodätische Offsetkurven und Jacobifeld eines Flächenpunktes auf einer $C^2$ - stetigen BSpline-Fläche . . . . .	80
3.6	Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.5 und par- tielle Ableitungen der Offsetfunktion . . . . .	81
3.7	Geodätische Offsetkurven und Jacobifeld der Erzeugenden des Torus . . . . .	82
3.8	Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.7 . . . . .	82
4.1	Verlauf der Medialen Kurve bei links- bzw. rechtsseitigem Offsetting . . . . .	84
4.2	Verallgemeinerte Mediale Kurve zweier Geraden in der Euklidischen Ebene . . .	87
4.3	Nicht kollineare Normalen in singulärem Punkt der Medialen . . . . .	92
4.4	Wachstumsverhalten des Medialen Abstands für $b(t) = 1$ . . . . .	94
4.5	Winkelhalbierenden Eigenschaft der Medialen Tangente und Durchlaufrihtung .	95
4.6	Nicht eindeutig bestimmte Wurzel von $\mathbf{G}_{t_0}$ . . . . .	102
4.7	Wurzel von $\mathbf{G}_{t_0}$ jenseits des Fokalphunkts von $\alpha(t_0)$ . . . . .	103
4.8	Initialisierung des Bisektionsverfahrens . . . . .	105
4.9	Kurvenbereich beginnt bzw. endet im initialen Geodätischen Kreis . . . . .	106

4.10 Einzelschritt des Bisektionsverfahrens . . . . .	107
4.11 Erweiterung des Bisektionsverfahrens im Fall von Progenitorpunkten . . . . .	109
4.12 Approximation des Tangentialwinkels am 2. Progenitorpunkt . . . . .	110
4.13 Mediale Kurve zweier Progenitorcurven auf einer $C^2$ -stetigen Nurbs-Fläche . . .	112
4.14 Parameterraumkurven der Medialen Kurve aus Abbildung 4.13 . . . . .	113
4.15 Verallgemeinerte Mediale Kurve zweier Kurven auf einer wellenförmigen Fläche .	114
4.16 Parameterraumkurven der Medialen Kurve aus Abbildung 4.15 . . . . .	115
4.17 Mediale Kurven zweier Progenitorpunkte auf einer wellenförmigen Fläche . . . .	116
4.18 Parameterraumkurven der Medialen Kurven aus Abbildung 4.17 . . . . .	117
4.19 Mediale Kurven zu einem Flächenpunkt und einer -kurve auf einem Katenoid . .	118
4.20 Parameterraumkurven der Medialen Kurven aus Abbildung 4.19 . . . . .	118
4.21 Verbindende Geodätische Kurve zweier Flächenpunkte . . . . .	123
4.22 Verbindende Geodätische Kurve zwischen Flächenpunkt und -kurve . . . . .	123
4.23 Verbindende Geodätische Kurve zweier Flächenkurven . . . . .	124
5.1 Fokalkurve und Krümmungskreise der Parabel . . . . .	136
5.2 Links- und rechtsseitige Fokalkurven der Erzeugenden eines Torus . . . . .	145
5.3 Parameterraumkurven der Fokalkurven aus Abbildung 5.2 . . . . .	146
5.4 Linksseitige Fokalkurven der Erzeugenden des Torus . . . . .	147
5.5 Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einem Torus . . . . .	148
5.6 Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.5 . . . . .	148
5.7 Fokalkurve einer BSpline-Kurve auf einer wellenförmigen Fläche . . . . .	149
5.8 Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.7 . . . . .	150
5.9 Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einer Glockenfläche (I) . . . . .	151
5.10 Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.9 . . . . .	151
5.11 Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einer Glockenfläche (II) . . . . .	152
5.12 Zweite Ansicht der Fokalkurve aus Abbildung 5.11 . . . . .	152
5.13 Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.11 und 5.12 . . . . .	153
6.1 Cut Locus und Mediale Achse eines polygonalen Gebiets der Ebene . . . . .	156
6.2 Cut Locus eines Punktes in einer polygonal berandeten Mannigfaltigkeit . . . . .	157
6.3 Mediale Achse und maximal einbeschriebene Kreise . . . . .	160
6.4 Mediale Achse und Fokale Startpunkte . . . . .	166
6.5 Mediale Achse eines Kreisrings . . . . .	178

---

6.6	Verschiedene Arten von Startpunkten der Medialen Achse . . . . .	187
6.7	Verschiedene Arten von Verzweigungspunkten der Medialen Achse . . . . .	188
6.8	Flußdiagramm des Algorithmus zur Berechnung der Medialen Achse . . . . .	190
6.9	Startpunkte $v_i$ und Endpunkt $\bar{v}$ der Medialen Achse . . . . .	191
6.10	Mediale Kurve ausgehend vom Fokalen Startpunkt $v_1$ . . . . .	192
6.11	Mediale Kurve ausgehend von den Startpunkten $v_2$ und $v_3$ . . . . .	193
6.12	Schnittpunkt $w_1$ Medialer Kurven als neuer Startpunkt . . . . .	194
6.13	Iteration der Berechnung Medialer Kurven mit anschließendem Kürzen . . . . .	194
6.14	Ende der Berechnung durch Erreichen des Endpunkts $\bar{v}$ . . . . .	195
6.15	Verzweigungspunkt induziert mehrere neue Anfangswerte . . . . .	196
6.16	Mediale Achse eines „Puzzleteils“ auf einer Nurbs-Fläche . . . . .	197
6.17	Parameterraumkurven der Medialen Achsen aus Abbildung 6.16 . . . . .	198
6.18	Mediale Achse eines Vierecks auf einer wellenförmigen Fläche . . . . .	198
6.19	Parameterraumkurven der Medialen Achsen aus Abbildung 6.18 . . . . .	199

# Tabellenverzeichnis

3.1	Anforderungen und Ergebnisse der Geodätischen Differentialgleichung . . . . .	75
3.2	Anforderungen und Ergebnisse der Jacobi Differentialgleichung . . . . .	76
3.3	Anforderungen und Ergebnisse der gestörten Jacobi Differentialgleichung . . . . .	77
4.1	Anforderungen und Ergebnisse der Medialen Differentialgleichung . . . . .	111
4.2	Anforderungen und Ergebnisse der Bestimmung Geodätischer Verbindungskurven	122
5.1	Anforderungen und Ergebnisse der Fokalen Differentialgleichung . . . . .	144

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Frage nach der Menge der Punkte, die den gleichen Abstand zu einer gewissen Anzahl von gegebenen Objekten besitzen, ist eine der klassischen Fragen der konstruktiven Geometrie. Bereits im Euklidischen Fall, in der kürzeste Verbindungen simple Geradenstücke sind, ergeben sich, je nach Wahl der Referenzobjekte, interessante Problemstellungen, die keineswegs triviale Lösungen besitzen. So ist die Kurve gleichen Abstands zu zwei gegebenen Kurven alles andere als leicht zu bestimmen. Überträgt man die Fragen auf die Geometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, so treten dabei Phänomene auf, die in Euklidischen Räumen nicht zu beobachten sind. Bereits die Berechnung kürzester Pfade (quasi die geraden Linien der Riemannschen Geometrie) ist nicht offensichtlich. Anders als im Euklidischen Fall können sich diese Kurven schneiden. Daher kann ein einzelner Punkt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit eine nicht-leere Äquidistancialmenge besitzen.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 bzw. 3 stellen nicht nur mathematische Begriffe mit einer guten Anschauung dar, sie sind auch die adäquaten Objekte für die Anwendung in der Oberflächen- bzw. Volumenmodellierung, wie sie in der Zwischenzeit in beinahe jedem Bereich der industriellen Fertigung eingesetzt werden. Obwohl die Frage nach kürzesten Verbindungen und Äquidistancialmengen im Riemannschen Fall also zunächst mathematischer Natur ist, ist sie doch von Relevanz für die Praxis. Da alle Aufgaben, die in diesem Zusammenhang anfallen, typischerweise nicht-lineare Probleme sind, die ohne den Einsatz moderner Rechenanlagen nicht zu lösen wären, bewegt sich ihre Behandlung im Spannungsfeld zwischen Angewandter Mathematik und Informatik.

Das Fernziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen für die Formulierung einer Methode zur Berechnung der sogenannten *Medialen Achse* in zweidimensionalen Riemannschen Geometrien zu schaffen. Die Mediale Achse  $\mathcal{M}(A)$  einer zweidimensionalen, abgeschlossenen Teilmenge  $A$  der betrachteten Flächengeometrie kann grob als die Menge aller Punkte in  $A$  beschrieben werden, die mindestens zwei distanzminimale Pfade zum Rand von  $A$  besitzen. Sie bildet, salopp gesprochen, das „Skelett“ von  $A$ . Dieser suggestive Begriff wird im übrigen von einigen Autoren als Synonym für „Mediale Achse“ benutzt (vgl. z.B. [DH93]). Der Einsatz der Medialen Achse wurde bereits vor über 30 Jahren von Blum in [Blu64] vorgeschlagen, um Gestalt und Form von Teilmengen der Euklidischen Ebene automatisch zu erkennen (siehe auch [Blu73]).

In den letzten Jahren hat die Mediale Achse (sowie die verwandten Konzepte der Äquidistancialmengen und der Voronoi-Diagramme) verstärkt Einzug in die Bereiche des CAx (Computer Aided (Geometric) Design, Computer Aided Manufacturing, Computer Aided Engineering) er-

halten. Die Anwendungsfelder der Medialen Achse sind dabei sehr vielfältiger Natur. Hierzu zählen beispielsweise

- Globale Gestaltuntersuchung (siehe z.B. [PG90], [Gur89], [She95]),
- Repräsentierung der Gestalt von Mengen mit Hilfe der Medialen Achsen Transformation (vgl. etwa [Ver94], [Gur89]),
- Automatische Erzeugung einer Finiten Elemente Zerlegung (siehe u.a. [TA91], [GP91]),
- Steuerung von NC-Maschinen<sup>1</sup> (vgl. [Hel91]),

um nur einige der aktuellen Einsatzgebiete zu nennen. Die genannten Arbeiten auf diesem Gebiet haben aber alle eine Gemeinsamkeit: Sie behandeln ausschließlich den Euklidischen Fall. Dabei stellen alle aufgezählten Ziele auch für den Riemannschen Fall sinnvolle Anwendungen dar. So ist man etwa im Karosseriebau im Hinblick auf den Einsatz Finiten Elemente Methoden zur Durchführung von Steifigkeitstests, Umströmungsanalysen u.v.m. auf die automatische Erzeugung „geeigneter“ Finiten Elemente Zerlegungen der modellierten Fahrzeughaut angewiesen. Um zu einer solchen (für die Finite Elemente Analyse günstigen) Unterteilung zu gelangen, wird man Abstände und Winkel in der durch die Flächengeometrie vorgegebenen *Riemannschen* Metrik berechnen müssen. Eine Verallgemeinerung der Zerlegungsalgorithmen von Teilgebieten der Euklidischen Ebene führt daher zwangsläufig zur Beschäftigung mit Medialen Achsen in beliebigen Flächengeometrien.

Gerade im Hinblick auf ihren verbreiteten Einsatz in Design, Konstruktion und Fertigung haben wir uns in unseren Untersuchungen auf parametrische Flächen spezialisiert. Insbesondere die Klassen der B-Splinekurven und -Flächen werden in diesen Bereichen häufig eingesetzt. Allerdings sind wir davon überzeugt, daß die in dieser Arbeit vorgestellten Konzepte auch im Fall implizit definierter Flächen greifen und zu analogen Berechnungsmethoden führen werden. Mit der Betrachtung parametrischer Flächen behandeln wir natürlich gleichzeitig den Euklidischen Fall als Spezialfall. Allerdings ist zu sagen, daß sich die Berechnungen in der Euklidischen Ebene oftmals einfacher gestalten lassen, als dies unsere, für beliebige,  $C^2$ -stetige Flächengeometrien entwickelten Methoden vorschlagen. Da wir von der praktischen Relevanz der bearbeiteten Problemstellung überzeugt sind, wurde Kapitel 2 (in der vielleicht eiteln Hoffnung, Leser aus der nicht-mathematischen Welt interessieren zu können) der Zusammenfassung aller benutzten mathematischen Grundlagen aus der Differentialgeometrie gewidmet.

So werden in Abschnitt 2.1 die in dieser Arbeit im Zusammenhang mit parametrischen Flächen und Flächenkurven benutzten Schreibweisen eingeführt. Ferner werden einige ihrer elementaren Eigenschaften besprochen; dies schließt die Fundamentalformen, alle Krümmungsbegriffe von Kurven und Flächen u.v.m. ein. In Abschnitt 2.2 beschäftigen wir uns anschließend mit Geodätischen Flächenkurven, die in einem gewissen Sinn die Geraden der betrachteten Flächengeometrie darstellen. Dort wird insbesondere über die klassische Geodätische Differentialgleichung berichtet, die uns die Berechnung von Geodätischen ermöglichen wird. In Abschnitt 2.3 wird die kovariante Ableitung von Vektorfeldern der Fläche vorgestellt, die uns zu dem für unsere Methoden zentralen Satz 2.3.5 über Jacobi-Felder führen wird. Nachdem bereits vorher die Geodätische Kurve als Analogon zur Geraden in der Ebene betrachtet wurde, werden in Abschnitt 2.4 Geodätische Offsetkurven und Geodätische Abstandskreise um einen Punkt

<sup>1</sup>„NC“ steht als Abkürzung für „Numerical Control“. Ein Beispiel von NC-Maschinen sind etwa Fräsmaschinen, deren Fräswege durch den Einsatz von programmierbaren Bauteilen gesteuert werden.

der Fläche studiert. Geodätische Offsetkurven eines gegebenen Punktes besitzen (zumindest lokal) einen gewissen Abstand zu diesem Punkt. Allerdings sind sie im allgemeinen lediglich eine Obermenge des Randes des Abstandskreises. Zusammen mit der vorhandenen Möglichkeit, Offsetkurven zu berechnen, illustriert dieser Sachverhalt ihre Bedeutung für die Untersuchung der betrachteten Geometrie.

Aufgrund ihrer Bedeutung für die Abstandsmessung auf parametrischen Flächen widmen wir uns in Kapitel 3 ausschließlich den Eigenschaften Geodätischer Offsets. In Abschnitt 3.1 werden wir zunächst den Begriff der Geodätischen Offsetkurve für den Fall einer gegebenen Flächenkurve verallgemeinern. Wieder wird die so eingeführte Kurve (lokal) einen gewissen Abstand zur Ausgangskurve besitzen. Geodätische Offsetkurven sind im übrigen nicht allein von mathematischem Interesse. Dies zeigt bereits die Namensgebung an, die unseres Wissens aus dem Bereich der NC-Maschinen stammt. Sie spielen beispielsweise eine wichtige Rolle bei der Steuerung von Fräsmaschinen (siehe etwa [Hel91] und [Roh98]). Alle Ergebnisse aus Kapitel 3 haben daher bereits ihre eigene praktische Bedeutung.

Nachdem Offsetkurven von Flächenpunkten *und* -kurven eingeführt wurden, werden diese im folgenden in systematischer Form studiert. Um zu einer möglichst einheitlichen Darstellung zu gelangen, wird in Abschnitt 3.2 die sogenannte Offsetfunktion eingeführt, mit deren Hilfe beide Fälle gleichzeitig diskutiert werden können. Als Hauptresultat von Abschnitt 3.2 gelingt es uns zu zeigen, daß diese Funktion selbst bei lediglich  $C^2$ -stetigen Flächenparametrisierungen noch stetig partiell differenzierbar ist (vgl. Satz 3.2.7). Dies ist ein einigermaßen überraschendes, theoretisches Resultat, da zur Definition der Offsetfunktion Geodätische Kurven benutzt werden. Bei deren Berechnung werden aber bereits die zweiten partiellen Ableitungen der Flächenparametrisierung verwandt, so daß man für die Offsetfunktion lediglich  $C^0$ -Stetigkeit erwartet. Der Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Hartman (in [Har50]) dar. Hartman beweist die Stetigkeitsaussage für den Fall eines Flächenpunktes; unsere Behauptung schließt den Fall von Flächenkurven mit ein. Eine bekannte Tatsache, die man allerdings nicht aus den Augen verlieren sollte, ist, daß die in der Praxis modellierten Spline-Flächen an ihren Segmentübergängen selten eine hohe Stetigkeitsordnung besitzen. Mögen die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 auch auf den ersten Blick sehr akademisch erscheinen, so garantieren sie doch die Gültigkeit unserer Methoden in dem Fall von  $C^2$ -Flächen. Da in der Praxis höchstens krümmungstetige Flächenparametrisierungen zu erwarten sind, wertet dieses Resultat unsere Verfahren im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit deutlich auf.

Um die Praxistauglichkeit des Konzepts der Geodätischen Offsetfunktion weiter zu fundieren, werden wir in Abschnitt 3.3 zeigen, wie die Offsetfunktion und ihre partiellen Ableitungen berechnet werden können. Der Schlüssel hierzu stellt die sogenannte *Jacobi Differentialgleichung* dar, eine klassische gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dieser Weg wurde ursprünglich von Wolter in [Wol89] vorgeschlagen und in [RWS96a] publiziert. Mit Abschnitt 3.3 liegt nun erstmals eine vollständige und systematische Darstellung dieses Verfahrens vor, die auch den Punktfall mit einbezieht.

In Verallgemeinerung zu Geodätischen Polarkoordinaten kann man auch im Fall einer Flächenkurve mit Hilfe der Geodätischen Offsetfunktion lokal eine neue reguläre Flächenparametrisierung einführen, die wir im folgenden *Geodätische Koordinaten* nennen werden. Diese Parametrisierung ist vor allem aus theoretischer Sicht nützlich, da man mit ihrer Hilfe viele Eigenschaften von Offsetkurven prägnanter formulieren und einsehen kann. Handelt es sich sowohl bei der betrachteten Fläche als auch bei der gegebenen Flächenkurve um  $C^3$ -stetige Objekte, so ist diese Parametrisierung lokal zweimal stetig differenzierbar. In den Abschnitten 3.4 und 3.5 wird untersucht, wie diese zweiten partiellen Ableitungen numerisch bestimmt werden können. Hierfür

betrachten wir die Jacobi Differentialgleichung in Abhängigkeit ihrer Anfangswerte. Nach einem bekannten Satz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten wir durch Differenzieren nach dem Parameter der Anfangswerte ein neues Differentialgleichungssystem, dessen Lösung uns die Bestimmung aller partiellen Ableitungen der Offsetfunktion ermöglicht. Mit dieser Fertigkeit ist man in der Lage, alle geometrischen Größen, wie z.B. die Christoffelsymbole oder die Gaußkrümmung der Fläche, in Termen der Geodätischen Offsetkurve und ihrer partiellen Ableitungen auszudrücken. Die bislang nicht publizierten Ergebnisse dieser beiden Abschnitte werden es uns ermöglichen, einige geometrischen Größen der Medialen Kurven zu ermitteln.

In Kapitel 4 wird besprochen, wie Geodätische Offsetkurven dazu benutzt werden können, die Mediale Kurve zweier Ausgangsobjekte (Flächenpunkt *oder* Flächenkurve) auf einer regulären parametrischen Fläche zu approximieren. Die Mediale Kurve ist, grob gesagt, die Menge aller Punkte der Fläche, für die es je eine Geodätische Kurve gleicher Bogenlänge zu beiden Objekten gibt. Eine präzise Definition und erste Eigenschaften werden in Abschnitt 4.1 angegeben. Ferner wird dort gezeigt, wie man diese Kurve durch Lösen eines Differentialgleichungssystems, der sogenannten *Medialen Differentialgleichungen*, approximieren kann. Mediale Kurven werden uns im weiteren Verlauf der Arbeit das Tor zur Berechnung Medialer Achsen in Kapitel 6 öffnen.

Die Mediale Kurve sowie die angesprochene Vorgehensweise zu ihrer Berechnung wurden von Wolter 1989 (vgl. [Wol89]) vorgeschlagen und zuerst 1996 in [RWS96a] publiziert. Die im Rahmen dieser Arbeit angestrebten Untersuchungen gehen jedoch weit über die dort veröffentlichten Ergebnisse hinaus. So wird in Abschnitt 4.1 kein Unterschied zwischen den betrachteten Ausgangsobjekten gemacht, so daß (anders als noch in [RWS96a]) Mediale Kurven zu allen möglichen Kombinationen von Flächenkurven und -punkten betrachtet werden können. Ferner wird in Verallgemeinerung zu Medialen Kurven ein beliebiges Verhältnis der Bogenlängen der Geodätischen Kurven zu den betrachteten Objekten zugelassen. In Abschnitt 4.1 wird gezeigt, daß alle denkbaren Konfigurationen durch numerisches Lösen der Medialen Differentialgleichung behandelt werden können.

In den folgenden drei Abschnitten werden weitere Ergebnisse zu der Geometrie der Medialen Kurve präsentiert. So zeigen wir in Abschnitt 4.2, daß die Tangente der Medialen Kurve vollständig durch die Tangenten der beteiligten Offsetkurven bestimmt ist. Das Verhalten des zugehörigen Abstands eines Medialen Kurvenpunktes zu den Ausgangsobjekten ist ferner durch den Schnittwinkel der Offsetkurventangenten bestimmt. In Abschnitt 4.3 wird besprochen, wie die Mediale Differentialgleichung modifiziert werden kann, so daß die Lösung der bogenlängenparametrisierten Medialen Kurve entspricht. In Abschnitt 4.4 stellen wir uns der Aufgabe, die Geodätische Krümmung der Medialen Kurve zu bestimmen. Es wird sich zeigen, daß diese geometrische Größe zweiter Ordnung in keinem linearen Verhältnis zu den entsprechenden Krümmungswerten der beteiligten Offsetkurven steht. Dennoch sind wir in der Lage, eine Berechnungsvorschrift anzugeben.

Ein schwieriges Problem bei der Behandlung der Medialen Differentialgleichung ist es, geeignete Anfangswerte, d.h. einen Punkt der Medialen Kurve zu finden. Besitzt man die Information über die Lage eines solchen Punktes, so ist die Verfolgung der Medialen Kurve durch das Lösen der Medialen Differentialgleichung meist problemlos möglich. In Abschnitt 4.5 werden wir unseren Lösungsvorschlag dieses Problems vorstellen. Es handelt sich hierbei um einen neuen Algorithmus, der einen einzelnen Medialen Punkt mit Hilfe einer Art Bisektionsverfahren ermittelt. In Abschnitt 4.6 diskutieren wir insbesondere die Leistungsfähigkeit dieser Anfangswertsuche, indem wir dort einige Beispiele unseres Programms zur Berechnung der Medialen Kurve präsentieren.

Als eine Art Nebenprodukt hat sich im Laufe unserer Untersuchungen über Mediale Kurven ein Verfahren zur Bestimmung von kürzesten Geodätischen Verbindungskurven zwischen zwei Flächenobjekten ergeben. Dabei sind wieder alle Kombinationen von Flächenkurve und –punkt erlaubt. Ohne dies zu Beginn unserer Arbeit angestrebt zu haben, sind wir damit zu einer Methode gelangt, die oben angesprochene, klassische Frage der Geometrie, „wie komme ich am schnellsten von A nach B“ in dem Fall parametrischer Kurven zu beantworten. Dieses neue Verfahren wird in Abschnitt 4.7 vorgestellt. Daß man hierbei die kürzeste Geodätische Verbindung für jede denkbare Konfiguration bestimmen kann, ist die Folge der Vorgehensweise, bei der konzeptionellen Einführung der Geodätischen Offsetfunktion nicht zwischen Flächenpunkten und –Kurven zu unterscheiden.

In Kapitel 5 behandeln wir die sogenannten *Fokalfunkte* von Flächenkurven und –Punkten. Hierbei handelt es sich um Punkte der Geodätischen Offsetkurven, in denen die zugehörige Tangente verschwindet. Im Fall eines Flächenpunktes ist die Menge aller Fokalfunkte auch unter dem Namen *konjungierter Ort* bekannt. In Abschnitt 5.1 wird gezeigt, daß es sich bei dieser Menge um eine Flächenkurve handelt, die wir durch Lösen einer Differentialgleichung bestimmen können. Hierbei spielen die Geodätische Offsetfunktion und ihre partiellen Ableitungen wieder die entscheidende Rolle. Auch wenn diese Vorgehensweise bereits in [RWS96a] angeregt wurde, wird an dieser Stelle erstmals eine konkrete und vollständige Ausarbeitung zu den Eigenschaften der Fokalkurve, sowie zu ihrer Approximation vorgelegt. Insbesondere werden in Abschnitt 5.1 einige geometrische Eigenschaften der Fokalkurve besprochen.

Im Fall von ebenen Kurven entspricht der Fokalfunkt eines Kurvenpunktes bekanntlich dem Mittelpunkt des zugehörigen Krümmungskreises der Kurve. In Abschnitt 5.2 werden wir den Begriff des *Geodätischen Krümmungskreises* einer Flächenkurve einführen. Wir zeigen (vgl. Satz 5.2.2), daß dieser einer Geodätischen Offsetkurve um den Fokalfunkt der betrachteten Flächenkurve entspricht. Ferner gelingt es uns dort, eine weitere Gemeinsamkeit zur Euklidischen Situation herauszuarbeiten: Der Geodätische Krümmungskreis besitzt genau dann keinen transversalen Schnitt mit der Ausgangskurve, wenn die Funktion des Fokalen Abstands ein lokales Minimum besitzt. Diese Eigenschaft wird sich für die Berechnung Medialer Achsen als hilfreich erweisen.

Bevor die in Abschnitt 5.1 angegebene Differentialgleichung zur Berechnung von Fokalkurven erfolgreich eingesetzt werden kann, benötigt man passende Startwerte. Die Ermittlung solcher Anfangswerte ist Gegenstand von Abschnitt 5.3. Wir schlagen dort ein Bisektionsverfahren vor. Um hierbei zu einer Abschätzung eines Startintervalls zu kommen, benutzen wir die Vergleichssätze von Sturm, die uns bislang nur für den Fall von Kurvenpunkten geläufig waren. Wir geben daher eine leichte Verallgemeinerung für die Situation von Flächenkurven an (vgl. Satz 5.3.1). Anschließend werden wir in Abschnitt 5.4 anhand einiger numerischer Beispiele den Erfolg der hier vorgestellten Methoden demonstrieren.

Nach den Vorbereitungen der vorangegangenen Kapitel (die allerdings nicht nur vorbereitenden Charakter besitzen, sondern alle ihre eigenständige Bedeutung haben) kommen wir im letzten Kapitel auf unser Ausgangsproblem, der Berechnung der Medialen Achse zurück. Obwohl der Einsatz der Medialen Achse in den letzten Jahren im Bereich der Geometrischen Modellierung zugenommen hat, gibt es kaum Literatur, die ihre Struktur in mathematisch korrekter Weise analysiert. Dies gilt bereits für den Euklidischen Fall, aber erst recht für die von uns untersuchte Geometrie parametrischer Flächen. Hervorzuheben sind allerdings die Arbeiten von Wolter [Wol85], in der der sogenannte *Cut Locus* in Riemannschen Mannigfaltigkeiten untersucht wird, sowie [Wol92], die unter anderem die Mediale Achse im  $\mathbb{R}^n$  behandelt. Daher geben wir in Abschnitt 6.1 eine knappe Einführung in die Begriffe Cut Locus und Mediale Achse und besprechen ihre grundlegenden Eigenschaften.

In Abschnitt 6.2 beschränken wir uns in unseren Betrachtungen auf die Mediale Achse. Dort werden einige nicht-triviale Eigenschaften (unter gewissen Stetigkeitsannahmen an den Rand der betrachteten Menge) bewiesen, die für den ebenen Fall bereits von Wolter in [Wol92] gezeigt werden konnten. Diese betreffen vorwiegend die lokale Struktur der Medialen Achse. So können wir beispielsweise feststellen, daß jedes Element der Medialen Achse mindestens zwei kürzeste Verbindungen zum Rand der betrachteten Menge besitzt oder ein Fokalkpunkt der Randkurve ist (vgl. Lemma 6.2.2). In Abschnitt 6.3 behandeln wir dagegen eine zentrale globale Eigenschaft der Medialen Achse. Diese ist nämlich (wieder unter gewissen Stetigkeitsannahmen) ein starker Deformationsretrakt des Inneren der Ausgangsmenge. Auch dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines analogen Resultats für den Euklidischen Fall, das Wolter in [Wol92] zeigen konnte. Auch für diese Überlegung werden an wesentlicher Stelle die Eigenschaften Geodätischer Offsetfunktionen benutzt.

Mit diesem Resultat hat man eine recht starke Aussage über die Struktur der Medialen Achse zur Verfügung. Aus ihr ergibt sich insbesondere der Wegzusammenhang der Medialen Achse, vorausgesetzt die betrachtete Menge ist zusammenhängend. Im Hinblick auf die Vorbereitung einer Methode zur Berechnung der Medialen Achse gehen wir in Abschnitt 6.4 noch einen Schritt weiter. Wir zeigen hier, daß die Mediale Achse als topologischer Graph dargestellt werden kann (Satz 6.4.8), deren Kanten durch Lösen der Medialen Differentialgleichung bestimmt werden können (Satz 6.4.5). Ferner gelingt es uns dort, die Ecken des Graphen (im wesentlichen) nach der Anzahl ihrer distanzminimalen Verbindungen zum Rand der betrachteten Menge zu klassifizieren (Korollar 6.4.14). Damit ist der Weg zur Berechnung der Medialen Achse vorgegeben. In Abschnitt 6.5 werden wir schließlich die Berechnungsmethode der Medialen Achse vorstellen, die Moritz Baer im Rahmen seiner Diplomarbeit [Bae98] am Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung entwickelt hat.

Mein Dank gilt dem Institut für Informatik, das mir die Möglichkeit zur Promotion bot, insbesondere meinem Doktorvater Prof. Dr. F.–E. Wolter für die wissenschaftliche Betreuung der vorliegenden Arbeit. Für seine Mühen bei der Begutachtung der Dissertation sei Prof. Dr. G. Mühlbach vielmals gedankt. Nicht vergessen darf ich an dieser Stelle, Oliver Sniehotta und Moritz Baer für ihre Mitarbeit an diesem Forschungsprojekt, sowie für die Durchsicht und Korrektur des Manuskripts ganz herzlich zu danken. Für ihre stets fachkundige Unterstützung möchte ich ferner der Systemadministration am Lehrstuhl Graphische Datenverarbeitung, insbesondere Oliver Guntermann, Dirk Hillbrecht und Sebastian Cramer danken. Stellvertretend für alle meine Freunde, die mich selbst in der „heißen Phase“ der Promotion ertragen haben, sage ich Stephanie Sust und Lennart Betz: *Tausend Dank!*

## Kapitel 2

# Differentialgeometrische Grundlagen

### 2.1 Elementare Eigenschaften parametrischer Freiformflächen

In diesem ersten Abschnitt werden Schreibweisen und Eigenschaften parametrischer Flächen und Flächenkurven vorgestellt, die im Laufe der Arbeit benutzt werden. Es handelt sich hierbei um etablierte Ergebnisse, wie sie in jedem Lehrbuch über Differentialgeometrie zu finden sind. Sie wurden in diese Arbeit aufgenommen, um einerseits die im weiteren Verlauf benutzten Schreibweisen einzuführen, sowie andererseits Lesern, die keine differentialgeometrischen Vorkenntnisse besitzen, die Lektüre des Materials zu erleichtern. Zur weiteren Vertiefung der hier angesprochenen Sachverhalte verweisen wir auf die Bücher von Blaschke und Leichtweiß [BL73], do Carmo [dC76], Stoker [Sto69] und Spivak [Spi79a], [Spi79b].

Alle Methoden und Konzepte, die in der vorliegenden Arbeit vorgestellt werden, behandeln reguläre parametrische Flächen. Darunter versteht man eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$ , so daß für jeden Punkt  $\mathbf{p} \in S$  eine Umgebung  $\mathbf{p} \in V \subset \mathbb{R}^3$  und eine Abbildung  $\mathbf{r} : U \rightarrow V \cap S$  einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  existiert, so daß die folgenden Eigenschaften gelten:<sup>1</sup>

- (1) Die Abbildung  $\mathbf{r}$  ist differenzierbar.
- (2)  $\mathbf{r}$  ist ein Homöomorphismus.
- (3) Für jedes  $\mathbf{q} \in U$  hat das Differential  $d\mathbf{r}_{\mathbf{q}}$  den Rang Zwei.

Die Abbildung  $\mathbf{r}$  wird üblicherweise (*lokale*) *Parametrisierung* oder *System (lokaler) Koordinaten* der Fläche  $S$  in einer Umgebung um  $\mathbf{p}$  genannt. Der Definitionsbereich  $U$  von  $\mathbf{r}$  wird häufig auch  $(u, v)$ -*Parameterraum* von  $S$  genannt. Folgerichtig schreibt man die Abbildung

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$$

mit Koordinatenfunktionen  $x, y, z$ , die von Parametern  $(u, v) \in U$  abhängen.

Während die erste Bedingung an die Parametrisierungsabbildung  $\mathbf{r}$  in gewisser Weise garantiert, daß man einen Begriff von Ableitung und Tangentialität auf bzw. zu der Fläche  $S$  hat, gewährleistet Bedingung 2, daß  $S$  keine Selbstdurchdringungen besitzt. Wenn man von der Parametrisierungsabbildung Differenzierbarkeit fordert, so meint man damit in der Regel beliebig

---

<sup>1</sup>Vektoren und vektorwertige Funktionen werden im Laufe der Arbeit stets in Fettdruck gesetzt werden, wohingegen für skalare Werte Standardschrift benutzt werden wird. Beispielsweise bezeichnet  $\mathbf{N}$  einen Vektor und  $N$  einen Skalar.

oft differenzierbar. Da in der Geometrischen Modellierung überwiegend mit Spline-Flächen, also stückweise polynomialen Flächen gearbeitet wird, ist diese Bedingung in jedem Segment der Fläche erfüllt. An den Segmentübergängen kann man nur eine geringere Stetigkeitsordnung verlangen. Man spricht in solchen Fällen von  $C^p$ -stetigen Flächen. Üblich sind hierbei  $p = 1$  (Tangentenstetigkeit) und  $p = 2$  (Krümmungsstetigkeit). Die dritte Eigenschaft kann man unter Benutzung der partiellen Ableitungen  $\mathbf{r}_u := (\partial/\partial u)\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_v := (\partial/\partial v)\mathbf{r}$  äquivalent durch die Forderung ersetzen, daß  $r_u$  und  $r_v$  in jedem Punkt  $\mathbf{p} \in S$  linear unabhängig sein sollen. Dies garantiert die Existenz der (eindeutig bestimmten) Tangentialebene  $T_p(S)$  in jedem Punkt  $\mathbf{p}$  von  $S$ .

Im allgemeinen benötigt man mehrere Parametrisierungsabbildungen, um die gesamte Fläche  $S$  zu überdecken. Als typisches Beispiel für diesen Sachverhalt kann die Sphäre angesehen werden, für die man mindestens zwei Parametrisierungen benötigt. Für die berechnende Differentialgeometrie, um die es in dieser Arbeit überwiegend gehen wird, nimmt man üblicherweise an, daß die Fläche nur durch eine einzige Abbildung parametrisiert wird. Auch wenn streng genommen Flächen wie die Sphäre durch diese Annahme ausgenommen werden, stellt diese Voraussetzung keine ernste Einschränkung dar. Zum einen deckt sich diese Annahme mit den Anforderungen aus der Anwendung (der Geometrischen Modellierung), bei der meist Flächen, die homöomorph zur Ebene sind, konstruiert werden. Andererseits können die verbleibenden Flächen (d.h. kompakte Flächen ohne Rand) durch Entfernen von Nullmengen wieder durch nur eine Parametrisierungsabbildung dargestellt werden. So kann zum Beispiel die Sphäre mit Ausnahme des Nord- und Südpols als Rotationsfläche parametrisiert werden.

Eine parametrische Flächenkurve  $\alpha \subset S$  wird üblicherweise durch ihre Parameterraumkurve  $(u(t), v(t))^T$  repräsentiert, d.h. man schreibt sie in der Form

$$\alpha(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Mit Hilfe dieser Darstellung ergibt sich der Tangentenvektor einer Flächenkurve im Parameterwert  $t = t_0$  in der Form

$$\alpha'(t_0) = u'(t_0) \mathbf{r}_u(u(t_0), v(t_0)) + v'(t_0) \mathbf{r}_v(u(t_0), v(t_0)),$$

also als Linearkombination der partiellen Ableitungen  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$ , die den Tangentialraum  $T_p(S)$  nach obiger Definition regulärer Flächen aufspannen. Wenn es durch den Kontext klar ist, welche Parameterwerte zu benutzen sind, werden wir solche Ausdrücke in der Kurzform  $\alpha' = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$  schreiben. Eine (Flächen-)Kurve heißt *regulär*, wenn ihre erste Ableitung für alle Parameterwerte nicht trivial ist, d.h. wenn  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$  für alle  $t$  gilt. Reguläre Kurven haben die Eigenschaft, daß man stets eine Umparametrisierung vornehmen kann, so daß bzgl. des neuen Parameters, den wir mit  $s$  bezeichnen wollen,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

gilt. Kurven, die diese Eigenschaft besitzen, nennt man nach ihrer *Bogenlänge* parametrisiert. Der Grund für diese Bezeichnung liegt darin, daß die Bogenlänge (d.h. die Entfernung, die man zum Zeitpunkt  $t$  seit  $t_0$  auf dem Weg längs der Spur der betrachteten Kurve zurückgelegt hat) durch

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

berechnet werden kann. Bei bogenlängenparametrisierten Kurven entspricht der Parameter  $s$  demnach exakt der zurückgelegten Strecke.

Viele wichtigen geometrischen Begriffe der lokalen Geometrie der betrachteten Fläche können in Termen der ersten und zweiten Fundamentalform von  $S$  ausgedrückt werden. Bei beiden handelt

es sich um Quadratformen, die auf der Tangentialebene  $T_p(S)$  definiert sind. Wählt man die Vektoren  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$  als Basis des Tangentialraums, so ist der Wert der *ersten Fundamentalform*  $I(\mathbf{w})$  für einen tangentialen Vektor  $\mathbf{w} \in T_p(S)$  in der Darstellung  $\mathbf{w} = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$  durch

$$I(\mathbf{w}) = E (u')^2 + 2F u' v' + G (v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

gegeben. Die reellen Zahlen  $E$ ,  $F$  und  $G$  nennt man die *Koeffizienten der ersten Fundamentalform*. In der gewählten Basis entsprechen sie den Werten

$$E := \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F := \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G := \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle.$$

Die zugehörige Matrix nennt man *erste Fundamentalmatrix*. Sie ist eine symmetrische, positiv definite Matrix, mit deren Hilfe man ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  auf dem Tangentialraum  $T_p(S)$  durch

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} \right\rangle_p := \left\langle \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eingeführt. Der untere Index  $p$  bei dem eben eingeführten Skalarprodukt soll darauf hinweisen, daß das Skalarprodukt von dem betrachteten Flächenpunkt abhängt. Im folgenden werden wir jedoch häufig auf diesen expliziten Hinweis verzichten.

Die erste Fundamentalform liefert einen Zusammenhang zwischen der Tangentenlänge einer Flächenkurve  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  und der Tangente der zugehörigen Parameterraumkurve. Es gilt nämlich

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t_0)\|^2 = I(\boldsymbol{\alpha}'(t_0)) = E (u'(t_0))^2 + 2F u'(t_0) v'(t_0) + G (v'(t_0))^2.$$

Ferner kann die erste Fundamentalform dazu benutzt werden, um den Schnittwinkel zweier Flächenkurven in Termen der zugehörigen Parameterraumkurven auszudrücken. Sind nämlich  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\boldsymbol{\beta}$  zwei Flächenkurven mit Parameterraumkurven  $(u_\alpha(t), v_\alpha(t))^T$  bzw.  $(u_\beta(t), v_\beta(t))^T$ , die sich zum Zeitpunkt Null schneiden (d.h. es gelte  $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\beta}(0)$ ), so gilt für den Zwischenwinkel  $\phi$  der zugehörigen Tangenten beider Kurven

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(0)\| \|\boldsymbol{\beta}'(0)\| \cos(\phi) = \langle \boldsymbol{\alpha}'(0), \boldsymbol{\beta}'(0) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_\alpha(0) \\ v_\alpha(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_\beta(0) \\ v_\beta(0) \end{pmatrix} \right\rangle_p.$$

Die zweite Fundamentalform  $II(\mathbf{w})$  hat bezüglich der Basis  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  von  $T_p(S)$  die Gestalt

$$II(\mathbf{w}) = L (u')^2 + 2M u' v' + N (v')^2,$$

wobei die sogenannten *Koeffizienten der zweiten Fundamentalform* durch die Identitäten

$$L := \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uu} \rangle, \quad M := \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uv} \rangle, \quad N := \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{vv} \rangle$$

gegeben sind. Die Vektoren  $\mathbf{r}_{uu}$ ,  $\mathbf{r}_{uv}$  und  $\mathbf{r}_{vv}$  stehen für die zweiten partiellen Ableitungen der Flächenparametrisierung. Der in diesen Gleichungen auftretende Vektor  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3$  ist die *Flächennormale* der Fläche  $S$ . Dieser Vektor der Länge Eins besitzt die Eigenschaft, daß er orthogonal zur Tangentialebene  $T_p(S)$  ist. Üblicherweise wird er daher durch die Identität

$$\mathbf{N} := \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|}$$

eingeführt. (Diese Definition ist nicht unbedingt zwingend; man könnte mit gleichem Recht den zu  $\mathbf{N}$  negativen Vektor als Normale einführen.) Hierbei steht der Operator „ $\wedge$ “ für das Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$ . Wie bei der ersten Fundamentalform kann man die durch die zweite Fundamentalmatrix induzierte symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum betrachten. Obwohl dies einen leichten Mißbrauch der Schreibweise darstellt, bezeichnen wir diese Bilinearform mit

$$II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \left\langle \mathbf{v}, \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \mathbf{w} \right\rangle$$

für alle tangentialen Vektoren  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$ .

Um die geometrische Bedeutung der zweiten Fundamentalform zu erläutern, müssen zunächst einige Bemerkungen zur Krümmung dreidimensionaler Raumkurven gemacht werden. Die Flächenkurve  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  kann gleichzeitig als Kurve des umliegenden dreidimensionalen Raumes interpretiert werden. Daher ist es sinnvoll, für eine reguläre Kurve  $\boldsymbol{\alpha}$  den sogenannten *Krümmungsvektor*  $\mathbf{k}$  von  $\boldsymbol{\alpha}$  zu betrachten. Er ist durch die Formel

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2} \boldsymbol{\alpha}''(t) - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t) \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^4} \boldsymbol{\alpha}'(t) \quad (2.1)$$

gegeben. Da im Fall einer bogenlängenparametrisierten Kurve die Vektoren der ersten beiden Ableitungen orthogonal zueinander sind, entspricht die zweite Ableitung der Kurvenparametrisierung dem Krümmungsvektor, d.h. es gilt in diesem Fall  $\mathbf{k} = \boldsymbol{\alpha}''$ . Ferner ist erwähnenswert, daß der Vektor der Länge Eins in Richtung des Krümmungsvektors *Kurvennormale* genannt wird und in dieser Arbeit mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet wird. Die Kurvenkrümmung der Raumkurve  $\boldsymbol{\alpha}$  zum Zeitpunkt  $t$  ist nach Definition die Länge des Kurvenkrümmungsvektors  $\mathbf{k}$ . Wir reservieren den Buchstaben  $k$  für diesen Krümmungswert. Nach dieser Setzung gilt also stets  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ . Aus Gleichung (2.1) leitet man

$$k(t) = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}'(t) \wedge \boldsymbol{\alpha}''(t)\|}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} \quad (2.2)$$

als Formel für die Kurvenkrümmung einer regulären Raumkurve ab.

Nach Definition der Krümmung einer Raumkurve gilt stets  $k \geq 0$ . Im Fall einer ebenen Kurve ist es häufig günstig, eine vorzeichenbehaftete Kurvenkrümmung zu erklären. Bezeichnet man die vorgegebenen Koordinatenvektoren der Ebene mit  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ , so führt man die Kurvennormale  $\mathbf{n}(t)$  (abweichend zu der Vorgehensweise, wie sie im letzten Absatz beschrieben wurde) als den eindeutig bestimmten, zur Kurventangente  $\boldsymbol{\alpha}'(t)$  orthogonalen Vektor der Länge Eins ein, so daß das System  $\{\boldsymbol{\alpha}'(t), \mathbf{n}(t)\}$  dieselbe Orientierung wie  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  besitzt. Man sieht leicht, daß diese Kurvennormale  $\mathbf{n}(t)$  und der oben eingeführte Krümmungsvektor  $\mathbf{k}(t)$  kollineare Vektoren sind. Die Krümmung ebener Kurven  $k$  definiert man analog durch die Identität  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , in der allerdings die eben definierte Kurvennormale  $\mathbf{n}$  benutzt wird. Offenbar stimmt der Betrag dieses Krümmungswertes mit dem Krümmungswert überein, den man durch Einbettung der ebenen Kurve in den  $\mathbb{R}^3$  erhält. Der Vorteil dieser Definition besteht darin, daß man anhand des Vorzeichens der Ebenenkrümmung  $k$  unterscheiden kann, ob  $\boldsymbol{\alpha}$  zum Zeitpunkt  $t$  eine Links- oder eine Rechtskurve (bezüglich der durch  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  induzierten Orientierung) beschreibt. Im ersten Fall ergibt sich ein positiver, im zweiten ein negativer Krümmungswert. Aus Gleichung (2.2) ergibt sich im Fall einer positiv orientierten Basis des  $\mathbb{R}^2$  die Formel

$$k(t) = \frac{\det(\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t))}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^3} \quad (2.3)$$

für die Kurvenkrümmung regulärer ebener Kurven.

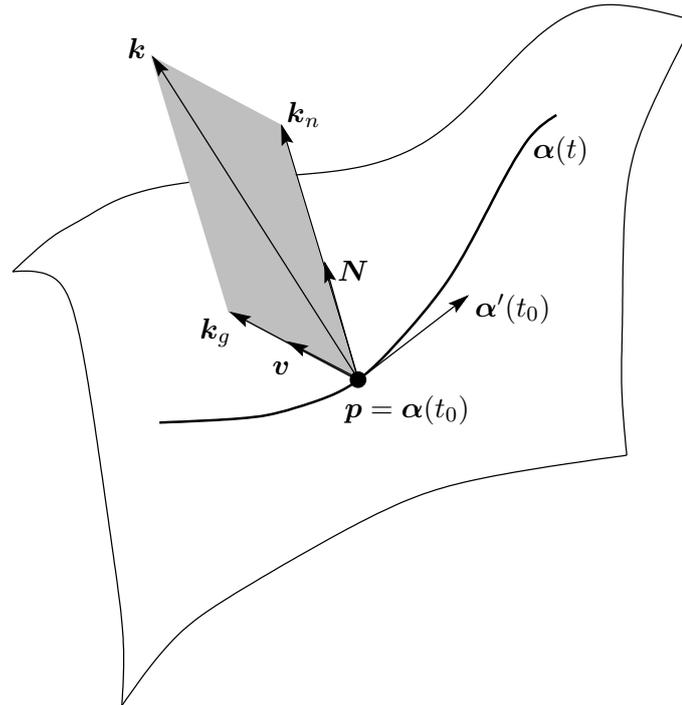


Abbildung 2.1: Normalkrümmung und Geodätische Krümmung einer Flächenkurve

Nachdem wir die Flächenkurve  $\alpha$  im vorletzten Absatz als Raumkurve betrachtet haben, können wir ihre Krümmungseigenschaften im Punkt  $p = \alpha(t_0)$  aus der Sicht der Fläche  $S$  studieren. Dafür zerlegen wir den Krümmungsvektor  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t_0)$  in seinen tangentialen und normalen Anteil, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{v} \quad (2.4)$$

(siehe Abbildung 2.1). Dabei ist  $\mathbf{v} \in T_p(S)$  der eindeutig bestimmte tangentialen Vektor der Länge Eins, der orthogonal zur Kurventangente  $\alpha'(t_0)$  ist, so daß die Vektoren  $\alpha'(t_0)$ ,  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{N}$  ein positiv orientiertes lokales Koordinatensystem bilden. Der Anteil  $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_n(t_0)$  in Richtung der Flächennormale  $\mathbf{N}$  wird *Normalkrümmungsvektor*, der tangentiale Anteil *Geodätischer Krümmungsvektor* von  $\alpha$  genannt. Ihre (vorzeichenbehafteten) Längen  $\kappa_n = \kappa_n(t_0)$  bzw.  $\kappa_g = \kappa_g(t_0)$  werden *Normalkrümmung* bzw. *Geodätische Krümmung* genannt. Interessanterweise hängt der Wert von  $\kappa_n$  nur von der Richtung  $\alpha'(t_0)$  der betrachteten Flächenkurve ab, nicht aber von dem weiteren Verlauf oder der Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve (also auch nicht von der Tangentenlänge  $\|\alpha'(t_0)\|$ ). Diese Tatsache kennt man unter dem Namen *Satz von Meusnier* (vgl. [dC76], S. 142 ff.). Daher spricht man bei  $\kappa_n$  von der *Normalkrümmung der Fläche  $S$*  in Richtung von  $\alpha'$ . Anders bei der Geodätischen Krümmung: Bei ihr spielt der weitere Verlauf der Kurve eine Rolle.

Betrachtet man nun den Wert der zweiten Fundamentalform für einen Tangentialvektor  $\mathbf{w}$  der Länge Eins, so stellt sich heraus, daß der resultierende Wert  $II(\mathbf{w})$  der Normalkrümmung der Fläche  $S$  in Richtung von  $\mathbf{w}$  entspricht. Dies liefert die angekündigte geometrische Bedeutung der zweiten Fundamentalform. Betrachtet man die Normalkrümmung  $\kappa_n$  für alle tangentialen Richtungen der Länge Eins (Einheitskreis im Tangentialraum  $T_p(S)$ ), so muß  $II(\mathbf{w})$  als stetige Funktion auf dieser kompakten Menge ihr Minimum und ihr Maximum annehmen. Da die zweite Fundamentalform eine Quadratform ist, gibt es zwei, nicht notwendigerweise verschiedene Extremwerte  $\kappa_{\min}$  und  $\kappa_{\max}$ , die sogenannten *Hauptkrümmungen*. Die zugehörigen tangentialen

Richtung werden *Hauptkrümmungsrichtungen* von  $S$  in  $\mathbf{p}$  genannt. Mit Hilfe der Hauptkrümmungen führt man zwei weitere Krümmungsbegriffe einer parametrischen Fläche  $S$  ein. Die *Gaußkrümmung*  $K$  der Fläche im Punkt  $\mathbf{p}$  ist definiert als das Produkt der beiden Hauptkrümmungen, die *Mittlere Krümmung*  $H$  ist das arithmetische Mittel beider Hauptkrümmungswerte. Man setzt also

$$K = \kappa_{\min} \kappa_{\max} \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2} (\kappa_{\min} + \kappa_{\max}).$$

Um die eben eingeführten Krümmungsbegriffe einer Fläche auszurechnen, kann man sich wieder der Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform bedienen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \kappa_{\min} &= H - \sqrt{H^2 - K}, & \kappa_{\max} &= H + \sqrt{H^2 - K}, \\ K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, & H &= \frac{2FM - EN - GL}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Um die geometrische Bedeutung der Gaußkrümmung besser einschätzen zu können, betrachtet man üblicherweise die sogenannte *Gaußabbildung*  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedem Flächenpunkt  $\mathbf{p} \in S$  der orientierbaren Fläche  $S$  die zugehörige Flächennormale  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  zuordnet. Da die Normale ein Vektor der Länge Eins ist, gilt  $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ , wobei  $S^2$  die Einheitskugel bezeichnet. Studiert man nun das Verhalten der Gaußabbildung unter infinitesimal kleiner Variation von  $\mathbf{p}$ , so führt dies zum Differential  $d\mathbf{N}_p$  der Gaußabbildung, welches das Veränderungsverhalten des Normalenvektors in  $\mathbf{p}$  und damit der durch  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  bestimmten Tangentialebene  $T_p(S)$  beschreibt. Dies zeigt die Bedeutung von  $d\mathbf{N}_p$  im Hinblick auf die Krümmung von  $S$  in  $\mathbf{p}$ .

Das Differential der Gaußabbildung ist nun eine lineare Abbildung von  $T_p(S)$  nach  $T_{\mathbf{N}(\mathbf{p})}(S^2)$ . Da nun beide Tangentialebenen parallel zueinander sind, kann man  $d\mathbf{N}_p$  als lineare Abbildung von  $T_p(S)$  auf sich interpretieren. Betrachtet man nun eine durch Vorgabe einer regulären Flächenkurve  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  mit der Eigenschaft  $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$  bestimmte Richtung der Variation von  $\mathbf{p}$ , so erhält man die zugehörige Richtungsableitung von  $\mathbf{N}(t) := \mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}(t))$  bezüglich des durch  $\mathbf{r}$  induzierten Koordinatensystems

$$d\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}') = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v'$$

für  $t = 0$ . Da die Vektoren  $\mathbf{N}_u$  und  $\mathbf{N}_v$  Element der Tangentialebene  $T_p(S)$  sind, kann man

$$\mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{r}_u + a_{21} \mathbf{r}_v \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{r}_u + a_{22} \mathbf{r}_v \tag{2.5b}$$

schreiben. Diese Beziehungen sind als *Gleichungen von Weingarten* bekannt. Die reellen Zahlen  $a_{ik}$  sind die Koeffizienten des Differentials der Gaußabbildungen bezüglich des lokalen Koordinatensystems  $\mathbf{r}_u$  und  $\mathbf{r}_v$  von  $T_p(S)$ ; sie liefern die Darstellung von  $d\mathbf{N}_p$  als Matrix  $(a_{ik})_{i,k=1,2}$ . Diese Matrixeinträge können mit Hilfe der Formeln

$$a_{11} = \frac{MF - LG}{EG - F^2} \tag{2.6a}$$

$$a_{12} = \frac{NF - MG}{EG - F^2} \tag{2.6b}$$

$$a_{21} = \frac{LF - ME}{EG - F^2} \tag{2.6c}$$

$$a_{22} = \frac{MF - NE}{EG - F^2} \tag{2.6d}$$

in Termen der Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalformen ausgedrückt werden. Der Vollständigkeit zu Liebe sei erwähnt, daß die Gaußkrümmung der Determinante dieser Matrix  $K = \det(a_{ik})$  entspricht. Ferner sind die Hauptkrümmungen die negativen Eigenwerte und die Mittlere Krümmung ist die negative Hälfte der Spur der Matrix.

Die oben eingeführten Flächenkrümmungsbegriffe wurden alle mit Hilfe des Begriffes der Normalkrümmung einer tangentialen Richtung eingeführt. Die Geodätische Krümmung der Flächenkurve  $\alpha$  spielte dabei keine Rolle. Da sich diese durch Projektion des Kurvenkrümmungsvektors  $\mathbf{k}$  in die Tangentialebene  $T_p(S)$  ergab, kann man die Geodätische Krümmung als die Kurvenkrümmung von  $\alpha$  aus Sicht eines Bewohners der Fläche  $S$  deuten, der keine Kenntnis von dem umgebenden Raum  $\mathbb{R}^3$  besitzt. Um diese Interpretation zu konkretisieren, betrachte man eine Flächenkurve  $\alpha$  in einem beliebigen Kurvenpunkt  $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$ . In einer Umgebung  $U(\mathbf{p}) \subset S$  von  $\mathbf{p}$  ist die Projektion in die Tangentialebene  $T_p(S)$  längs der Flächennormalen  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  ein Diffeomorphismus. Das Bild der Flächenkurve  $\alpha \cap U(\mathbf{p})$  ist daher eine reguläre Kurve in der Tangentialebene. Man kann nun zeigen (siehe z.B. [BL73], S. 196), daß die Geodätische Krümmung von  $\alpha$  in  $\mathbf{p}$  mit der vorzeichenbehafteten Krümmung der projizierten Kurve im Punkt  $\mathbf{p}$  übereinstimmt (siehe auch Gleichung (2.3) für den Begriff der Krümmung ebener Kurven).

Spezielle Flächenkurven, die im Laufe unserer Untersuchungen immer mal wieder eine Rolle spielen werden, sind die sogenannten *Isoparameterlinien*. Sie ergeben sich, in dem man einen der beiden Parameter konstant wählt, also  $\mathbf{r}(u, v_0)$  zu einem konstantem Wert  $v_0$  und  $\mathbf{r}(u_0, v)$  zu konstantem  $u_0$  betrachtet. Die Tangenten dieser beiden Kurven entsprechen den Tangentialvektoren  $\mathbf{r}_v$  bzw.  $\mathbf{r}_u$ . Die zweiten Ableitungen der Isoparameterlinien sind keine Elemente des Tangentialraums, sie enthalten also einen Anteil in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{N}$ . Man kann diese zweiten Ableitungen  $\mathbf{r}_{uu}$  und  $\mathbf{r}_{vv}$ , sowie die gemischten zweiten partiellen Ableitung  $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$  bezüglich der Basis  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}$  des  $\mathbb{R}^3$  in der Form

$$\mathbf{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v + L_{11} \mathbf{N} \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_v + L_{12} \mathbf{N} \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{r}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{r}_v + L_{21} \mathbf{N} \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_v + L_{22} \mathbf{N} \quad (2.7d)$$

darstellen. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit dem Normalenvektor  $\mathbf{N}$  erhält man für die Koeffizienten des Normalenanteils

$$L_{11} = L, \quad L_{12} = L_{21} = M, \quad L_{22} = N,$$

also die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform von  $S$ . Die Koeffizienten  $\Gamma_{ij}^k$  des tangentialen Anteils werden *Christoffelsymbole* genannt. Sie sind reellwertige Funktionen der Veränderlichen  $u$  und  $v$ . Offenbar sind sie symmetrisch bezüglich ihres unteren Indexes, d.h. es gilt  $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ . Die Werte der Christoffelsymbole in einem beliebigen Flächenpunkt  $\mathbf{p}$  ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u \rangle \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u \rangle \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Bei diesem Gleichungssystem ist beachtenswert, daß die sechs Gleichungen in drei Paaren voneinander unabhängiger Gleichungen gruppiert werden können. Jede Gruppe aus zwei Gleichungen besitzt als Koeffizientenmatrix die erste Fundamentalmatrix, für die bekanntlich  $EG - F^2 \neq 0$  gilt (positive Definitheit). Daher ist das obige Gleichungssystem eindeutig lösbar. Auf die besondere Bedeutung der Christoffelsymbole werden wir im Laufe dieses Kapitels noch ausführlicher zu sprechen kommen.

## 2.2 Geodätische Kurven

Sind zwei Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  auf einer regulären Fläche  $S$  gegeben, so wird man an dem kürzesten Pfad, der diese beiden Punkte verbindet, interessiert sein. Allerdings ist bei dieser Aufgabenstellung zu beachten, daß diese kürzeste Verbindung nicht unbedingt existieren muß. Als einfachstes Beispiel für eine solche Situation kann etwa die Einheitssphäre betrachtet werden. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei verschiedenen Punkten hier ist (der kurze) Teil des Großkreises, der durch diese beiden Punkte eindeutig bestimmt ist. Locht man nun allerdings einen beliebigen Punkt dieses Teils des Großkreises aus der Einheitssphäre heraus, so existiert die kürzeste Verbindung zwischen den gegebenen Punkten nicht mehr als Pfad innerhalb der betrachteten Fläche.

Betrachtet man die Klasse der sogenannten *vollständigen Flächen* (vgl. [Spi79a], S. 460 ff.), so garantiert der Satz von Hopf und Rinow (siehe z.B. [Sto69] S. 221 ff. und [dC76] S. 333 ff.) die Existenz einer solchen kürzesten Verbindung zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ . Vollständige Flächen können dadurch charakterisiert werden, daß man jede sogenannte Geodätische Kurve (Geodätische Kurven werden im folgenden noch formal eingeführt) innerhalb der betrachteten Geometrie beliebig verlängern kann. Geodätische Kurven vollständiger Flächen spielen insbesondere im Hinblick auf diese Eigenschaft die Rolle, wie sie Geraden in der Euklidischen Ebene besitzen. Beispiele vollständiger Flächen liefern etwa alle kompakten Flächen ohne Rand, wie etwa Ellipsoiden, Tori, etc. Da man in der Geometrischen Modellierung üblicherweise beschränkte Flächensegmente betrachtet, die homoömorph zu einem Rechtecksbereich der Ebene sind, entspricht diese Kategorie von Flächen nicht dem Typ von Flächen, die in der Anwendung typischerweise gegeben sind. Daher werden wir im folgenden stets die Existenz der fraglichen kürzesten Verbindung explizit fordern.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Flächengeometrien mit sogenannten *Hindernissen* nicht bearbeitet werden. Hierbei werden Flächen studiert, aus denen offene Gebiete herausgenommen wurden. Betrachtet man z.B. die Euklidische Ebene ohne den offenen Einheitskreis, sowie die Punkte  $\mathbf{p} = (0, 2)^T$  und  $\mathbf{q} = (0, -2)^T$ , so ist die (nicht eindeutig bestimmte) kürzeste Verbindung beider Punkte keine Strecke, sondern die Vereinigung zweier Strecken und eines Halbkreises. Der Grund, warum dieser Fall ausgeschlossen wird, liegt in einer wichtigen Eigenschaft kürzester Verbindungen auf Flächen ohne Hindernisse: solche Pfade besitzen überall triviale geodätische Krümmung (siehe [dC76] S. 333 ff.).<sup>2</sup> Daher spielen Flächenkurven auf  $S$ , deren geodätische Krümmung überall Null ist, eine wichtige Rolle bei der Abstandsmessung auf regulären Flächen. Man definiert daher:

### Definition 2.2.1

Eine Flächenkurve  $\gamma(s)$  auf der parametrischen Fläche  $S$  heißt Geodätische Kurve, wenn ihre Geodätische Krümmung für jeden Parameter  $s$  Null ist.

<sup>2</sup>Im Fall von Flächengeometrien mit Hindernissen mit stückweise glattem Rand gilt immerhin, daß eine kürzeste Verbindung die Vereinigung von Randelementen und Kurvensegmenten trivialer Geodätischer Krümmung ist.

Unglücklicherweise ist nicht jede Geodätische Kurve, die die Punkte  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  verbindet, ein kürzester Pfad. Ein Gegenbeispiel liefert bereits die Sphäre im  $\mathbb{R}^3$ . Geodätische Kurven entsprechen in diesem Beispiel den Großkreisen der Sphäre. Zu zwei gegebenen Punkten  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ , die nicht antipodisch zueinander sind, gibt es einen eindeutig bestimmten Großkreis, der beide Punkte enthält. Der Großkreis wird durch die Lage von  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  in einen „kurzen“ und einen „langen“ Geodätischen Verbindungspfad unterteilt. Falls  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  antipodisch zueinander sind, gibt es sogar unendlich viele Großkreise, die die Punkte enthalten. Dies zeigt, daß kürzeste Verbindungen im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sind. Immerhin sind Geodätische Kurven im folgenden Sinn (lokal) eindeutig bestimmt.

### Lemma 2.2.2

Für jeden Punkt  $\mathbf{p}$  der regulären parametrischen Fläche  $S$  und jeden Vektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}(S)$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutig bestimmte Geodätische Kurve  $\gamma(s) \subset S$  mit  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so daß  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  und  $\gamma'(0) = \mathbf{w}$  gilt.

Die Aussage dieses Satzes kann mit anderen Worten wie folgt ausgedrückt werden: Für jeden Punkt  $\mathbf{p}$  der gegebenen Fläche und jeden (Richtungs-) Vektor der zugehörigen Tangentialebene existiert eine eindeutig bestimmte Geodätische Kurve (in einer hinreichend klein gewählten Umgebung von  $\mathbf{p}$ ), die im Punkt  $\mathbf{p}$  in Richtung  $\mathbf{w}$  und Geschwindigkeit  $\|\mathbf{w}\|$  startet. Einen Beweis dieses klassischen Ergebnisses findet man z.B. in [dC76] S. 254 ff.

Wie bereits oben erläutert gibt es Geodätische Kurven, die in globaler Hinsicht nicht distanzminimal sind. Die Aussage des folgenden Satzes besagt, daß Geodätische immerhin lokal kürzeste Verbindungen darstellen. Einen Beweis führt etwa [dC76] S. 292 ff.

### Lemma 2.2.3

Sei  $\mathbf{p}$  ein Punkt der Fläche  $S$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subset S$  von  $\mathbf{p}$ , so daß jede Geodätische  $\gamma : I \rightarrow U$  mit  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  eine kürzeste Verbindung zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\gamma(t_0) \in U$  für alle  $t_0 \in I$  ist.

Obwohl Hilfssatz 2.2.3 uns keine Information über den Ort gibt, wo Geodätische Kurven aufhören, distanzminimal zu sein, macht seine Aussage dennoch klar, daß Geodätische den Schlüssel zur Abstandsmessung auf regulären Flächen darstellen. Aus diesem Grund werden wir uns mit ihrer numerischen Berechnung beschäftigen. Für diesen Zweck werden wir Geodätische Kurven  $\gamma(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$  üblicherweise durch die zugehörige Kurve  $(u(s), v(s))$  im Parameterraum der Fläche  $S$  repräsentieren.

### Lemma 2.2.4

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre parametrische Fläche und  $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  ihre Parametrisierung. Die eindeutig bestimmte Geodätische Kurve  $\gamma(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ , die durch den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0) = \gamma(0) \in S$  in Richtung  $\mathbf{w} = u'_0 \mathbf{r}_u + v'_0 \mathbf{r}_v = \gamma'(0) \in T_{\mathbf{p}}(S)$  verläuft, genügt dem Differentialgleichungssystem

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \quad (2.9a)$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \quad (2.9b)$$

mit den Anfangswerten  $u(0) = u_0, v(0) = v_0$  (Position) und  $u'(0) = u'_0, v'(0) = v'_0$  (Richtung).

Ein Beweis von Hilfssatz 2.2.4 kann [dC76] S. 254 ff. entnommen werden. Das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (2.9) kann in das zugehörige System erster Ordnung transformiert werden. Dadurch erhält man

$$u'_1 = u_2 \quad (2.10a)$$

$$u'_2 = -\left(\Gamma_{11}^1 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^1 v_2^2\right) \quad (2.10b)$$

$$v'_1 = v_2 \quad (2.10c)$$

$$v'_2 = -\left(\Gamma_{11}^2 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^2 v_2^2\right). \quad (2.10d)$$

Die Werte der Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k$  können, wie im letzten Abschnitt erläutert, mit Hilfe des linearen Gleichungssystems (2.8) berechnet werden. Die meisten Standard-Pakete numerischer Software, wie z.B. die Programm-Sammlung der Numerical Algorithm Group (siehe [NAG89]), bieten etablierte Verfahren an, um solche Differentialgleichungssysteme wie in (2.10) zu lösen. Bei der numerischen Behandlung von (2.10) erhält man nicht nur Näherungswerte für die Parameter  $(u(s), v(s))$  der Geodätischen Kurve  $\gamma(s)$ . Die zugehörigen Ableitungen  $(u'(s), v'(s))$  der Parameterraumkurve werden ebenfalls approximiert.

Da sich unser Interesse nicht alleine auf die Berechnung Geodätischer Kurven beschränkt, wir vielmehr auch ihre Bogenlänge zur Abstandsmessung auf  $S$  benötigen, müssen wir eine Beziehung zwischen dem Kurvenparameter  $s$  und der Geodätischen Bogenlänge finden. Den Schlüssel hierzu liefert die folgende Beobachtung (vgl. [dC76] S. 241 ff.).

### Lemma 2.2.5

*Jede Geodätische Kurve  $\gamma(s)$  besitzt Tangenten konstanter Länge. Der Kurvenparameter  $s$  ist daher proportional zur der Bogenlänge von  $\gamma$ .*

Als direkte Folgerung aus Hilfssatz 2.2.5 stellen wir fest, daß man durch Lösen von System (2.10) bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurven berechnen kann. Wenn die Anfangswerte  $u'_0$  und  $v'_0$  des Richtungsvektors nämlich so gewählt werden, daß  $\|u'_0 \mathbf{r}_u + v'_0 \mathbf{r}_v\| = 1$  gilt, dann hat der Tangentenvektor  $\gamma'(s)$  der Geodätischen Lösungskurve die Länge Eins für alle Parameter  $s$ .

In den vorangegangenen Sätzen sind wir stets von beliebig oft differenzierbaren Flächenparametrisierungen ausgegangen. In der Geometrischen Modellierung werden überwiegend stückweise polynomiale Flächen verwendet, so daß in den Anwendungsgebieten, die uns interessieren, diese Voraussetzung (zumindest lokal) erfüllt ist. Bei diesem Flächentyp treten jedoch Segmentübergänge auf, an denen man lediglich  $C^p$ -Stetigkeit erwarten darf, wobei typischerweise  $p = 2$  oder höchstens  $p = 3$  ist. Geodätische Kurven sind, wie gesehen, Lösungen des Differentialgleichungssystems (2.9). Die dort auftretenden Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k$  ergeben sich wie in Abschnitt 2.1 erläutert aus den ersten und zweiten Ableitungen der Parametrisierungsabbildung  $\mathbf{r}$  von  $S$ . Im Fall einer  $C^2$ -stetigen Fläche sind die Christoffelsymbole als Funktion der Parameter  $u$  und  $v$  demnach zwar stetig, genügen im allgemeinen jedoch keiner Lipschitz-Bedingung. Daher erscheint es a priori fraglich, ob das Differentialgleichungssystem (2.9) in diesem Fall eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, d.h. ob der für uns zentrale Hilfssatz 2.2.2 für  $C^2$ -stetige Flächen weiterhin Gültigkeit besitzt. Schließlich fällt es nicht schwer, stetige Funktionen  $\Gamma_{ij}^k(u, v)$  so zu konstruieren, daß das System (2.9) nicht eindeutig lösbar ist. Es ist daher schon einigermaßen überraschend, daß diese Situation nicht eintreten kann, wenn die  $\Gamma_{ij}^k$  die Christoffelsymbole einer konkreten Fläche sind, also eine existierende Geometrie repräsentieren. Diese Aussage ist Inhalt des folgenden Satzes, den Hartman in [Har50] formuliert hat.

**Satz 2.2.6**

Für jeden Punkt  $\mathbf{p}$  der regulären parametrischen,  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$  und jeden Vektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}(S)$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutig bestimmte Geodätische Kurve  $\gamma(s) \subset S$  mit  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so daß  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  und  $\gamma'(0) = \mathbf{w}$  gilt.

**2.3 Vektorfelder und der Satz von Jacobi**

Um die Rolle der Christoffelsymbole besser zu verstehen, muß man den Begriff des Vektorfeldes einer regulären Fläche einführen. Grob gesprochen handelt es sich hierbei um Abbildungen, wie sie Bewohner der betrachteten Fläche  $S$ , die keine Kenntnis des umgebenden Raums besitzen, einführen würden.

**Definition 2.3.1**

Sei  $U \subset S$  eine offene Teilmenge einer regulären Fläche  $S$ . Eine Abbildung, die jedem Punkt  $\mathbf{p} \in U$  einen Vektor  $\mathbf{w}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}(S)$  des zugehörigen Tangentialraums zuordnet, heißt Vektorfeld von  $U$ . Wenn für eine gegebene Parametrisierung  $\mathbf{r}(u, v)$  der Umgebung  $U$  die Koeffizientenfunktionen  $a(u, v)$  und  $b(u, v)$  der Darstellung

$$\mathbf{w}(\mathbf{p}) = a(u, v) \mathbf{r}_u(u, v) + b(u, v) \mathbf{r}_v(u, v) \quad \text{für } \mathbf{p} = \mathbf{r}(u, v)$$

differenzierbare Funktionen sind, so heißt  $\mathbf{w}(\mathbf{p})$  differenzierbares Vektorfeld.

Die herkömmliche Richtungsableitung eines differenzierbaren Vektorfeldes liefert einen dreidimensionalen Vektor, der i. a. einen Anteil in Richtung der Flächennormalen besitzt. Um einen Begriff von (Richtungs-) Ableitung aus Sicht der Fläche  $S$  einzuführen, ist dieser Normalenanteil hinderlich. Für eine parametrische Kurve  $\alpha(t)$  der Fläche  $S$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{w}(t)$  die Einschränkung des Vektorfeldes  $\mathbf{w}(\mathbf{p})$  auf die Kurve  $\alpha$ . Die Tangente dieser Flächenkurve entspricht der Richtung, in der die im folgenden eingeführte Ableitung betrachtet wird.

**Definition 2.3.2**

Sei  $\alpha(t)$  eine reguläre Kurve der Fläche  $S$  und  $\mathbf{w}(t)$  ein differenzierbares Vektorfeld längs  $\alpha$ . Die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $\mathbf{w}$  im Punkt  $\mathbf{p} = \alpha(t_0)$  ergibt sich durch Projektion des Vektors  $(d\mathbf{w}/dt)(t_0)$  auf die Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}(S)$  entlang der Normalen  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ . In Zeichen werde die kovariante Ableitung durch  $(D\mathbf{w}/dt)(t_0)$  beschrieben.

Geht man von der Darstellung

$$\mathbf{w}(t) = a(u(t), v(t)) \mathbf{r}_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \mathbf{r}_v(u(t), v(t))$$

des Vektorfeldes längs  $\alpha$  aus, so erhält man durch Bilden der herkömmlichen Ableitung, Einsetzen der Darstellungen der zweiten partiellen Ableitungen der Parametrisierung  $\mathbf{r}$  in Termen der Christoffelsymbole (vgl. Abschnitt 2.1) und Weglassen des Normalenanteils die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{w}}{dt} &= \left( a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{21}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v' \right) \mathbf{r}_u \\ &\quad + \left( b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{21}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v' \right) \mathbf{r}_v \end{aligned} \quad (2.11)$$

als expliziten Ausdruck für die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes längs  $\alpha$ .

Das in dieser Arbeit am meisten benutzte Vektorfeld entlang der Kurve  $\alpha$  wird das Feld ihrer Tangentenvektoren  $\mathbf{w}(t) = \alpha'(t)$  sein. Handelt es sich bei  $\alpha$  um eine reguläre Kurve, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie nach ihrer Bogenlänge parametrisiert vorliegt. Wie im Abschnitt 2.1 erläutert, entspricht in dieser Situation die erste Ableitung  $(d\mathbf{w}/dt)(t_0) = \alpha''(t_0)$  des Vektorfeldes dem Krümmungsvektor von  $\alpha$ . Da nach Definition 2.3.2 die kovariante Ableitung den tangentialen Anteil des Krümmungsvektors liefert, gilt die Beziehung

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t_0) = \kappa_g (\mathbf{N} \wedge \alpha'(t_0)).$$

An dieser Identität erkennt man den Zusammenhang zwischen kovarianter Ableitung und Geodätischer Krümmung einer Flächenkurve. Die Geodätische Krümmung ist (aus Sicht eines Flächenbewohners) die Krümmung der betrachteten Kurve. Für bogenlängenparametrisierte Kurven kann sie mit Hilfe der kovarianten Ableitung berechnet werden.

Aufgrund dieser Sichtweise kann man Geodätische Kurven äquivalent auch als jene Kurven charakterisieren, für die die Identität

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t_0) = \mathbf{0}$$

für alle  $t_0$  gilt. Ferner erhält man mit der Darstellung  $\gamma'(t) = u' \mathbf{r}_u + v' \mathbf{r}_v$  aus Gleichung (2.11) die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{D\gamma'}{dt} &= \left( u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + \Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right) \mathbf{r}_u \\ &\quad + \left( v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + \Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right) \mathbf{r}_v = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

aus der die Geodätischen Differentialgleichungen (vgl. Lemma 2.2.4) folgen.

Um Aussagen über Geodätische Kurven beweisen zu können, bedient man sich in der Differentialgeometrie häufig der Methode der *Variation der Bogenlänge*. Eine Übersicht dieses Gebiets liegt jenseits des innerhalb dieser knappen Einführung darstellbaren. Um jedoch ein für unsere Untersuchungen zentrales Ergebnis formulieren zu können, werden im folgenden die Begriffe „Variation“ und „Jacobi Feld“ eingeführt.

### Definition 2.3.3

Sei  $\alpha(s)$  mit  $s \in [0, l]$  eine Flächenkurve der regulären Fläche  $S$ , die nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist. Eine differenzierbare Abbildung  $\mathbf{h} : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{h}(s, 0) = \alpha(s)$  heißt Variation von  $\alpha$ .

### Definition 2.3.4

Sei  $\gamma(s)$  eine bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve auf  $S$  und  $\mathbf{h} : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  eine Variation von  $\gamma$ , die die zusätzliche Eigenschaft besitze, daß für jedes  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  die Kurve  $\mathbf{h}_{t_0}(s) = \mathbf{h}(s, t_0)$  eine Geodätische ist. Das zugehörige Vektorfeld  $(\partial \mathbf{h} / \partial t)(s, 0)$  wird ein Jacobi Feld längs  $\gamma$  genannt.

Zu beachten bei der vorangegangenen Definition ist, daß von der Kurve  $\mathbf{h}_{t_0}(s)$  nicht etwa verlangt wird, daß sie nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist. Der angekündigte Satz, der für die nachfolgenden Kapitel von großer Bedeutung sein wird, liefert eine analytische Charakterisierung von Jacobi Feldern. Einen Beweis findet man z.B. in [dC76], S. 357 ff.

**Satz 2.3.5**

Ein Vektorfeld  $\mathbf{w}(t)$  entlang einer Geodätischen Kurve  $\gamma$  ist genau dann ein Jacobi Feld, wenn es der Gleichung

$$\frac{D^2}{ds^2} \mathbf{w}(s) + K(s) (\gamma'(s) \wedge \mathbf{w}(s)) \wedge \gamma'(s) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

genügt. Dabei bezeichnet  $K(s)$  die Gaußsche Krümmung der Fläche  $S$  im Punkt  $\gamma(s)$ .

**2.4 Geodätische Polarkoordinaten**

Nach Hilfssatz 2.2.2 gibt es für jeden Punkt  $\mathbf{p} \in S$  und jeden tangentialen Vektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in T_p(S)$  eine eindeutig bestimmte Geodätische Kurve  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  mit  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  und  $\gamma'(0) = \mathbf{w}$ . Um die Abhängigkeit dieser Geodätischen von der tangentialen Startrichtung  $\mathbf{w}$  kenntlich zu machen, bietet es sich an, diese Kurve mit  $\gamma(t, \mathbf{w})$  zu bezeichnen. Aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt ferner die Beziehung

$$\gamma(t, \lambda \mathbf{w}) = \gamma(\lambda t, \mathbf{w}) \quad (2.13)$$

für alle reellen Zahlen  $\lambda > 0$ . Diese Geodätische ist dabei definiert für  $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ .

Als Konsequenz aus Identität (2.13) können wir folgende Konstruktion durchführen: Sei  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in T_p(S)$  ein tangentialer Vektor, so daß  $\gamma(\|\mathbf{w}\|, \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|) = \gamma(1, \mathbf{w})$  definiert ist. Wir führen die Abbildung

$$\exp_p(\mathbf{w}) := \gamma(1, \mathbf{w}) \quad (2.14)$$

ein. Anschaulich entspricht  $\exp_p(\mathbf{w})$  dem Ergebnis, das man erhält, wenn man einen geodätischen Weg der Länge  $\|\mathbf{w}\|$  ausgehend vom Punkt  $\mathbf{p}$  in tangentialer Richtung  $\mathbf{w}$  abträgt. Diese Interpretation ist nach Lemma 2.2.5 gerechtfertigt. Dieses besagte, daß jede Geodätische Tangenten konstanter Länge besitzt, also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Abbildung  $\exp_p$  wird klassischerweise *Exponentialabbildung* genannt. Der folgende Hilfssatz faßt ihre wichtigsten Grundeigenschaften zusammen (vgl. [dC76] S. 285 ff.).

**Lemma 2.4.1**

Zu einem gegebenen Punkt  $\mathbf{p} \in S$  gibt es ein  $\varepsilon := \varepsilon(\mathbf{p}) > 0$ , so daß die Exponentialabbildung

$$\exp_p : B_\varepsilon \subset T_p(S) \rightarrow S,$$

gegeben durch (2.14), im Inneren der  $\varepsilon$ -Kreisscheibe  $B_\varepsilon$  um den Ursprung der Tangentialebene definiert und differenzierbar ist. Darüberhinaus gibt es eine Umgebung  $U \subset B_\varepsilon$ , in der  $\exp_p : U \rightarrow \exp_p(U) \subset S$  ein Diffeomorphismus ist.

Hilfssatz 2.4.1 besagt, daß die Exponentialfunktion  $\exp_p$  in einer gewissen Umgebung der Tangentialebene  $T_p(S)$  stets definiert ist. Wie die Einheitskugel  $S^2$  zeigt, gibt es sogar Beispiele, in denen die Exponentialabbildung für alle Tangentialvektoren definiert ist. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Entfernen wir beispielsweise den zu  $\mathbf{p}$  antipodischen Punkt aus der Sphäre, so ist die Exponentialabbildung nur noch im Inneren des Kreises mit Radius  $\pi$  der Tangentialebene definiert.

Ausgehend von der Diffeomorphismus-Eigenschaft der Exponentialabbildung können wir ein beliebiges Koordinatensystem der Tangentialebene  $T_p(S)$  benutzen, um lokal ein neues Koordinatensystem der Fläche  $S$  in einer Umgebung von  $\mathbf{p}$  einzuführen. So können wir etwa Polarkoordinaten der Tangentialebene mit Hilfe der Exponentialabbildung dazu benutzen, eine Umgebung

eines Punktes aus  $S$  in Termen von Winkel und Radius zu beschreiben. Zu der gegebenen Parametrisierung  $\mathbf{r}$  der betrachteten Fläche und einem Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$  schreiben wir dazu einen Tangentialvektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in T_p(S)$  in der Form

$$\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \left( \cos(\theta) \frac{\mathbf{r}_u(u_0, v_0)}{\|\mathbf{r}_u(u_0, v_0)\|} + \sin(\theta) \mathbf{r}_u(u_0, v_0)^\perp \right).$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)^\perp$  den eindeutig bestimmten Tangentialvektor, der orthonormal zu  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$  ist, so daß die Vektoren  $\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_u(u_0, v_0)^\perp, N_p$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem bilden.

Umgekehrt existiert für jedes Tupel  $(\rho, \theta)$ , bestehend aus einem Radius  $\rho > 0$  und einem Winkel  $0 < \theta < 2\pi$ , ein eindeutig bestimmter Tangentialvektor  $\mathbf{w}(\rho, \theta)$  der Länge  $\rho$ . Um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, mußte hierzu die Halbgerade  $\lambda \mathbf{r}_u$  mit  $\lambda \geq 0$  ausgeschlossen werden. Bekanntermaßen ist dies jedoch recht willkürlich, da man jede beliebige Halbgerade ausgehend vom Ursprung herausnehmen kann. Damit kann man nun lokal eine neue Parametrisierung der „geschlitzten“ Fläche  $S - \{\gamma(t, \mathbf{r}_u) \mid t \geq 0\}$  durch

$$\mathbf{r}^p(\rho, \theta) := \exp_p(\mathbf{w}(\rho, \theta)) \quad (2.15)$$

definieren. Da die Exponentialabbildung nach Lemma 2.4.1 ein (lokaler) Diffeomorphismus ist, ist  $\mathbf{r}^p$  eine reguläre Parametrisierung der geschlitzten Fläche in einer Umgebung von  $\mathbf{p}$ . Das induzierte lokale Koordinatensystem bezeichnet man als *Geodätische Polarkoordinaten*. Da die Kompatibilitätsbedingungen wegen der Diffeomorphismeigenschaft der Exponentialabbildung erhalten bleiben, kann man die komplette Fläche  $S$  durch Umgebungen mit den Eigenschaften wie in Lemma 2.4.1 überdecken. Durch ein solches System Geodätischer Polarkoordinaten erhält man eine reguläre Parametrisierung  $\mathbf{r}$  der gesamten Fläche  $S$ .

### Lemma 2.4.2

*Sei  $\mathbf{r}$  ein System Geodätischer Polarkoordinaten. Dann genügen die Koeffizienten der zugehörigen ersten Fundamentalform den Beziehungen*

$$E(\rho, \theta) = 1, \quad F(\rho, \theta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho, \theta) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \sqrt{G(\rho, \theta)} \right] = 1.$$

Einen Beweis von Hilfssatz 2.4.2 findet man z.B. in [dC76], S. 287 oder auch [BL73] S. 199 ff. Die Aussagen von Lemma 2.4.2 lassen einige geometrische Interpretationen zu. Dazu betrachte man sich zunächst die Isoparameterlinien einer lokalen Parametrisierung  $\mathbf{r}^p$ . Für einen konstanten Winkel  $\theta_0$  erhält man die sogenannte *radiale Geodätische* ausgehend von dem Punkt  $\mathbf{p}$  in die durch  $\theta_0$  induzierte Richtung. Diese Richtung stimmt andererseits mit der partiellen Ableitung von  $\mathbf{r}^p$  nach dem Radius  $\rho$  überein. Darüberhinaus gilt die Gleichung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r}^p \right\|^2 = E(\rho, \theta).$$

Nach Definition der Exponentialabbildung (2.14) mißt der Parameter  $\rho$  die Bogenlänge längs der betrachteten Geodätischen. Daraus folgt die behauptete Identität  $E(\rho, \theta) = 1$ . Anschaulich bedeutet dies, daß radiale Geodätische nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sind.

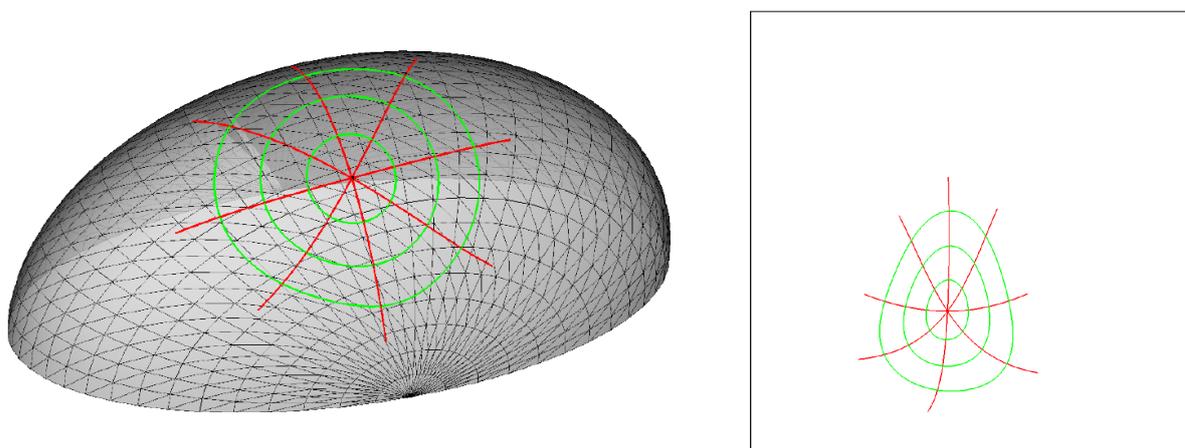


Abbildung 2.2: Geodätische Polarkoordinaten auf einem Ellipsoiden

**Definition 2.4.3**

Die Exponentialabbildung sei in einem Kreis  $B_\varepsilon \subset T_p(S)$  definiert. Für  $\rho_0 \leq \varepsilon$  heißt die Flächenkurve

$$\alpha_{\rho_0}(\theta) := \mathbf{r}^p(\rho_0, \theta), \quad \text{für } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Geodätische Offsetkurve (oder kurz Offset) des Punktes  $\mathbf{p}$  im Abstand  $\rho_0$ .

In der Literatur wird  $\alpha_{\rho_0}$  häufig *Geodätischer Kreis* mit Radius  $\rho_0$  genannt. Im Euklidischen Fall stimmen diese Kurven mit Kreisbögen um  $\mathbf{p}$  überein, was diese Namensgebung motiviert. Aus Gründen, die weiter unten dargestellt werden, wollen wir jedoch lieber von Geodätischen Offsets des Punktes sprechen, obwohl Offsetkurven auf Flächen weitere Eigenschaften besitzen, die uns an Euklidische Kreise denken lassen. Bevor wir auf diese weiter eingehen, sollen die eingeführten Begriffe an einem Beispiel veranschaulicht werden.

In Abbildung 2.2 werden die Geodätischen Polarkoordinaten im Beispiel eines dreiachsigen Ellipsoids

$$\mathbf{r}(u, v) := (a \cos(u) \sin(v), b \sin(u) \sin(v), -c \cos(v))^T \quad \text{für } 0 < u < 2\pi, 0 < v < \pi$$

dargestellt. Als axiale Radien wurden in diesem Beispiel  $a = 2$ ,  $b = 3/2$  und  $c = 1$  gewählt. Betrachtet wird ferner nur eine Hälfte des Ellipsoids, d.h. es wurden lediglich Parameter  $0 < u < \pi$  berücksichtigt. Die in roter Farbe eingezeichneten Geodätischen starten in dem Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(7/5, 1)$  in tangentialem Winkel  $\theta_k = 2\pi k/8$  für  $k = 0, 1, \dots, 7$ . Die drei grünen Kurven repräsentieren Geodätische Offsets, die im Geodätischen Abstand  $\rho_i = i/4$  für  $i = 1, 2, 3$  gezeichnet wurden. Die zugehörigen Parameterraumkurven bezüglich der Ausgangsparametrisierung  $\mathbf{r}$  sind in der rechten Hälfte der Abbildung dargestellt.

Abbildung 2.2 suggeriert, daß es sich bei der lokalen Karte  $\mathbf{r}^p$  um eine orthogonale Parametrisierung der Fläche handelt. Dies ist tatsächlich wahr. Die Gleichung

$$0 = F(\rho, \theta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r}^p, \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}^p \right\rangle$$

aus Lemma 2.4.2 besagt nämlich, daß radiale Geodätische und Geodätische Offsets sich im rechten Winkel schneiden. In dieser Beziehung verhalten sich Offsetkurven also genauso wie Kreise in der Euklidischen Ebene.

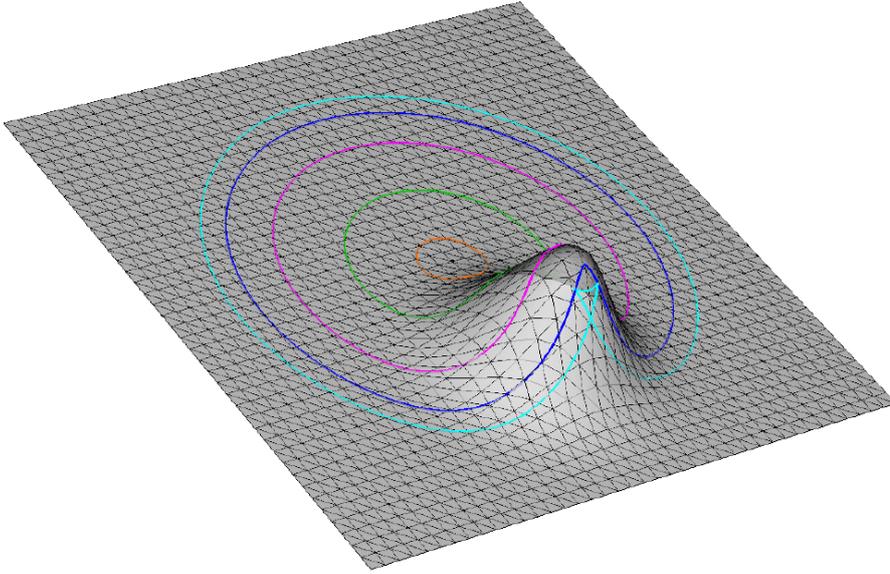


Abbildung 2.3: Geodätische Offsetkurven mit singulären Punkten auf einer Glockenfläche (I)

Die Tangentenlänge einer Geodätischen Offsetkurve im Abstand  $\rho$  ist durch den Koeffizienten

$$G(\rho, \theta) = \left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}^\rho \right\|$$

der ersten Fundamentalform gegeben. Im Euklidischen Fall entspricht die Tangentenlänge dem Radius des betrachteten Kreises. Dies kann man im Flächenfall nicht erwarten. Allerdings zeigen die Beziehungen

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho, \theta) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \sqrt{G(\rho, \theta)} \right] = 1$$

eine weitere Analogie zu Euklidischen Offsets (d.h. Kreisbögen um  $\mathbf{p}$ ) auf. Die Tangentenlänge bei Geodätischen Offsetkurven strebt für  $\rho \rightarrow 0$  ebenfalls gegen Null (erste Gleichung). In der Nähe des Mittelpunkts  $\mathbf{p}$  des Geodätischen Offsets entspricht die Tangentenlänge gemäß der zweiten Gleichung in etwa dem zugehörigen Geodätischen Abstand, mit anderen Worten dem Geodätischen Radius, wenn man sich Offsets als Geodätische Kreise vorstellt.

Neben den Gemeinsamkeiten zwischen Geodätischen Offsetkurven eines Punktes und Euklidischen Kreisen gibt es jedoch auch eine Reihe Phänomene, die ausschließlich bei der Offsetbildung auf Flächen auftreten können. Beispielsweise kann die Geodätische Offsetkurve  $\alpha_{\rho_0}(\theta)$  singuläre Punkte besitzen. (Nach der Definition der Geodätischen Polarkoordinaten  $\mathbf{r}^\rho$  in (2.15) und der Definition der Offsetkurve in 2.4.3 ist dies genau dann der Fall, wenn das Differential der Exponentialabbildung keinen vollen Rang hat.) Ein Beispiel für dieses Phänomen liefert die Fläche

$$\mathbf{r}(u, v) := \left( u, v, h \exp \left( -w(u^2 + v^2) \right) \right)^T \quad \text{für } u, v \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

die in Abbildung 2.3 zu sehen ist. Es handelt sich um eine Gaußsche Glockenfläche, parametrisiert durch eine Höhenfunktion der Veränderlichen  $u$  und  $v$ . Ihre Geometrie entspricht beinahe überall annähernd der der Euklidischen Ebenen, mit Ausnahme eines Hügels, der sich für  $u = 0 = v$  in Höhe  $h$  erhebt. Der Öffnungsradius der Glocke wird durch die Konstante  $w$  gesteuert. Je größer  $w$  gewählt wird, desto enger ist die Öffnung der Glocke.

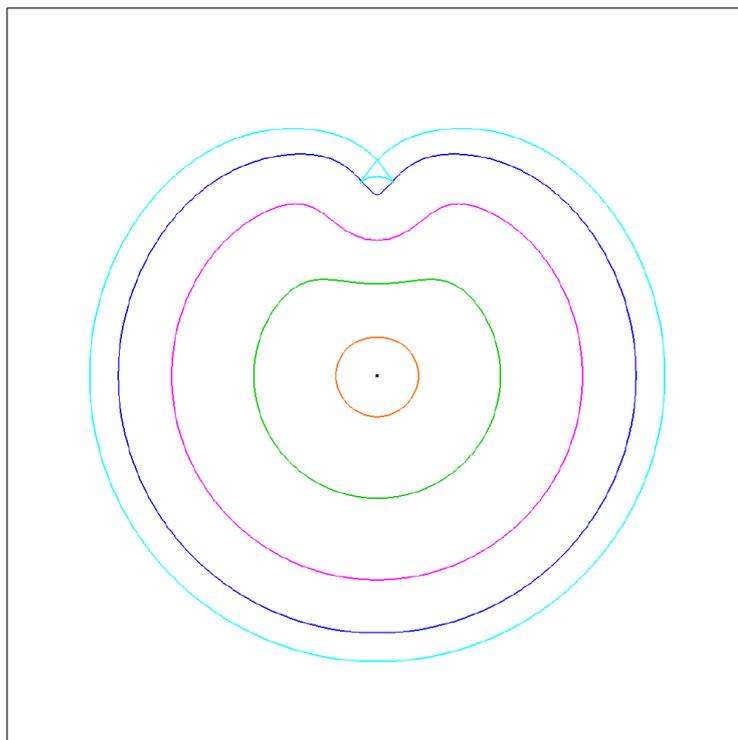


Abbildung 2.4: Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 2.3

Die eingezeichneten Offsetkurven wurden um den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0, -2)$  in Abständen  $\rho \in \{1/2, 3/2, 5/2, 3.15, 7/2\}$  berechnet. Der Abstand  $\rho = 3.15$  entspricht in etwa dem Abstand, in dem die zugehörige Offsetkurve zum ersten mal einen singulären Punkt besitzt. Dies äußert sich durch eine Spitze in der Spur der blauen Flächenkurve. Diese Spitze erkennt man besser in der zugehörigen Parameterraumkurve, die in Abbildung 2.4 ebenfalls blau eingezeichnet wurde. Für größere Abstände besitzen die Offsetkurven sogar zwei singuläre Punkte. Der magentafarbene Offset in Abstand  $\rho = 7/2$  ist ein Beispiel hierfür. Insbesondere erkennt man, daß Geodätische Offsetkurven eines Punktes Selbstüberschneidungen besitzen können. Solche singulären Punkte werden in der Literatur *konjungierte Punkte* von  $\mathbf{p}$  genannt. Wir werden dieser Art von Punkten in einem allgemeineren Zusammenhang in Kapitel 3.1 unter dem Namen *Fokalpunkt* wieder begegnen.

Wie bereits oben erwähnt, sind Geodätische Kurven nicht notwendigerweise kürzeste Wege. Daher muß man stets zwischen Geodätischen Offsets im Anstand  $\rho$  eines Flächenpunktes  $\mathbf{p}$  und der Menge der Flächenpunkte unterscheiden, die zu  $\mathbf{p}$  einen Geodätischen Abstand kleiner oder gleich  $\rho$  besitzen. Dies ist der Hauptgrund, warum wir uns gegen die Bezeichnung Geodätischer Kreis für die Kurve  $\alpha_\rho$  entschieden haben. Wir definieren vielmehr:

#### Definition 2.4.4

Sei  $\mathbf{p} \in S$  ein beliebiger Flächenpunkt. Zu einer positiven reellen Zahl  $\rho > 0$  heißt die Menge

$$B_\rho(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in S \mid d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) < \rho\}$$

(offener) Geodätischer Kreis mit Mittelpunkt  $\mathbf{p}$  und Radius  $\rho$ . Der zugehörige abgeschlossene Geodätische Kreis sei mit  $\overline{B}_\rho(\mathbf{p})$  bezeichnet.

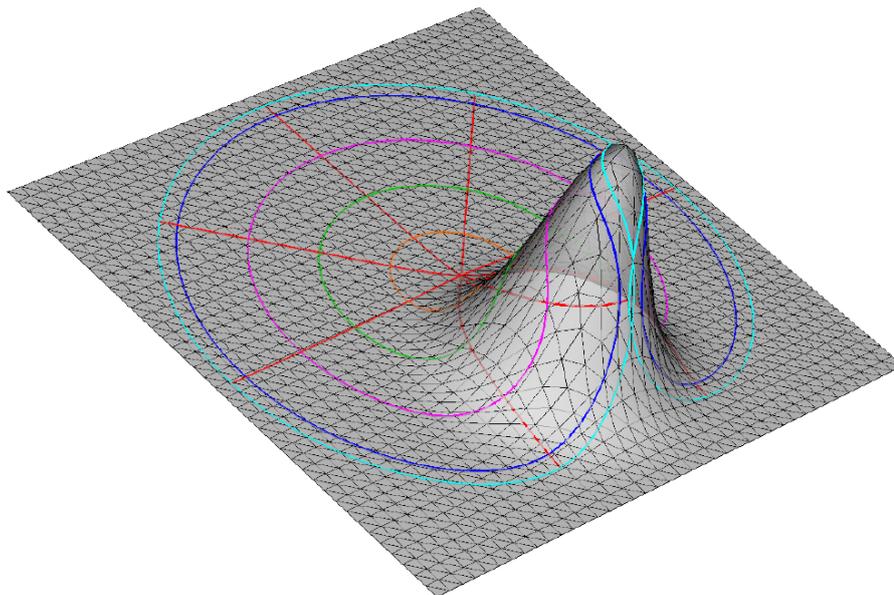


Abbildung 2.5: Geodätische Offsetkurven mit singulären Punkten auf einer Glockenfläche (II)

Ein Geodätischer Kreis, wie er in Definition 2.4.4 eingeführt wurde, ist nicht notwendigerweise konvex. Als einfaches Gegenbeispiel kann man die Einheitssphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  anführen. Betrachtet man dort einen Geodätischen Kreis mit Radius  $\pi/2 < \rho < \pi$  um einen beliebigen Punkt, wie etwa den Südpol, so enthält dieser Kreis den Äquator. Sein Rand entspricht einem Längengrad der Nordhalbkugel. Für zwei Punkte  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$  der nördlichen Hemisphäre, d.h. mit einem Geodätischen Abstand, welcher größer als  $\pi/2$  ist, die jedoch im Geodätischen Kreis um den Südpol liegen, verläßt die zugehörige kürzeste Verbindung zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  den Geodätischen Kreis.

Überraschenderweise muß ein Geodätischer Kreis auf einer regulären Fläche nicht einfach zusammenhängend sein. Ein Beispiel dieses Phänomens liefert erneut die Glockenfläche (siehe (2.16)). Wählt man diesmal den Höhenparameter  $h = 4$  und als Öffnungsweite  $w = 1$ , so ergibt sich die in Abbildung 2.5 gezeigte Fläche. Der Mittelpunkt ist wieder  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0, -2)$ ; die betrachteten Abstände sind hier  $\rho \in \{1, 2, 3, 4, 4.25\}$ . Ferner wurden einige radiale Geodätische ausgehend von  $\mathbf{p}$  der Länge 4.25 in roter Farbe eingezeichnet. Die korrespondierenden tangentialen Winkel sind  $\theta_k = 2\pi k/8$  für  $k = 0, 1, \dots, 7$ , sowie  $\theta_8 = 1.13$ . Interessant ist insbesondere die Offsetkurve im Abstand 4.25, die in der Farbe Magenta markiert wurde. Sie besitzt zwei Doppelpunkte, so daß sich zwei Schlingen gebildet haben. Bemerkenswert ist ferner, daß der Offset keine singulären Punkte besitzt. In dem Schaubild der Parameterraumkurven 2.6 erkennt man, daß die zu  $\theta_8 = 1.13$  gehörige Geodätische die magentafarbene Offsetkurve kreuzt. Daher besitzt jeder Punkt der kleinen Schlinge einen Abstand zu  $\mathbf{p}$ , der kleiner als 4.25 ist. Folglich gehört das Gebiet, das durch die kleine Schlinge begrenzt wird, zu dem Geodätischen Kreis um  $\mathbf{p}$  mit Radius 4.25. Alle Punkte der großen Schlinge haben jedoch einen größeren Abstand. Dies zeigt, daß der Geodätische Kreis mit Radius 4.25 nicht einfach zusammenhängend ist.

In der Vorbemerkung zu Definition 2.4.4 haben wir bereits darauf hingewiesen, daß der Geodätische Offset im Abstand  $\rho$  um  $\mathbf{p}$  im allgemeinen eine andere Flächenkurve ergibt, als die Randkurve des Geodätischen Kreises  $B_\rho(\mathbf{p})$ . Nach dem zuletzt besprochenen Beispiel hat man vielleicht schon die Vermutung, daß der Rand Geodätischer Kreise eine Teilmenge des Geodätischen Offsets ist. Dies ist tatsächlich richtig, wie der folgende Hilfssatz besagt.

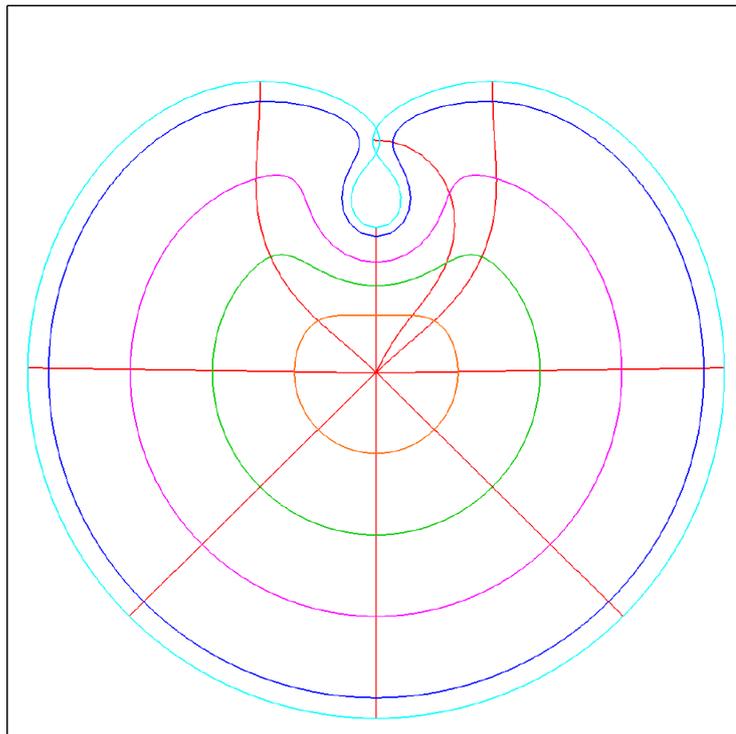


Abbildung 2.6: Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 2.5

### Lemma 2.4.5

Die Exponentialabbildung sei in einem Kreis  $B_\varepsilon \subset T_p(S)$  definiert. Für  $0 < \rho \leq \varepsilon$  ist der Rand des Geodätischen Kreises  $B_\rho(\mathbf{p})$  eine Teilmenge des Geodätischen Offsets  $\alpha_\rho$ .

### Beweis:

Der Rand von  $B_\rho(\mathbf{p})$  besteht aus allen Flächenpunkten  $\mathbf{x}$ , für die  $d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \rho$  gilt. Da die Exponentialfunktion nach Voraussetzung in  $B_\varepsilon$  definiert ist, existiert ein Pfad von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{x}$ , dessen Bogenlänge  $\rho$  ist. Folglich muß  $\mathbf{x}$  Element des Geodätischen Offsets  $\alpha_\rho$  sein, weil alle kürzesten Pfade Geodätische Kurven sind. ■



# Kapitel 3

## Geodätische Offsetkurven

### 3.1 Geodätische Offsetkurven von Flächenkurven

In den vergangenen Jahren waren Offsetkurven in der Euklidischen Ebene immer wieder Thema von Arbeiten im Umfeld der Geometrischen Modellierung und des Computer Aided Design. Einer der Gründe für dieses Interesse ist sicherlich in der praktischen Relevanz der Problemstellung zu sehen, etwa bei der Kontrolle von Fräsmaschinen. Beiträge zu diesem Schwerpunkt findet man etwa in dem Buch von Held [Hel91], sowie in den Arbeiten von Rohmfeld [Roh98], Hansen und Arbab [HA92], Persson [Per78], Maekawa und Patrikalakis [MP93].

Die Aufgabenstellung des Offsettings ist jedoch auch für sich gesehen von mathematischem Interesse. Jede Offsetkurve ist eine Obermenge einer Niveaulinie der Funktion, die einem Punkt der betrachteten Fläche den Abstand zur gegebenen Kurve zuordnet. Die Abstandsmessung wird im Euklidischen Fall längs des Normalenbündels der Ausgangskurve vorgenommen. Das Ergebnis kann Selbstüberschneidungen haben und ist im allgemeinen keine reguläre Kurve mehr. Die folgende Definition stellt eine Verallgemeinerung von Offsetkurven für den Fall einer parametrischen Flächen dar. Sie umfaßt damit gleichsam den Euklidischen Fall, so daß wir auf diese Spezialfälle der Offsetbildung später noch exemplarisch eingehen werden können.

#### Definition 3.1.1

Sei  $\alpha(t)$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$  eine reguläre Kurve auf der orientierbaren, regulären Fläche  $S$ , die sogenannte Progenitorcurve. Für jeden Parameter  $t_0 \in I$  betrachten wir den (Geodätischen) Offset-Punkt  $\gamma_{t_0}(s)$  im Abstand  $s \in \mathbb{R}$ . Dabei bezeichnet  $\gamma_{t_0}$  die nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische Kurve, die vom Progenitorkurvenpunkt  $\alpha(t_0)$  aus in Richtung  $\gamma'_{t_0}(0)$  beginnt, so daß die Vektoren  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$  und die Flächennormale  $\mathbf{N}$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem des  $\mathbb{R}^3$  bilden. Die Menge

$$\{\gamma_{t_0}(s) \mid t_0 \in I\} \subset S$$

heißt (Geodätische) Offsetkurve im Geodätischen Abstand  $s$  zur Progenitorcurve  $\alpha$ .

Bei dieser Definition ist zu beachten, daß der gewählte Abstand  $s$  negatives Vorzeichen haben kann. Dies entspricht laut Vereinbarung einem Offsetting hin zur linken Seite der Progenitorcurve (im Hinblick auf die durch die Flächennormale induzierte Orientierung der Fläche). Ein Offsetting zur rechten Seite wird durch einen positiven Abstand erreicht. Diese durch Definition 3.1.1 eingeführte Vorzeichenkonvention ist durch die Situation bei Offsetkurven von Punkten

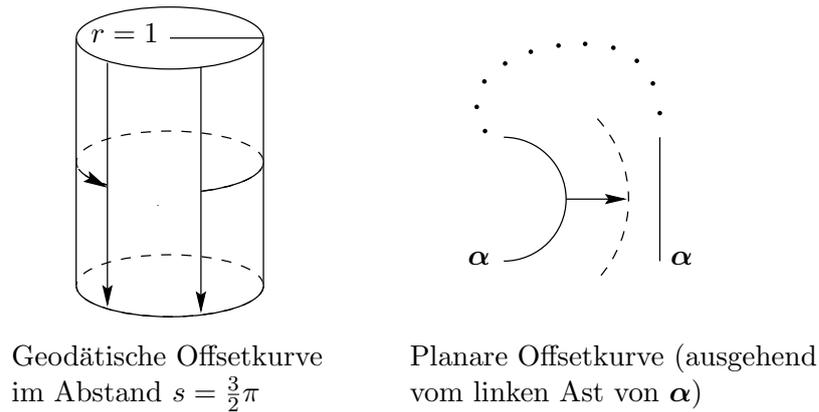


Abbildung 3.1: Geodätische Kurven und global kürzeste Verbindungen

motiviert. Deutet man einen gegebenen Progenitorpunkt als Kreis mit Radius Null, der im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, so entspricht der zugehörige Punktoffset einem Geodätischen Offset gemäß Definition 3.1.1 zu positivem  $s$ . Neben einem konstanten Abstand werden wir später auch den Fall betrachten, daß der Abstand in einem funktionalem Verhältnis  $s(t)$  zum Parameter der Progenitorcurve bzw. zum tangentialen Startwinkel des Progenitorpunkts stehen kann.

Die Sprechweise aus Definition 3.1.1 muß jedoch mit etwas Vorsicht benutzt werden. So kann der tatsächliche Abstand zwischen einem einzelnen Offsetpunkt  $\gamma_{t_0}(s)$  und der Spur der Progenitorcurve  $\alpha$  kleiner sein als  $s$ . Um diese Aussage zu belegen, betrachte man die folgenden beiden Beispiele. In der linken Hälfte von Abbildung 3.1 ist ein Zylinder mit Radius Eins stilisiert. Die betrachtete Progenitorcurve ist hier die Erzeugende des Zylinders. Die Offsetbildung zu  $s = 3\pi/2$  ergibt eine Offsetkurve, deren Punkte alle einen tatsächlichen Abstand von  $\pi/2$  zur Progenitorcurve besitzen. Offenbar liegt der Grund für diesen Sachverhalt in der (globalen) Topologie des Zylinders, der bekanntlich nicht homöomorph zur Ebene ist.

Das Phänomen kann jedoch auch in der Euklidischen Ebene beobachtet werden. In der rechten Hälfte von Abbildung 3.1 ist ein entsprechendes Beispiel angegeben. Die Ursache hier ist die globale Gestalt der Progenitorcurve. Gemeinsam haben beide Fälle, daß die verbindende Geodätische Kurve  $\gamma_{t_0}$  von dem Progenitorpunkt  $\alpha(t_0)$  zum Offsetpunkt nicht der kürzeste Pfad zwischen  $\gamma_{t_0}(s)$  und der Progenitorcurve ist.

Das gleiche Phänomen ist uns bereits in Abschnitt 2.4 begegnet, wo wir Geodätische Offsetkurven von Punkten und Geodätische Kreise betrachtet haben. Wir untersuchten dort insbesondere ein Beispiel, bei dem die (lokale) Flächengeometrie die Offsetkurven zu transversalen Schnitten zwingt (siehe Abbildung 2.5). Wir haben ferner gesehen, daß in diesen Fällen die Geodätischen Offsetkurven stückweise im Inneren des Geodätischen Kreises verlaufen und dort punktweise einen kleineren Abstand zum Ausgangspunkt besitzen.

Wählt man in solchen Fällen einen Abstand  $\varepsilon > 0$  so, daß der Geodätische Offset um den Punkt  $\mathbf{p}$  regulär ist und mit dem Rand des Geodätischen Kreises um  $\mathbf{p}$  mit Radius  $\varepsilon$  übereinstimmt, so erhält man eine geschlossene, reguläre Kurve  $\alpha$ . Betrachtet man nun den Geodätischen Offset dieser Kurve im Abstand  $s - \varepsilon$ , so stimmt dieser Offset mit dem Punktoffset im Abstand  $s$  überein. Insbesondere treten demnach transversale Schnitte auf. Die Punkte des Offsetkurvenabschnitts, die einen kleineren Abstand als  $s$  zu  $\mathbf{p}$  besitzen, haben nach Konstruktion einen kleineren Abstand als  $s - \varepsilon$  zur Kurve  $\alpha$ . Daher induzieren alle erwähnten Beispiele aus Abschnitt 2.4 auch Situationen, in denen Offsetkurven von Kurven stückweise einen kleineren Abstand besitzen.

Ferner zeigt die eben dargestellte Argumentation, daß Punkt- und Kurvenoffsetting häufig im gleichen Zusammenhang besprochen werden können.

Um einen einzelnen Offsetpunkt im Geodätischen Abstand  $s$  von dem Progenitorpunkt  $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$  zu berechnen, kann das System von Differentialgleichungen (2.10) benutzt werden. Für diesen Zweck sind entsprechende Anfangsbedingungen zu formulieren, die der Startrichtung  $\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0)$  der Geodätischen Kurve aus Definition 3.1.1 entsprechen. Es gilt der folgende Hilfssatz.

**Lemma 3.1.2**

Sei  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{r}(x(t), y(t))$  eine Progenitorcurve auf  $S$ . Die bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve  $\boldsymbol{\gamma}_{t_0}(s)$ , die in zu  $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$  orthogonaler Richtung in  $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$  gemäß Definition 3.1.1 beginnt, sei durch die Parametrisierung  $\boldsymbol{\gamma}_{t_0}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$  gegeben. Mit den Abkürzungen

$$a := E x'(t_0) + F y'(t_0), \quad b := F x'(t_0) + G y'(t_0)$$

wobei  $E, F, G$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $S$  in  $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$  bezeichnen, genügt der Tangentenvektor  $\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0) = u'(0) \mathbf{r}_u + v'(0) \mathbf{r}_v$  den Identitäten

$$u'(0) = \sigma \frac{b}{\sqrt{E b^2 - 2 F a b + G a^2}} \quad (3.1a)$$

$$v'(0) = -\sigma \frac{a}{\sqrt{E b^2 - 2 F a b + G a^2}}. \quad (3.1b)$$

Dabei sei  $\sigma := \text{sign}(a x'(t_0) + b y'(t_0))$ .

**Beweis:**

Nach Definition 3.1.1 muß die Ableitung  $(u'(0), v'(0))$  der Parameterraumkurve der Geodätischen einen Tangentialvektor induzieren, der orthogonal zur Tangente der Progenitorcurve  $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$  ist. Da die Geodätische nach Bogenlänge parametrisiert sein soll, hat dieser Tangentenvektor die Länge Eins. Schließlich ist der Geodätische Tangentvektor durch die Forderung eindeutig bestimmt, daß  $\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0), \boldsymbol{\alpha}'(t_0), \mathbf{N}$  ein positiv orientiertes System bilden sollen. Diese drei Forderungen implizieren die folgenden Bedingungen an  $(u'(0), v'(0))$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \boldsymbol{\alpha}'(t_0), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0) \rangle \\ &= \langle x'(t_0) \mathbf{r}_u + y'(t_0) \mathbf{r}_v, u'(0) \mathbf{r}_u + v'(0) \mathbf{r}_v \rangle \\ &= a u'(0) + b v'(0), \\ 1 &= \|\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0)\|^2 \\ &= \|u'(0) \mathbf{r}_u + v'(0) \mathbf{r}_v\|^2 \\ &= E (u'(0))^2 + 2 F u'(0) v'(0) + G (v'(0))^2, \\ 0 &< \det(\boldsymbol{\alpha}'(t_0), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(0), \mathbf{N}) \\ &= (u'(0) y'(t_0) - v'(0) x'(t_0)) \det(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Die in Gleichung (3.1) behaupteten Formeln ergeben sich nach elementaren Umformungen aus den ersten beiden Gleichungen. Das noch zu bestimmende Vorzeichen  $\sigma$  erhält man durch Einsetzen dieser Identitäten für  $u'(0)$  und  $v'(0)$  in die dritte Gleichung aus der resultierenden Beziehung

$$0 < u'(0) y'(t_0) - v'(0) x'(t_0) = \sigma (a x'(t_0) + b y'(t_0)),$$

die gleichbedeutend zu  $\sigma = \text{sign}(a x'(t_0) + b y'(t_0))$  ist. ■

**Bemerkung 3.1.3**

Das Argument der Wurzel in Gleichung (3.1) ist strikt positiv. Durch Einsetzen der Definition von  $a$  und  $b$  ergibt sich nämlich

$$Eb^2 - 2Fab + Ga^2 = (EG - F^2) \left\{ E(x'(t_0))^2 + 2F x'(t_0)y'(t_0) + G(y'(t_0))^2 \right\} > 0,$$

da die erste Fundamentalmatrix positiv definit ist.

Will man einen Geodätischen Offsetpunkt nach Definition 3.1.1 berechnen, so sind die Startwerte des Differentialgleichungssystems (2.10) in der Notation von Hilfssatz 3.1.2 durch

$$\begin{aligned} u_1 &= x(t_0), & v_1 &= y(t_0) & & \text{(Position)} \\ u_2 &= u'(0), & v_2 &= v'(0) & & \text{(Richtung)} \end{aligned}$$

gegeben. Die Anfangswerte für die Richtung der Geodätischen sind mit Hilfe der Formeln (3.1) zu berechnen.

Um Geodätische Offsetkurven eines Punktes  $\mathbf{p} \in S$  zu berechnen, muß man analoge Startwerte des Differentialgleichungssystems (2.10) zur Verfügung stellen. Die Startrichtung einer einzelnen Geodätischen Kurve wird dabei durch einen tangentialen Winkel  $\theta$  wie in der Definition der Geodätischen Polarkoordinaten (siehe Gleichung (2.15) auf Seite 32) beschrieben. Die resultierenden Startwerte in lokalen Koordinaten der Parametrisierung  $\mathbf{r}$  können mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes bestimmt werden.

**Lemma 3.1.4**

Sei  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  ein Punkt der Fläche  $S$  und  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ferner sei  $\gamma_\theta(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$  die bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve, die in tangentialem Winkel  $\theta$  zu  $\mathbf{r}_u$  in  $\mathbf{p}$  startet, für die also

$$\begin{aligned} \gamma_\theta(0) &= \mathbf{p} \\ \gamma'_\theta(0) &= \cos(\theta) \frac{\mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_u\|} + \sin(\theta) \mathbf{r}_{u\perp} \end{aligned}$$

erfüllt sei. Der Vektor  $\mathbf{r}_{u\perp} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\perp$  bezeichnet den eindeutig bestimmten Tangentialvektor, der orthonormal zu  $\mathbf{r}_u$  ist, so daß die Vektoren  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{u\perp}, N$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem bilden. Der Tangentenvektor dieser Geodätischen besitzt in  $\mathbf{p}$  die Darstellung  $\gamma'_\theta(0) = u'(0) \mathbf{r}_u + v'(0) \mathbf{r}_v$ , wobei die Koeffizienten durch

$$u'(0) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left\{ \cos(\theta) - \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}} \sin(\theta) \right\} \quad (3.2a)$$

$$v'(0) = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \sin(\theta) \quad (3.2b)$$

gegeben sind. Hierbei bezeichnen  $E, F, G$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $S$  in  $\mathbf{p}$ .

**Beweis:**

Mit dem orthogonalen Lotvektor

$$\mathbf{v} := \mathbf{r}_v - \left\langle \frac{\mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_u\|}, \mathbf{r}_v \right\rangle \frac{\mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_u\|}$$

von  $\mathbf{r}_v$  auf  $\mathbf{r}_u$  gilt zunächst die Darstellung

$$\mathbf{r}_{u\perp} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \mathbf{r}_v - \frac{F}{E} \mathbf{r}_u \right).$$

Benutzt man diese Darstellung und multipliziert die Zielgleichung

$$u'(0) \mathbf{r}_u + v'(0) \mathbf{r}_v = \gamma'_\theta(0) = \cos(\theta) \frac{\mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_u\|} + \sin(\theta) \mathbf{r}_{u\perp}$$

mit den Tangentialvektoren  $\mathbf{r}_u$  bzw.  $\mathbf{r}_v$ , so erhält man das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} E u'(0) + F v'(0) &= \cos(\theta) \sqrt{E} \\ F u'(0) + G v'(0) &= \cos(\theta) \frac{F}{\sqrt{E}} + \sin(\theta) \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \end{aligned} \right\}$$

welches eindeutig nach den gesuchten Werten  $u'(0)$  und  $v'(0)$  lösbar ist, da die 1. Fundamentalmatrix stets regulär ist. Die behaupteten Formeln (3.2) ergeben sich als Lösung dieses Gleichungssystems. ■

Bislang sind die Geodätischen Offsetkurven aus Definition 2.4.3 bzw. 3.1.1 ausschließlich als Menge einzelner Offsetpunkte betrachtet worden. In dem folgenden Abschnitt wird gezeigt werden, daß der Gebrauch des Begriffes *Kurve* in diesem Zusammenhang gerechtfertigt ist. Ferner werden wir die sogenannte Offsetfunktion einführen, die eine Verallgemeinerung der Exponentialabbildung aus Abschnitt 2.4 für den Fall von Flächenkurven darstellt.

## 3.2 Geodätische Offsetfunktionen

Das Konzept der Geodätischen Offsetfunktion ist eng verwandt mit der Exponentialfunktion, die in Abschnitt 2.4 im Zusammenhang mit Geodätischen Kreisen besprochen wurde. Sie wird im folgenden ein wichtiges Werkzeug darstellen, Geodätische Kurven und Geodätische Offsetkurven eines Flächenpunktes wie auch einer Flächenkurve in einheitlicher Form zu behandeln.

### Definition 3.2.1

Sei  $S$  eine reguläre parametrische Fläche, die durch die Funktion  $\mathbf{r}(u, v)$  parametrisiert sei, und sei  $\alpha(t)$  eine Progenitorcurve. Ferner bezeichne  $\gamma_t(s)$  die nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische Kurve, die im Punkt  $\alpha(t)$  in die orthogonale Richtung zu  $\alpha'(t)$  startet, so daß  $\gamma'_t, \alpha'(t), \mathbf{N}$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem bildet. Die Funktion  $\mathcal{O}_\alpha : (s, t) \mapsto (u(s, t), v(s, t))$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{r}(\mathcal{O}_\alpha(s, t)) = \gamma_t(s)$$

heißt die (Geodätische) Offsetfunktion auf  $S$  bezüglich der Progenitorcurve  $\alpha(t)$ .

Nach Definition 3.2.1 entspricht das Bild  $\mathcal{O}_\alpha(s, t)$  den  $(u, v)$ -Parametern des Geodätischen Offsetpunktes im Abstand  $s$  ausgehend von dem Progenitorpunkt  $\alpha(t)$ . In Abschnitt 2.2 wurde bereits erläutert, daß diese Parameter durch Lösen der Geodätischen Differentialgleichung (2.10) berechnet werden können. Die hierfür benötigten Anfangswerte des Differentialgleichungssystems

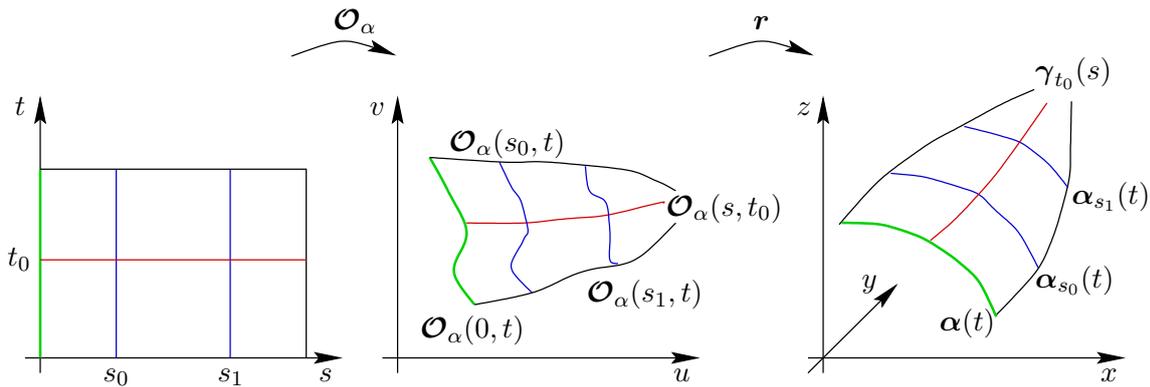


Abbildung 3.2: Offsetfunktion  $\mathcal{O}_\alpha(s, t)$  einer gegebenen Progenitorkurve  $\alpha(t)$

wurden in Hilfssatz 3.1.2 besprochen. Geodätische Kurven und Geodätische Offsetkurven können nun unter Benutzung der Offsetfunktion in der Form

$$r(\mathcal{O}_\alpha(0, t)) = \alpha(t) \quad (\text{Progenitorkurve}) \quad (3.3a)$$

$$r(\mathcal{O}_\alpha(s, t_0)) = \gamma_{t_0}(s) \quad (\text{Geodätische Kurve von } \alpha(t_0) \text{ startend}) \quad (3.3b)$$

$$r(\mathcal{O}_\alpha(s_0, t)) = \alpha_{s_0}(t) \quad (\text{Offsetkurve in Geodätischem Abstand } s_0) \quad (3.3c)$$

geschrieben werden. In Abbildung 3.2 wurde dieser Sachverhalt dargestellt. Hierbei wurden die zugehörigen Parameterraum- und Flächenkurven in korrespondierenden Farben dargestellt, die Progenitorkurve in Grün, Geodätische in Rot und Offsetkurven in Blau. Obwohl die Schreibweise in Gleichung (3.3) sowie die Sprechweise „Offsetkurve“ dies bereits suggerieren, ist zunächst nicht geklärt, ob es sich bei der Menge aller Offsetpunkte tatsächlich um eine Kurve handelt und welche Eigenschaften diese besitzt. Wir werden uns mit dieser Frage im Laufe dieses Abschnitts eingehend befassen.

Für den Fall eines Flächenpunktes  $\mathbf{p} \in S$  wurde in Abschnitt 2.4 bereits die Exponentialfunktion eingeführt und behandelt (vgl. (2.14)). Sie entspricht dem Analogon der Offsetfunktion aus Definition 3.2.1, ersetzt man das Progenitorobjekt  $\alpha$  durch den Flächenpunkt  $\mathbf{p}$ . Zur Vereinheitlichung der Schreibweise führen wir nun auch formal die Offsetfunktion eines Flächenpunktes ein.

### Definition 3.2.2

Sei  $S$  eine reguläre parametrische Fläche, die durch die Funktion  $\mathbf{r}(u, v)$  parametrisiert sei, und  $\mathbf{p}$  ein Flächenpunkt. Ferner bezeichne  $\gamma_t(s)$  die nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische Kurve, die im Punkt  $\mathbf{p}$  mit dem tangentialen Winkel  $t \in [0, 2\pi]$  zu  $\mathbf{r}_u$  startet. Die Funktion  $\mathcal{O}_\mathbf{p} : (s, t) \mapsto (u(s, t), v(s, t))$ , definiert durch

$$\mathbf{r}(\mathcal{O}_\mathbf{p}(s, t)) = \gamma_t(s),$$

heißt die (Geodätische) Offsetfunktion auf  $S$  bezüglich des Progenitorpunktes  $\mathbf{p}$ .

Ebenso wie die Offsetfunktion einer Progenitorkurve liefert  $\mathcal{O}_\mathbf{p}$  das Tupel der  $(u, v)$ -Parameter eines Geodätischen Offsetpunktes von  $\mathbf{p}$ . Die Funktionswerte dieser Funktion können wieder mit Hilfe des Systems der Geodätischen Differentialgleichungen bestimmt werden. Im Fall der Geodätischen Offsetfunktion  $\mathcal{O}_\mathbf{p}$  sind hierbei die Anfangswerte gemäß Lemma 3.1.4 zu verwenden.

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir uns der Frage widmen, welche Differenzierbarkeitsordnung die Offsetfunktion  $\mathcal{O}_p$  bzw.  $\mathcal{O}_\alpha$  besitzt. In Hilfssatz 2.4.1 wurde diese Frage ein erstes mal im Fall der Exponentialabbildung angeschnitten. Dort sind wir jedoch von einer  $C^\infty$ -Fläche ausgegangen. Da unser Hauptaugenmerk jedoch Spline-Flächen, also stückweise polynomialen Flächen gilt, und diese an den Segmentübergängen eine geringere Differenzierbarkeitsordnung besitzen, haben die folgenden Aussagen durchaus eine praktische Relevanz. Da die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsmethoden wesentlich von den partiellen Ableitungen der Offsetfunktion Gebrauch machen werden, wird unser Ziel sein, möglichst scharfe Bedingungen an die Differenzierbarkeitsordnung der betrachteten Fläche  $S$  zu formulieren, so daß die Offsetfunktion für unsere Anwendungen hinreichend oft differenzierbar (an den Segmentübergängen) ist. Der folgende Satz gibt ein erstes Kriterium, wann  $\mathcal{O}_\alpha$  eine  $p$ -fach stetig differenzierbare Funktion ist.

### Satz 3.2.3

Sei  $\mathbf{r}$  eine  $C^{p+2}$ -stetige Parametrisierung der Fläche  $S$  und sei  $\alpha(t)$  eine  $C^{p+1}$ -stetige Progenitorkurve. Dann ist die Offsetfunktion  $\mathcal{O}_\alpha$  in einer Umgebung der Progenitorkurve  $\alpha$  (d.h. für alle Geodätische Abständen  $|s| \leq \bar{s}$  mit einem bestimmten  $\bar{s} > 0$ ) eine  $C^p$ -stetige Funktion. Insbesondere kann die Geodätische Offsetkurve in konstanten Abstand  $s_0$  als parametrisierte  $C^p$ -stetige Kurve  $\alpha_{s_0}(t) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_\alpha(s_0, t))$  geschrieben werden.

#### Beweis:

Die Parameter  $(u_t(s), v_t(s)) = \mathcal{O}_\alpha(s, t)$  eines Offsetpunktes  $\gamma_t(s)$  sind die Lösung des Differentialgleichungssystems (2.10) zu den Anfangswerten  $(u_1, v_1, u_2, v_2)$  aus Lemma 3.1.2. Eine Variation des Parameters  $t$  der Progenitorkurve bewirkt eine stetige Änderung dieser Anfangswerte. Ein klassisches Ergebnis aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe z.B. [Wal93], S. 129 ff. oder [Sto69], S. 388 ff.) garantiert, daß die Lösung des variierten Anfangswertproblems als differenzierbare Funktion  $(u(s, t), v(s, t))$  der Veränderlichen  $s$  und  $t$  betrachtet werden kann. Diese Funktion hat ferner die gleiche Stetigkeitsordnung wie die rechte Seite des Differentialgleichungssystems. Da nun die Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k$  in System (2.10) in Termen der ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Flächenparametrisierung  $\mathbf{r}$  geschrieben werden können, ist die Funktion  $(u(s, t), v(s, t))$   $C^p$ -stetig. ■

Studiert man den Beweis von Satz 3.2.3 genauer, so stellt man fest, das der benutzte Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von den gewählten Anfangswerten auf die Lösungstupel

$$\mathcal{O}_\alpha(s, t) = (u(s, t), v(s, t)) \quad \text{und} \quad \partial_s \mathcal{O}_\alpha(s, t) = \left( \frac{\partial}{\partial s} u(s, t), \frac{\partial}{\partial s} v(s, t) \right)$$

des Differentialgleichungssystems erster Ordnung (2.10) angewendet wird. Mit der gleichen Argumentation sind daher die partiellen Ableitungen  $(\partial/\partial s)u$  and  $(\partial/\partial s)v$  (und damit  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha$ ) ebenfalls  $C^p$ -stetige Funktionen in den beiden Veränderlichen  $s$  und  $t$ . Die Betonung bei dieser Beobachtung, ebenso wie bei der Aussage von Satz 3.2.3, liegt aber in der Abhängigkeit der betrachteten Funktionen von dem Parameter  $t$ . Für jeden konstanten Parameterwert  $t_0$  ist die Funktion  $\mathcal{O}_\alpha(s, t_0) = (u(s, t_0), v(s, t_0))$  (der  $uv$ -Parameterwerte der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}$ ) selbstverständlich eine  $C^{p+2}$ -stetige Funktion der Veränderlichen  $s$ . Mit anderen Worten: jede einzelne Geodätische  $\gamma_{t_0}$  hat dieselbe Stetigkeitsordnung wie die Flächenparametrisierung  $\mathbf{r}$ . Diese Tatsache ergibt sich sofort aus der Geodätischen Differentialgleichung (2.9).

Mit der gleichen Argumentation wie in dem Beweis von Satz 3.2.3 folgt die entsprechende Aussage für die Offsetfunktion eines Flächenpunktes  $p$ . Diese kann wie folgt formuliert werden.

**Satz 3.2.4**

Sei  $\mathbf{r}$  eine  $C^{p+2}$ -stetige Parametrisierung der Fläche  $S$  und  $\mathbf{p}$  ein beliebiger Flächenpunkt. Dann existiert ein  $\bar{s} > 0$ , so daß die Offsetfunktion  $\mathcal{O}_p$   $p$ -fach stetig differenzierbar ist für alle  $s \leq \bar{s}$  und  $t \in [0, 2\pi]$ . Insbesondere kann die Geodätische Offsetkurve in konstanten Abstand  $s_0$  als parametrisierte  $C^p$ -stetige Kurve  $\alpha_{s_0}(t) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_\alpha(s_0, t))$  geschrieben werden.

Aufgrund der beiden letzten Sätze 3.2.3 und 3.2.4 könnte man nun untersuchen wollen, wie sich die Offsetfunktion etwa im Fall einer Spline-Fläche mit lediglich  $C^2$ -stetigen Segmentübergängen verhält. Satz 2.2.6 garantiert in diesem Fall immerhin die Existenz eindeutig bestimmter Geodätischer Kurven, so daß die Offsetfunktion zumindest wohldefiniert ist. Man würde versuchen, eine Situation zu konstruieren, in der die Offsetfunktion nicht mehr stetig nach dem Parameter  $t$  differenzierbar ist. Und man würde mit diesem Versuch scheitern! Tatsächlich ist die Offsetfunktion bereits bei  $C^2$ -Flächen (und  $C^2$ -stetigen Progenitorkurven) einmal stetig differenzierbar.

Dies erscheint zunächst überraschend, da die Christoffelsymbole als bestimmender Teil der rechten Seite der Geodätischen Differentialgleichung in dieser Situation lediglich stetige Funktionen sind. Würde man beliebige (stetige) Funktionen für die Christoffelsymbole in Gleichung (2.9) zulassen, könnte man sicherlich Beispiele konstruieren, in denen die resultierende Offsetfunktion nicht mehr differenzierbar ist, ja sogar nicht mehr wohldefiniert ist. Daher kann man die angekündigte Aussage nicht mit den Methoden des Beweises von Satz 3.2.3 nachweisen. Man wird vielmehr benutzen müssen, daß die Christoffelsymbole eine konkret existierende Geometrie repräsentieren. Wir benutzen im wesentlichen die Methodik von Hartman [Har50], um zum Abschluß dieses Abschnitts Satz 3.2.7 zu beweisen, der die oben postulierte Differenzierbareigenschaft von  $\mathcal{O}_\alpha$  zum Inhalt hat.

Der folgende, aus unserer Sicht eher technische Hilfssatz 3.2.5 sichert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines bestimmten Typs von Integro-Differentialgleichungen. Diese Aussage wird im Beweis von Lemma 3.2.6 an wesentlicher Stelle benutzt werden. Aus dem letztgenannten Hilfssatz wird dann das angestrebte Hauptresultat dieses Abschnitts (Satz 3.2.7) folgen. Die angesprochene Integro-Differentialgleichung und damit die zugehörige Lösungsfunktion wird von einem zusätzlichen Parameter  $\theta$  abhängen. Die Abhängigkeit einer Funktion von einem Parameter sei im folgenden stets durch ein Semikolon gekennzeichnet. So habe  $y(u; \theta)$  die Veränderliche  $u$  und als zusätzlichen Parameter  $\theta$ . Lemma 3.2.5 garantiert ferner, daß die Lösungsfunktion des betrachteten Problems insbesondere stetig bezüglich dieses Parameters ist.

**Lemma 3.2.5**

Seien  $0 \in J = [a, b]$  und  $K \subset \mathbb{R}$  kompakte, nichtleere Mengen. Gegeben seien ferner die stetigen, reellwertigen Funktionen  $\eta : K \rightarrow \mathbb{R}$  und  $A, B, C, D : J \times K \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann hat die Integro-Differentialgleichung

$$y'(u; \theta) = A(u; \theta) + B(u; \theta)y(u; \theta) + C(u; \theta) \int_0^u D(\mu; \theta)y(\mu; \theta) d\mu \quad (3.4)$$

für jeden Parameter  $\theta \in K$  und jeden Anfangswert  $y(0; \theta) = \eta(\theta)$  genau eine Lösung  $y(u; \theta)$ . Diese ist als Funktion der Veränderlichen  $(u, \theta)$  stetig in  $J \times K$ , es gilt also  $y \in C^0(J \times K)$ .

**Beweis:**

Das Anfangswertproblem (3.4) mit  $y(0; \theta) = \eta(\theta)$  ist äquivalent zur Volterra-Integralgleichung

$$y(u; \theta) = \eta(\theta) + \int_0^u f(t, y; \theta) dt, \quad (3.5)$$

wobei die Funktion  $f$  durch

$$f(u, y; \theta) := A(u; \theta) + B(u; \theta) y(u; \theta) + C(u; \theta) \int_0^u D(\mu; \theta) y(\mu; \theta) d\mu$$

gegeben ist und offensichtlich stetig ist. Weitere Einzelheiten zu Volterra-Integralgleichungen findet man z.B. in [Wal93], S. 123 ff. Die Funktionen  $B$ ,  $C$  und  $D$  sind als stetige Funktionen insbesondere beschränkt auf dem Kompaktum  $J \times K$ . Es gelte für alle  $(u, \theta) \in J \times K$

$$|B(u; \theta)| \leq L_B, \quad |C(u; \theta)| \leq L_C, \quad |D(u; \theta)| \leq L_D$$

mit positiven Konstanten  $L_B, L_C, L_D > 0$ . Wir betrachten den Raum  $C^0(J \times K)$  der auf  $J \times K$  stetigen Funktionen zusammen mit der Norm

$$\|y\| := \sup \left\{ |y(u; \theta)| e^{-2L|u-0|} \mid (u, \theta) \in J \times K \right\}.$$

Die Konstante  $L$  sei dabei durch

$$L := \max \left\{ 2L_B, \sqrt{L_C L_D} \right\} \quad (3.6)$$

gegeben. Mit dieser Norm ist  $\mathcal{B} := C^0(J \times K)$  ein Banachraum (siehe z.B. [Wal93], S. 49 ff.). Ferner definieren wir den Operator  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  durch

$$(Ty)(u; \theta) := \eta(\theta) + \int_0^u f(t, y; \theta) dt.$$

Offenbar ist  $Ty$  wieder eine in beiden Argumenten stetige Funktion und damit Element von  $\mathcal{B}$ . Für zwei Funktionen  $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$  gilt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(Ty_1 - Ty_2)(u; \theta)| &\leq \left| \int_0^u B(t; \theta) (y_1(t; \theta) - y_2(t; \theta)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^u C(t; \theta) \int_0^t D(\mu; \theta) (y_1(\mu; \theta) - y_2(\mu; \theta)) d\mu dt \right| \\ &\leq L_B \left| \int_0^u |y_1(t; \theta) - y_2(t; \theta)| e^{-2L|t|} e^{2L|t|} dt \right| \\ &\quad + L_C L_D \left| \int_0^u \int_0^t |y_1(\mu; \theta) - y_2(\mu; \theta)| e^{-2L|\mu|} e^{2L|\mu|} d\mu dt \right| \\ &\leq L_B \|y_1 - y_2\| \left| \int_0^u e^{2L|t|} dt \right| \\ &\quad + L_C L_D \|y_1 - y_2\| \left| \int_0^u \int_0^t e^{2L|\mu|} d\mu dt \right| \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der erste Integralausdruck in (3.7) genügt der Abschätzung

$$\left| \int_0^u e^{2L|t|} dt \right| = \frac{1}{2L} (e^{2L|u|} - 1) \leq \frac{1}{2L} e^{2L|u|}. \quad (3.8)$$

Analog erhält man für den zweiten Integralausdruck in (3.7)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^u \int_0^t e^{2L|\mu|} d\mu dt \right| &= \frac{1}{2L} \left| \int_0^t (e^{2L|t|} - 1) dt \right| \leq \frac{1}{2L} \left| \int_0^t e^{2L|t|} dt \right| \\ &= \frac{1}{4L^2} (e^{2L|u|} - 1) \leq \frac{1}{4L^2} e^{2L|u|} \end{aligned} \quad (3.9)$$

als obere Schranke. Setzt man die beiden Ausdrücke (3.8) und (3.9) in Ungleichung (3.7) ein, so ergibt sich die Abschätzung

$$|(Ty_1 - Ty_2)(u; \theta)| \leq \left( \frac{L_B}{2L} + \frac{L_C L_D}{4L^2} \right) \|y_1 - y_2\| e^{2L|u|}. \quad (3.10)$$

Aufgrund der Definition der Konstante  $L$  in (3.6) gilt

$$\frac{L_B}{2L} \leq \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{L_C L_D}{4L^2} \leq \frac{1}{4},$$

was die Abschätzung

$$\frac{L_B}{2L} + \frac{L_C L_D}{4L^2} \leq \frac{1}{2}$$

rechtfertigt. Insgesamt gilt damit für alle  $(u, \theta) \in J \times K$

$$|(Ty_1 - Ty_2)(u; \theta)| e^{-2L|u|} \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|,$$

so daß folglich

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

erfüllt ist. Der Operator  $T$  ist daher eine Kontraktion auf dem Banachraum  $\mathcal{B}$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz (siehe [Wal93], S.53 ff.) gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion  $y(u; \theta) \in \mathcal{B}$  mit  $Ty = y$ . Nach Konstruktion genügt dieser Fixpunkt  $y$  der Volterra-Integralgleichung (3.5) und ist damit Lösung des zu (3.4) gehörigen Problems mit Anfangswert  $y(0; \theta) = \eta(\theta)$ . ■

Wir können uns nun den Vorbereitungen zur Formulierung des Hauptergebnisses dieses Abschnitts zuwenden. Gegeben sei eine  $C^2$ -stetige Progenitorkurve  $\alpha$  auf einer regulären,  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$  mit zugehöriger Parametrisierung  $r$ . Wir wollen das Verhalten der Offsetfunktion in einer Umgebung eines Kurvenpunktes  $p = \alpha(t_0) = r(u_0, v_0)$  studieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise können wir annehmen, daß  $t_0 = 0$  erfüllt sei, also  $p = \alpha(0)$  gelte. Ferner nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß  $\alpha$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Für einen abgeschlossenen Bereich um  $t_0 = 0$  herum, etwa für alle  $t$  mit  $|t| \leq \bar{t}$ , ist die Offsetabbildung  $\mathcal{O}_\alpha$  für alle Abstände  $s$  definiert, die einen gewissen Betrag  $\bar{s} > 0$  nicht überschreiten. Dies folgt aus Satz 2.2.6, der die (lokale) Existenz von Geodätischen auf  $C^2$ -Flächen gewährleistet. Der Wert von  $\bar{s}$  hängt zwar von der Wahl von  $\bar{t}$  ab, wir betrachten die Situation jedoch ausschließlich für ein beliebiges, aber fest gewähltes  $\bar{t}$ . Wir studieren die Abbildung

$$(s, t)^T \mapsto (u(s, t), v(s, t))^T = \mathcal{O}_\alpha(s, t) \quad \text{für } |s| \leq \bar{s}, |t| \leq \bar{t},$$

also die auf den angegebenen kompakten Bereich eingeschränkte Offsetfunktion. Da die Fläche nach Voraussetzung  $C^2$ -stetig ist, ist diese Abbildung stetig. Ferner sind beide Komponentenfunktionen  $u(s, t)$  und  $v(s, t)$  zweimal stetig partiell nach  $s$  differenzierbar, da sie als Lösung der Geodätischen Differentialgleichung gegeben sind. Unser Fernziel ist es zu beweisen, daß beide Funktionen einmal stetig partiell nach  $t$  differenzierbar sind, also  $C^1$ -stetige Funktionen darstellen.

Für jeden Parameter  $t$  mit  $|t| \leq \bar{t}$  betrachten wir die Menge aller durch Lösen der Geodätischen Differentialgleichung induzierten  $u$ -Parameter  $u(s, t)$  für Abstandswerte  $|s| \leq \bar{s}$ . Für die Geodätische ausgehend vom Punkt  $p$ , d.h. für den Kurvenparameter  $t = 0$ , können wir ohne

Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sich ihr  $u$ -Parameterwert  $u(s, 0)$  unter Variation des Abstandes  $s$  in der Nähe von  $s = 0$  ändert. Mit anderen Worten setzen wir voraus, daß die in  $\mathbf{p}$  startende Geodätische Kurve  $\gamma_0$  eine Anfangsrichtung besitzt, die nicht einer Isoparameterlinie  $u = \text{const}$  entspricht. Andernfalls vertausche man die Parameterbezeichnungen von  $u$  und  $v$ . Damit ist der Wertebereich von  $u(s, 0)$  für  $|s| \leq \bar{s}$  ein kompaktes Intervall  $A_0$ , dessen Inneres  $\mathring{A}_0$  nicht leer ist.

Da die Progenitorkurve  $\alpha(t)$  als  $C^2$ -stetig vorausgesetzt wurde, bilden die Startrichtungen  $\gamma'_t(0)$  der von  $\alpha$  ausgehenden Geodätischen ein stetig differenzierbares Vektorfeld längs  $\alpha$ . Daher können wir annehmen, daß keine der induzierten Geodätischen für  $|t| \leq \bar{t}$  in Richtung einer Isoparameterlinie  $u = \text{const}$  beginnt (ggf. nach Verkleinern von  $\bar{t}$ ). Für hinreichend kleines  $\bar{t}$  ist aufgrund der Stetigkeit von  $u$  der Wertebereich für jeden Parameter  $|t| \leq \bar{t}$  ein kompaktes Intervall  $A_t$ , welches ein nicht leeres Inneres  $\mathring{A}_t$  besitzt.

Wir betrachten die Hilfsfunktion  $F : \{s \mid |s| \leq \bar{s}\} \times \{t \mid |t| \leq \bar{t}\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$F(s, t, u) := u(s, t) - u$$

gegeben sei, und an deren Nullstellenmenge wir interessiert sind.  $F$  ist stetig partiell nach  $u$  und  $s$  differenzierbar, letzteres da  $u(s, t)$  als Komponentenfunktion der Lösung der Geodätischen Differentialgleichung nach  $s$  differenzierbar ist. Allerdings wissen wir (noch) nichts über die partielle Differenzierbarkeit nach  $t$ . Unser erklärtes Ziel ist es ja zu zeigen, daß insbesondere  $\partial u / \partial t$  existiert und stetig ist. Für einen beliebigen, aber festen Parameter  $t_0$  mit  $|t_0| \leq \bar{t}$  betrachten wir daher die induzierte Funktion  $F_{t_0}(s, u) := F(s, t_0, u)$ , die stetig differenzierbar ist. Für alle  $u^* \in \mathring{A}_{t_0}$  gibt es wie gesehen einen Geodätischen Abstand  $s^*$ , so daß

$$F_{t_0}(s^*, u^*) = u(s^*, t_0) - u^* = 0$$

erfüllt ist. Ggf. durch Verkleinern von  $\bar{s}$  kann man erreichen, daß

$$\frac{\partial}{\partial s} F_{t_0}(u^*, s) = \frac{\partial}{\partial s} u(s, t_0) \neq 0,$$

gilt. Dies folgt aus der Tatsache, daß  $\partial u / \partial s$  eine stetige Funktion ist, die nach Konstruktion  $\partial u / \partial s(0, t) \neq 0$  für alle  $|t| \leq \bar{t}$  erfüllt. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert daher für alle beliebigen, aber festen Kurvenparameter  $t_0$  mit  $|t_0| \leq \bar{t}$  eine nach  $u$  stetig differenzierbare Funktion  $s(u; t_0)$ , so daß  $s(u^*; t_0) = s^*$  und

$$F_{t_0}(u, s(u; t_0)) = u(s(u; t_0), t_0) - u = 0 \quad (3.11)$$

für alle  $u \in \mathring{A}_{t_0}$  gilt.

Ausgehend von der eben eingeführten Funktion  $s$  definieren wir für einen beliebigen, aber festen Kurvenparameter  $t$  mit  $|t| \leq \bar{t}$

$$v(u; t) := v(s(u; t); t) \quad \text{für alle } u \in \mathring{A}_t. \quad (3.12)$$

Die Funktion  $s(u; t)$  ist für alle  $u$  des Wertebereichs von  $u(s, t)$  definiert, für die  $\partial u / \partial s(s, t) \neq 0$  gilt. Daher kann  $v(u; t)$  für den gleichen Definitionsbereich erklärt werden. Diese Funktion liefert den  $v$ -Parameter der Geodätischen Kurve  $\gamma_t$  in Abhängigkeit des  $u$ -Parameters. Da  $s(u; t)$  nach  $u$  stetig differenzierbar ist, und  $v(s, t)$  stetig partiell nach  $s$  differenzierbar ist, ist  $v(u; t)$  stetig nach  $u$  differenzierbar. Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{d}{du} v(u; t) = \frac{\partial}{\partial s} v(s(u; t), t) \frac{d}{du} s(u; t).$$

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrabbildung folgt für  $u_0 = u(0, t)$  (also für den  $u$ -Parameter des Kurvenpunktes  $\alpha(t)$ )

$$\frac{d}{du}v(u_0; t) = \frac{\partial}{\partial s}v(0, t) \left( \frac{\partial}{\partial s}u(0, t) \right)^{-1}. \quad (3.13)$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, den zentralen Hilfssatz über die Stetigkeitsordnung der soeben konstruierten Funktion zu formulieren. Grob gesprochen besagt er, daß  $v(u; t)$  auch nach dem Parameter  $t$  stetig partiell differenzierbar ist.

### Lemma 3.2.6

Sei  $\alpha$  eine  $C^2$ -stetige, reguläre Flächenkurve einer  $C^2$ -stetigen, regulären Fläche  $S$ . Für die in Gleichung (3.12) definierte Funktion existieren für alle Kurvenpunkte  $\mathbf{p} = \alpha(t_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  die partiellen Ableitungen  $\partial/\partial t v(u; t)$  und  $\partial^2/\partial u \partial t v(u; t)$  in einer gewissen Umgebung  $|t - t_0| \leq \bar{t}$  und  $|u - u_0| \leq \bar{u}$  und sind dort stetig.

#### Beweis:

Wir wollen die Parameterraumkurve von  $\alpha$  mit  $(u_\alpha(\tau), v_\alpha(\tau))^T$  bezeichnen, d.h. es gelte  $\alpha(\tau) = \mathbf{r}(u_\alpha(\tau), v_\alpha(\tau))$ . Zur Vereinfachung nehmen wir wieder  $t_0 = 0$  an. Seien  $t$  und  $\Delta t$  so gewählt, daß mit den oben eingeführten Bezeichnungen  $|t| \leq \bar{t}$  und  $|t + \Delta t| \leq \bar{t}$  gelte. Ferner kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mathbf{p} = \alpha(t) = \mathbf{r}(0, 0)$  und  $\alpha'(t) = v'_\alpha(t) \mathbf{r}_v$  gelte. Dies erreicht man durch entsprechende Wahl eines lokalen Koordinatensystems, was einer linearen Transformation des Parameterraums entspricht. Zu beachten ist, daß diese Vereinfachung *nicht* der Forderung  $\partial u/\partial s(0, t) \neq 0$  widerspricht, die für die Einführung der Funktion  $v(u; t)$  wesentlich war. Schließlich nehmen wir wieder an, daß die Progenitorcurve  $\alpha$  nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist.

Für ein  $\mu \in \mathring{A}_t$  betrachten wir den geschlossenen Pfad  $\Gamma$ , der aus den folgenden vier Teilkurven  $\beta_1, \dots, \beta_4$  bestehe:<sup>1</sup>

- Die Teilkurve der Geodätischen  $\gamma_t$ , die ausgehend vom Punkt  $\alpha(t) = \mathbf{r}(0, 0)$  (in orthogonaler Richtung startend) zum Punkt  $\mathbf{r}(\mu, v(\mu; t))$  verläuft. Wir bezeichnen dieses Segment mit  $\beta_1$
- Der Teil der Isoparameterlinie  $u = \mu$ , der ausgehend von  $\mathbf{r}(\mu, v(\mu; t))$  nach  $\mathbf{r}(\mu, v(\mu; t + \Delta t))$  verläuft. Diese Kurve sei mit

$$\beta_2(v) := \mathbf{r}(\mu, v) \quad \text{für } v \in [v(\mu; t), v(\mu; t + \Delta t)]$$

bezeichnet.

- Die Teilkurve der Geodätischen  $\gamma_{t+\Delta t}$ , die ausgehend vom Punkt  $\alpha(t + \Delta t) = \mathbf{r}(u_2, v_2)$  (in orthogonaler Richtung startend) zum Punkt  $\mathbf{r}(\mu, v(\mu; t + \Delta t))$  verläuft, allerdings in umgekehrtem Durchlaufsinne. Dieses Segment sei mit  $\beta_3$  bezeichnet.
- Die Teilkurve von  $\alpha$ , die man erhält, wenn man den Kurvenparameter von  $t + \Delta t$  bis  $t$  durchläuft, also

$$\beta_4(\tau) := \alpha(\tau) \quad \text{für } \tau \in [t + \Delta t, t].$$

<sup>1</sup>Bei den folgenden Definitionen treten Parameterintervalle  $[a, b]$  auf, für die  $a > b$  gilt. Dies geschieht um die Schreibweise einfach zu halten und dennoch den Durchlaufsinne der zugehörigen Kurven zu indizieren.

Hierfür ist der Wert von  $\Delta t$  hinreichend klein zu wählen, so daß der Schnitt

$$\bigcap_{|\tau-t|\leq\Delta t} \dot{A}_\tau$$

der Definitionsbereiche der Funktionen  $v(u; \tau)$  den betrachteten  $u$ -Parameter  $\mu$  enthält. Dies ist jedoch aufgrund der Stetigkeit der Funktion  $u(s, t)$  stets möglich. Falls der so definierte Pfad  $\Gamma$  in mathematisch negativem Sinn bezüglich der Orientierung der Fläche  $S$  durchlaufen wird, so soll die Durchlaufrichtung schließlich umgekehrt werden.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \varphi &:= \text{orientierter Außenwinkel zwischen } \beta_1 \text{ und } \beta_2 \\ \psi &:= \text{orientierter Außenwinkel zwischen } \beta_2 \text{ und } \beta_3 \end{aligned}$$

und beachtet, daß die orientierten Außenwinkel zwischen  $\beta_3$  und  $\beta_4$ , sowie zwischen  $\beta_4$  und  $\beta_1$  nach Definition der Offsetfunktion  $\pi/2$  betragen, so folgt mit dem Satz von Gauß–Bonnet die Identität

$$2\pi = \int_{\Gamma} \kappa_g(s) ds + \int \int_R K(\sigma) d\sigma + \varphi + \psi + \pi. \quad (3.14)$$

Dabei bezeichnet  $\kappa_g(s)$  die Geodätische Krümmung der Kurve  $\Gamma(s)$ , die in dieser Formulierung nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sein soll.  $K(\sigma)$  bezeichnet die Gaußkrümmung der Fläche  $S$ ; diese wird über dem Gebiet  $R$  integriert, welches durch die Kurve  $\Gamma$  berandet wird. An dieser Stelle ist zu bemerken, daß die Kurve nicht notwendigerweise einfach ist. Dennoch kann man auch in einem solchen Fall das durch  $\Gamma$  berandete Gebiet (das „Innere“) definieren. Ferner bleibt der Satz von Gauß–Bonnet in dieser Situation weiterhin gültig. Weitere Details zu diesem Thema findet man etwa in [Kam38].

Das Integral der Geodätischen Krümmung besteht exakter formuliert eigentlich aus vier Summanden

$$\int_{\Gamma} \kappa_g(s) ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\beta_i} \kappa_g(s) ds = \int_{\beta_2} \kappa_g(s) ds + \int_{\beta_4} \kappa_g(s) ds$$

von denen jedoch die Integrale für  $\beta_1$  und  $\beta_3$  trivial sind, da es sich bei beiden Kurven um Segmente Geodätischer Kurven handelt. Zur Abkürzung setzen wir von nun an  $v_1(u) := v(u; t)$  und  $v_2(u) := v(u; t + \Delta t)$ . Für die Bogenlänge  $s(v) = \int_{v_1(\mu)}^{v_2(\mu)} \|\beta'_2(\eta)\| d\eta$  der Isoparameterkurve  $\beta_2$  gilt

$$s'(v) = \|\beta'_2(v)\| = \|\mathbf{r}_v\| = G^{\frac{1}{2}},$$

so daß nach Substitution

$$\int_{\beta_2} \kappa_g(s) ds = \int_{v_1(\mu)}^{v_2(\mu)} \kappa_g(v) G^{\frac{1}{2}} dv$$

gilt. Um das Integral der Geodätischen Krümmung von  $\beta_2$  weiter zu vereinfachen, benutze man die Identität

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_{vv}}{\|\mathbf{r}_v\|^2} - \frac{\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv} \rangle}{\|\mathbf{r}_v\|^3} \mathbf{r}_v$$

für den Krümmungsvektor  $\mathbf{k}$  von  $\beta_2$ . Der Vektor

$$\mathbf{w} := -\frac{\beta'_2}{\|\beta'_2\|} \wedge \mathbf{N}$$

hat die Länge Eins und zeigt in die tangentielle Richtung orthogonal zu  $\beta'_2$ , in der die Geodätische Krümmung von  $\beta_2$  durch orthogonale Projektion des Krümmungsvektors zu messen ist. Man berechnet also

$$\kappa_g = \langle \mathbf{k}, \mathbf{w} \rangle = \det \left( \frac{\beta'_2}{\|\beta'_2\|}, \mathbf{k}, \mathbf{N} \right) = G^{-\frac{3}{2}} \det(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{N}),$$

so daß folglich

$$\int_{\beta_2} \kappa_g(s) ds = \int_{v_1(\mu)}^{v_2(\mu)} G^{-1} \det(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{N}) dv \quad (3.15)$$

gilt. Analog kann man bei der Teilkurve der Progenitorkurve  $\beta_4$  verfahren. Diese war nach Voraussetzung nach Bogenlänge parametrisiert, so daß der Krümmungsvektor mit der zweiten Ableitung  $\beta''_4$  übereinstimmt und folglich

$$\int_{\beta_4} \kappa_g(s) ds = \int_{t+\Delta t}^t \det(\beta'_4, \beta''_4, \mathbf{N}) d\tau = \int_{t+\Delta t}^t \det(\alpha', \alpha'', \mathbf{N}) d\tau \quad (3.16)$$

gilt.

Zur Behandlung des Oberflächenintegrals der Gaußkrümmung in Gleichung (3.14) zerlegen wir das Gebiet  $R$  in zwei Teilregionen  $R_1$  und  $R_2$ , indem wir es längs der Isoparameterlinie  $u = 0$  unterteilen. Da das Flächenelement  $d\sigma = (EG - F^2)^{1/2}$  genügt, erhält man

$$\begin{aligned} \int \int_R K(\sigma) d\sigma &= \int \int_{R_1} K(\sigma) d\sigma + \int \int_{R_2} K(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\mu \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} K(u, v) (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} dv du + \Delta t \Delta K. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Der zweite Summand in Gleichung (3.17), den man für das Integral über das Teilgebiets  $R_2$  erhält, ergibt sich wie folgt. Da die Gaußkrümmung für  $C^2$ -stetige Flächen eine stetige Funktion auf  $S$  ist, kann man den Mittelwertsatz für mehrfache Integrale anwenden. Es gibt daher Parameterwerte  $(\xi, \eta) \in \mathbf{r}^{-1}(R_2)$ , so daß die Gleichung

$$\int \int_{R_2} K(\sigma) d\sigma = K(\xi, \eta) \int \int_{R_2} d\sigma$$

erfüllt ist. Da sich mit  $\Delta t \rightarrow 0$  das Gebiet  $R_2$  in dem Flächenpunkt  $\mathbf{p} = \alpha(t)$  zusammenzieht, strebt der Term  $K(\xi, \eta)$  gegen  $K(0, 0)$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ . Der Ausdruck  $\int \int_{R_2} d\sigma$  entspricht dem Flächeninhalt der Region  $R_2$ . Setzt man  $M := \max_{R_2} \{(EG - F^2)^{1/2}\}$  und  $u_2 := u_\alpha(t + \Delta t)$ , so kann der Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} \int \int_{R_2} d\sigma &\leq \int_0^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} dv du \\ &\leq M \int_0^{u_2} v_2(u) - v_1(u) du = M u_2 (v_2(\xi_2) - v_1(\xi_1)) \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Hierbei wurde der Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzt, der die Existenz von  $\xi_1, \xi_2 \in (0, u_2)$  garantiert, so daß der letzte Umformungsschritt gilt. Da mit  $\Delta t \rightarrow 0$  der Parameter  $u_2 = u_\alpha(t + \Delta t)$  gegen  $u_\alpha(t) = 0$  strebt, gilt auch  $(v_2(\xi_2) - v_1(\xi_1)) \rightarrow 0$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ . Nach dem Satz von Taylor ergibt sich ferner

$$u_2 = u_\alpha(t + \Delta t) = u_\alpha(t) + \Delta t u'_\alpha(t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''_\alpha(\tau) = \Delta t u'_\alpha(t) + \frac{\Delta t^2}{2} u''_\alpha(\tau)$$

mit einem  $\tau \in (t, t + \Delta t)$ . Daher kann man

$$\int \int_{R_2} K(\sigma) d\sigma = \Delta t \Delta K$$

schreiben, wobei der Term  $\Delta K := \Delta K(\Delta t)$  für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen Null strebt.

Wir definieren mit

$$\begin{aligned} f(u, v) &:= (G(u, v))^{-1} \det(\mathbf{r}_v(u, v), \mathbf{r}_{vv}(u, v), \mathbf{N}(u, v)), \\ g(\tau) &:= \det(\boldsymbol{\alpha}'(\tau), \boldsymbol{\alpha}''(\tau), \mathbf{N}(u_\alpha(\tau), v_\alpha(\tau))), \\ h(u, v) &:= K(u, v) \left( E(u, v) G(u, v) - (F(u, v))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

die Integrandenfunktionen aus (3.15), (3.16) und (3.17). Alle drei Funktionen sind nach Voraussetzung stetig. Wendet man den Mittelwertsatz der Integralrechnung auf jedes der drei Integrale an, so führt man Gleichung (3.14) äquivalent in die Identität

$$\begin{aligned} \pi - \varphi - \psi &= \Delta v(\mu) (f(\mu, v_1(\mu)) + \Delta f) - \Delta t (\kappa_g(t) + \Delta g) \\ &\quad + \int_0^\mu \Delta v(u) (h(u, v_1(u)) + \Delta h) du + \Delta t \Delta K \end{aligned} \quad (3.18)$$

über. Dabei bezeichnet  $\kappa_g(t)$  die Geodätische Krümmung der Progenitorkurve  $\boldsymbol{\alpha}$  zum Parameter  $t$  und  $\Delta v(u) := v_2(u) - v_1(u)$ . Die Terme  $\Delta f := \Delta f(\mu; \Delta t)$ ,  $\Delta g := \Delta g(\Delta t)$  und  $\Delta h := \Delta h(u; \Delta t)$  sind die Differenzen von  $f(\mu, v_1(\mu))$ ,  $\kappa_g(t)$  bzw.  $h(u, v_1(u))$  zu den Mittelwerten der jeweiligen Integrale. Da die Mittelwerte von den betrachteten Intervallen  $(v_1(u), v_2(u)) = (v(u; t), v(u; t + \Delta t))$  und damit von  $\Delta t$  abhängen, handelt es sich im Fall von  $\Delta f$  und  $\Delta h$  um Funktionenscharen zur Variablen  $u$  und Parameter  $\Delta t$ . Offensichtlich konvergiert für  $\Delta t \rightarrow 0$  der Restterm  $\Delta g$  gegen Null. Aufgrund der Stetigkeit der Offsetabbildung gibt es ferner für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , so daß aus  $|t_1 - t_2| < \delta$  die Abschätzung  $|u(s, t_1) - u(s, t_2)| < \varepsilon$  für alle  $s$  folgt. Da nun beide Funktionen  $f$  und  $h$  ebenfalls stetig sind, folgt für die Funktionenfolgen  $\Delta f$  und  $\Delta h$  die gleichmäßige Konvergenz bezüglich  $u$  gegen die Nullfunktion, d.h. es gilt  $\Delta f, \Delta h \rightarrow 0$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Um die rechte Seite von Gleichung (3.18) zu vereinfachen, benutze man den Mittelwertsatz der Differentialgleichung, um zunächst

$$\cos(\pi - \psi) - \cos(\varphi) = -(\pi - \psi - \varphi) (\sin(\varphi) + \Delta s)$$

zu erhalten. Der Term  $\Delta s = \Delta s(\mu; \Delta t)$  entspricht der Differenz von  $-\sin(\varphi)$  zu dem Mittelwert der Ableitung des Kosinus im Intervall  $(\varphi, \pi - \psi)$ . Die Abhängigkeit von  $\Delta s$  vom Parameter  $\Delta t$  ergibt sich aus der Abhängigkeit des Außenwinkels  $\psi$  von der Wahl von  $\Delta t$ . Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der induzierten Geodätischen  $\boldsymbol{\gamma}_{t+\Delta t}$  gegen  $\boldsymbol{\gamma}_t$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ , konvergiert  $\Delta s \rightarrow 0$  gleichmäßig bezüglich  $\mu$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ . Da ferner für den Außenwinkel  $\varphi \notin \{\pi, 2\pi\}$  gelten muß, ist  $\sin(\varphi) \neq 0$  erfüllt und wir können

$$\pi - \varphi - \psi = -(\cos(\pi - \psi) - \cos(\varphi)) (\sin(\varphi) + \Delta s)^{-1} \quad (3.19)$$

schreiben. Für den Kosinus des Winkels  $\varphi$  gilt weiter

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \left\langle \mathbf{r}_u + \frac{d}{du} v_1 \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \right\rangle \left\| \mathbf{r}_u + \frac{d}{du} v_1 \mathbf{r}_v \right\|^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{r}_v\|^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( F + \frac{d}{du} v_1 G \right) \left( E + 2 \frac{d}{du} v_1 F + \left( \frac{d}{du} v_1 \right)^2 G \right)^{-\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten der ersten Fundamentalform an den Parametern  $(\mu, v_1(\mu))$  auszuwerten sind. Analog folgt für den Winkel  $\pi - \psi$

$$\cos(\pi - \psi) = \left( F + \frac{d}{du} v_2 G \right) \left( E + 2 \frac{d}{du} v_2 F + \left( \frac{d}{du} v_2 \right)^2 G \right)^{-\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}},$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $\pi - \psi$  dem Außenwinkel im Eckpunkt  $\mathbf{r}(\mu, v_2(\mu))$  bei umgekehrten Durchlaufsinns entspricht. Hier sind  $E$ ,  $F$  und  $G$  jeweils in  $(\mu, v_2(\mu))$  auszuwerten. Definiert man nun die reellwertige Hilfsfunktion

$$p(x, y, z) := (F(x, y) + z G(x, y)) \left( E(x, y) + 2 z F(x, y) + z^2 G(x, y) \right)^{-\frac{1}{2}} G(x, y)^{-\frac{1}{2}},$$

die für alle  $(x, y, z) \in \mathbf{r}^{-1}(S) \times \mathbb{R}$  definiert ist, so beobachtet man zunächst, daß  $p$  stetig differenzierbar ist, da  $S$  nach Voraussetzung eine  $C^2$ -stetige Fläche ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= p\left(\mu, v_1(\mu), \frac{d}{du} v_1(\mu)\right), \\ \cos(\pi - \psi) &= p\left(\mu, v_2(\mu), \frac{d}{du} v_2(\mu)\right). \end{aligned}$$

Daher kann man wieder den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden, um die Existenz eines Vektors  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_y, \xi_z)$  zu folgern, so daß  $\xi_y \in (v_1(\mu), v_2(\mu))$ ,  $\xi_z \in (\frac{d}{du} v_1(\mu), \frac{d}{du} v_2(\mu))$  und

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \psi) - \cos(\varphi) &= p\left(\mu, v_2(\mu), \frac{d}{du} v_2(\mu)\right) - p\left(\mu, v_1(\mu), \frac{d}{du} v_1(\mu)\right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} p(\mu, \boldsymbol{\xi}), \frac{\partial}{\partial z} p(\mu, \boldsymbol{\xi}) \right) \left( v_2(\mu) - v_1(\mu), \frac{d}{du} v_2(\mu) - \frac{d}{du} v_1(\mu) \right) \\ &= (a + \Delta a) \Delta v(\mu) + (b + \Delta b) \Delta v_u(\mu) \end{aligned} \quad (3.20)$$

gilt. In der letzten Formulierung des Mittelwertsatzes in Gleichung (3.20) ist

$$a := a(\mu) := \frac{\partial}{\partial y} p\left(\mu, v_1(\mu), \frac{d}{du} v_1(\mu)\right) \quad \text{und} \quad b := b(\mu) := \frac{\partial}{\partial z} p\left(\mu, v_1(\mu), \frac{d}{du} v_1(\mu)\right)$$

zu setzen. Die Differenzen  $\Delta a = \Delta a(\mu; t)$  und  $\Delta b = \Delta b(\mu; t)$  konvergieren wieder gleichmäßig bezüglich  $\mu$  gegen die Nullfunktion für  $\Delta t \rightarrow 0$ . Der Term  $\Delta v_u(\mu)$  wurde in (3.20) als Abkürzung für die Differenz der Ableitungen von  $v_1$  und  $v_2$  benutzt, d.h.  $\Delta v_u(\mu) := \frac{d}{du} v_2(\mu) - \frac{d}{du} v_1(\mu)$ . Die partielle Ableitung der Funktion  $p$  bezüglich der Variablen  $z$  genügt der Identität

$$\frac{\partial}{\partial z} p = \frac{EG - F^2}{G^{\frac{1}{2}} (E + 2zF + z^2G)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

so daß man ferner  $b(\mu; t) \neq 0$  für alle  $\mu$  und alle  $\Delta t$  garantieren kann.

Durch Kombinieren der Ergebnisse aus Gleichung (3.19) und (3.20) mit (3.18) erhält man nun die Identität

$$\begin{aligned} & -(\sin(\varphi) + \Delta s)^{-1} \{(a + \Delta a) \Delta v(\mu) + (b + \Delta b) \Delta v_u(\mu)\} \\ &= -(\kappa_g + \Delta g - \Delta K) \Delta t + (f + \Delta f) \Delta v(\mu) + \int_0^\mu (h + \Delta h) \Delta v(u) du. \end{aligned}$$

Durch Umstellen dieser Gleichung ergibt sich (unter Beachtung von  $b \neq 0$ ) die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\Delta v_u(\mu)}{\Delta t} = A(\mu; \Delta t) + B(\mu; \Delta t) \frac{\Delta v(\mu)}{\Delta t} + C(\mu; \Delta t) \int_0^\mu D(u; \Delta t) \frac{\Delta v(u)}{\Delta t} du \quad (3.21)$$

mit den stetigen Koeffizientenfunktionen

$$A(\mu; \Delta t) := \frac{(\kappa_g(t) + \Delta g - \Delta K) (\sin(\varphi) + \Delta s)}{b + \Delta b} \longrightarrow \frac{\kappa_g(t) \sin(\varphi)}{b} =: A(\mu) \quad (3.22a)$$

$$B(\mu; \Delta t) := -\frac{(f + \Delta f) (\sin(\varphi) + \Delta s) + (a + \Delta a)}{b + \Delta b} \longrightarrow \frac{f \sin(\varphi) + a}{b} =: B(\mu) \quad (3.22b)$$

$$C(\mu; \Delta t) := -\frac{\sin(\varphi) + \Delta s}{b + \Delta b} \longrightarrow \frac{\sin(\varphi)}{b} =: C(\mu) \quad (3.22c)$$

$$D(\mu; \Delta t) := h + \Delta h \longrightarrow h =: D(\mu). \quad (3.22d)$$

Die Konvergenz für  $\Delta t \rightarrow 0$  ist dabei gleichmäßig bezüglich  $\mu$ . Nach Gleichung (3.21) sind die Differenzenquotienten  $y(u; \Delta t) := \Delta v(u)/\Delta t$  für alle  $\Delta t \neq 0$  Lösung des Typs von Integro-Differentialgleichung, wie er in Lemma 3.2.5 besprochen wurde. Ferner genügen sie den Anfangswertbedingungen

$$y(0; \Delta t) = \frac{v(0; t + \Delta t) - v(0; t)}{\Delta t} = \frac{v(0; t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.23)$$

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen  $u_1 := u_\alpha(t) = 0$ ,  $u_2 := u_\alpha(t + \Delta t)$ ,  $v_1 := v_\alpha(t) = 0$  und  $v_2 := v_\alpha(t + \Delta t)$ . Der Zähler des Anfangswertes in (3.23) kann in der Form

$$v(u_1; t + \Delta t) - v(u_1; t) = v(u_1; t + \Delta t) - v(u_2; t + \Delta t) + v(u_2; t + \Delta t) - v(u_1; t)$$

erweitert werden. Da die Funktion  $v(u; t + \Delta t)$  wie gesehen für jedes beliebig, aber fest gewählte  $\Delta t$  zweimal stetig nach  $u$  differenzierbar ist, und sich die erste Ableitung in  $u_2 = u_\alpha(t + \Delta t)$  gemäß Gleichung (3.13) ergibt, gilt mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} & v(u_1; t + \Delta t) - v(u_2; t + \Delta t) \\ &= \frac{d}{du} v(u_2; t + \Delta t) (u_1 - u_2) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} v(\xi; t + \Delta t) (u_1 - u_2)^2 \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial s} v(0, t + \Delta t)}{\frac{\partial}{\partial s} u(0, t + \Delta t)} (u_\alpha(t) - u_\alpha(t + \Delta t)) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} v(\xi; t + \Delta t) (u_\alpha(t) - u_\alpha(t + \Delta t))^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

für ein  $\xi \in (u_1, u_2)$ . Da einerseits nach Voraussetzung die Progenitorkurve  $\alpha$  im Parameter  $t$  in Richtung von  $\mathbf{r}_v$  verläuft, die Geodätische Kurve  $\gamma_t$  andererseits im rechten Winkel zu  $\alpha'(t)$  beginnt, muß

$$\frac{\partial}{\partial s} v(0, t + \Delta t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} v(0, t) = 0 \quad (3.25)$$

für  $\Delta t \rightarrow 0$  gelten. Der Grenzübergang ist dabei zulässig, da die Progenitorkurve nach Voraussetzung  $C^2$ -stetig ist, und die Startrichtungen der Geodätischen Kurven ein stetiges tangentiales Vektorfeld längs  $\alpha$  bilden.

Wendet man nun den Taylorsche Satz auf die  $u$ -Koordinatenfunktion der Progenitorkurve an, so erhält man die Existenz eines  $\tau \in (t, t + \Delta t)$ , so daß

$$u_\alpha(t) - u_\alpha(t + \Delta t) = -u'_\alpha(t) \Delta t - \frac{1}{2} u''_\alpha(\tau) \Delta t^2 = -\Delta t \left( u'_\alpha(t) + \frac{1}{2} u''_\alpha(\tau) \Delta t \right)$$

gilt. Daher kann man Gleichung (3.24) in der Form

$$v(u_1; t + \Delta t) - v(u_2; t + \Delta t) = \Delta t \Delta w$$

schreiben, wobei der Term  $\Delta w$  aufgrund von (3.25) für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen Null strebt. Zusammen mit Gleichung (3.23) erhält man damit für die Anfangswerte der Integro-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y(0; \Delta t) &= \frac{v(u_1; t + \Delta t) - v(u_2; t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{v(u_2; t + \Delta t) - v(u_1; t)}{\Delta t} \\ &= \Delta w + \frac{v_\alpha(t + \Delta t) - v_\alpha(t)}{\Delta t} \longrightarrow v'_\alpha(t) \quad \text{für } \Delta t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nach Lemma 3.2.5 hat die Integro-Differentialgleichung (3.21) mit den Koeffizientenfunktionen  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$ ,  $C(\mu)$  und  $D(\mu)$  zu dem Anfangswert  $y(0; 0) = v'_\alpha(t)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $y(u; 0)$ . Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Koeffizientenfunktionen  $A(\mu; \Delta t)$ ,  $B(\mu; \Delta t)$ ,  $C(\mu; \Delta t)$  und  $D(\mu; \Delta t)$  gemäß (3.22) strebt die Folge der rechten Seiten von Gleichung (3.21) gegen die rechte Seite der Integro-Differentialgleichung, die  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$ ,  $C(\mu)$  und  $D(\mu)$  als Koeffizienten besitzt. Da die zu  $y(0; \Delta t)$  gehörigen Anfangswerte nach (3.26) gegen  $v'_\alpha(t)$  konvergieren, gilt für die Folge der linken Seiten von (3.21)

$$\frac{d}{du}y(u; \Delta t) = \frac{\frac{d}{du}v(u; t + \Delta t) - \frac{d}{du}v(u; t)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{d}{du}y(u; 0) \quad \text{für } \Delta t \rightarrow 0.$$

Daher existiert die partielle Ableitung  $(\partial^2/\partial u \partial t)v(u; t)$  und ist stetig. Sie stimmt mit der Ableitung  $(d/du)y(u; 0)$  der eindeutig bestimmten Lösung der Integro-Differentialgleichung zum Anfangswert  $y(0; 0) = v'_\alpha(t)$  überein. Gleichzeitig ist damit die Existenz der stetigen partiellen Ableitung  $(\partial/\partial t)v(u; t)$  gezeigt, was den Beweis vervollständigt. ■

Mit Hilfe des letzten Hilfssatzes ergibt sich das Hauptresultat dieses Abschnitts als Folgerung.

### Satz 3.2.7

Sei  $\alpha$  eine  $C^2$ -stetige, reguläre Flächenkurve einer  $C^2$ -stetigen, regulären Fläche  $S$ . Dann existiert für jedes Teilintervall  $(t_0 - \bar{t}, t_0 + \bar{t})$  des Parameterraums von  $\alpha$  ein Abstandswert  $\bar{s}$ , so daß die Abbildung

$$(s, t)^T \mapsto (u(s, t), v(s, t))^T = \mathcal{O}_\alpha(s, t)$$

für  $|s| < \bar{s}$  und  $|t - t_0| < \bar{t}$  stetige partielle Ableitungen  $\partial_{ss}^2 \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\partial_{st}^2 \mathcal{O}_\alpha$  (und daher auch  $\partial_t \mathcal{O}_\alpha$ ) besitzt.

#### Beweis:

Die in Lemma 3.2.6 untersuchte Funktion war gemäß Gleichung (3.12) durch  $v(u; t) = v(s(u; t); t)$  gegeben. Der Funktionswert  $s(u, t)$ , der in Gleichung (3.11) eingeführt wurde, entspricht der Bogenlänge, die die Geodätischen Kurve  $\gamma_t$  orthogonal ausgehend vom Kurvenpunkt  $\alpha(t)$  zurücklegen muß, um den Parameter  $u$  zu erreichen. Die Spur des Segments dieser Geodätischen wird nach Konstruktion durch die Kurve

$$\beta_t(u) := \mathbf{r}(u, v(u; t))$$

durchlaufen. Zu beachten ist, daß diese Kurve im allgemeinen *nicht* proportional zu ihrer Bogenlänge parametrisiert ist, also nicht der Parametrisierung des Geodätischen Segments von  $\gamma_t$  entspricht, obwohl ihre Spuren identisch sind.

Wir benutzen die Parametrisierung von  $\beta_t$ , um die Bogenlänge des betrachteten Segments zu messen. Es ergibt sich

$$s(u; t) = \int_{u_\alpha(t)}^u \left( E + 2F \frac{\partial}{\partial u} v(\mu; t) + G \left( \frac{\partial}{\partial u} v(\mu; t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu,$$

wobei die Koeffizienten der ersten Fundamentalform  $E$ ,  $F$  und  $G$  an der Stelle  $(\mu, v(\mu; t))$  auszuwerten sind. Da  $S$  nach Voraussetzung eine  $C^2$ -stetige Fläche ist, sind  $E$ ,  $F$  und  $G$   $C^1$ -stetige Funktionen. Da nach Hilfssatz 3.2.6 die partiellen Ableitungen  $(\partial/\partial t)v(u; t)$  und  $(\partial^2/\partial u \partial t)v(u; t)$  existieren und in den angegebenen Bereichen stetig sind, existieren die stetigen partiellen Ableitungen  $(\partial/\partial t)s(u; t)$ ,  $(\partial^2/\partial u \partial t)s(u; t)$  und  $(\partial^2/\partial u \partial u)s(u; t)$  ebenfalls.

Nach Konstruktion (siehe Gleichung (3.11)) ist  $u = u(s, t)$  eindeutig durch  $s = s(u; t)$  bestimmt. Folglich sind die Funktionen  $u(s, t)$  und  $(\partial/\partial s)u(s, t)$   $C^1$ -stetige Funktionen. Da  $v(s, t)$  durch Substituieren von  $u = u(s, t)$  aus  $v(u; t)$  entsteht, sind ferner  $v(s, t)$  und  $(\partial/\partial s)v(s, t)$  stetig partiell differenzierbare Funktionen. Dies zeigt die Behauptung. ■

Der Beweis von Lemma 3.2.6 kann modifiziert werden, um die folgende, weitergehende Aussage zu verifizieren.

### Satz 3.2.8

Sei  $\alpha$  eine  $C^{p+1}$ -stetige, reguläre Flächenkurve einer  $C^{p+1}$ -stetigen, regulären Fläche  $S$  mit  $p \geq 1$ . Dann sind die Offsetabbildung

$$(s, t)^T \mapsto (u(s, t), v(s, t))^T = \mathcal{O}_\alpha(s, t)$$

sowie ihre partielle Ableitung  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha$  lokal  $C^p$ -stetig.

Der Nachweis dieses Satzes folgt den Beweisen von 3.2.6 und 3.2.7, liefert folglich keine neuen Einblicke. Wir geben daher an dieser Stelle nur eine kurze Beweisskizze an. Fordert man in Lemma 3.2.5, daß die Funktionen  $\eta : K \rightarrow \mathbb{R}$  und  $A, B, C, D : J \times K \rightarrow \mathbb{R}$   $C^p$ -stetige Funktionen sind, so ist jede (eindeutig bestimmte) Lösung  $y(u; \theta)$  des Anfangswertproblems (3.4) wieder eine  $C^p$ -stetige Funktion beider Veränderlicher. Dies folgt aufgrund der stetig differenzierbaren Abhängigkeit der Lösungen von Volterra-Integralgleichungen (siehe z.B. [Wal93], S. 130 ff.). Die partielle Ableitung  $(\partial/\partial t)v(u; t)$  ist nun Lösung der Integro-Differentialgleichung (3.21) mit Koeffizientenfunktionen  $A(\mu)$ ,  $B(\mu)$ ,  $C(\mu)$ ,  $D(\mu)$  definiert in (3.22) und Anfangswert  $v'_\alpha(t)$  (vgl. Beweis von Lemma 3.2.6). Man kann nun verifizieren, daß diese Koeffizientenfunktionen  $C^p$ -stetig sind (ebenso wie der Anfangswert  $v'_\alpha(t)$ ). Folglich sind  $(\partial/\partial t)v(u; t)$  und  $(\partial^2/\partial u \partial t)v(u; t)$   $p$ -fach stetig partiell differenzierbar. Die Aussage von Satz 3.2.8 ergibt sich dann mit den gleichen Argumenten wie in dem Beweis zu Satz 3.2.7.

Ein zu Satz 3.2.8 analoges Ergebnis für die Offsetfunktion  $\mathcal{O}_p$  bezüglich eines Flächenpunktes  $\mathbf{p} \in S$  läßt sich durch Modifikation der Beweise dieses Abschnitts analog beweisen. Die explizite Beweisführung findet man auch in [Har50].

### Satz 3.2.9

Sei  $S$  eine  $C^{p+1}$ -stetige, reguläre Fläche ( $p \geq 1$ ) und  $\mathbf{p}$  ein beliebiger Flächenpunkt. Dann sind die Offsetabbildung

$$(s, t)^T \mapsto (u(s, t), v(s, t))^T = \mathcal{O}_p(s, t)$$

sowie ihre partielle Ableitung  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha$  lokal  $C^p$ -stetig.

Die Aussagen von Satz 3.2.7, und damit auch von Satz 3.2.8 und 3.2.9, sind scharf, wie Hartman in [Har51] zeigen konnte. In diesem Artikel gibt er das Beispiel einer  $C^2$ -stetigen parametrischen Fläche, in dem die Offsetfunktion  $(s, t)^T \mapsto (u(s, t), v(s, t)) = \mathcal{O}(s, t)$  bezüglich eines Flächenpunktes nicht zweimal differenzierbar ist.

### 3.3 Eigenschaften Geodätischer Offsetkurven

Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts ist die Geodätische Offsetfunktion (lokal) eine mindestens einmal stetig differenzierbare Abbildung, vorausgesetzt die betrachtete Fläche und Progenitorkurve ist  $C^2$ -stetig. Der folgende Hilfssatz beschreibt, welche geometrischen Eigenschaften die Ableitungen der Offsetfunktion besitzen. Er wurde nur für den Fall der Offsetkurve bezüglich einer Progenitorkurve  $\alpha$  formuliert; selbstverständlich gelten die analogen Aussagen auch für Offsetkurven eines Flächenpunktes  $p$  und die zugehörige Offsetfunktion  $\mathcal{O}_p$ .

#### Lemma 3.3.1

Sei  $\mathbf{r}$  eine  $C^{p+1}$ -stetige Parametrisierung der Fläche  $S$  und  $\alpha(t)$  eine  $C^{p+1}$ -stetige Progenitorkurve ( $p \geq 1$ ). Dann ist die Geodätische Offsetfunktion  $\mathcal{O}_\alpha$  lokal  $p$ -fach stetig partiell differenzierbar. Die ersten partiellen Ableitungen  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha$  und  $\partial_t \mathcal{O}_\alpha$  genügen den Identitäten

$$\gamma'_{t_0}(s) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_s \mathcal{O}_\alpha \quad (3.27a)$$

$$\alpha'_{s_0}(t) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathcal{O}_\alpha, \quad (3.27b)$$

wobei  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  die Jacobi-Matrix der Parametrisierung  $\mathbf{r}$  ist.

#### Beweis:

Nach Satz 3.2.8 ist die Geodätische Offsetfunktion eine  $C^p$ -stetige Abbildung. Die Gleichungen (3.27a) und (3.27b) folgen durch Anwenden der Kettenregel. ■

Eine Offsetkurve ist selbst im Euklidischen Fall nicht notwendigerweise eine reguläre Kurve. Betrachtet man beispielsweise die ebene Parabel in der Parametrisierung  $(t, t^2)$  sowie ihre Offsetkurve im Abstand  $-1/2$  (linksseitiger Offset), so ergibt sich ein singulärer Punkt für den Parameterwert  $t = 0$ . Diese singulären Punkten sind dadurch charakterisiert, daß die zugehörige Tangente der Offsetkurve verschwindet. Es wird sich im folgenden herausstellen, daß solche Punkte eine wichtige Rolle in unseren Untersuchungen spielen werden. Wir führen daher den folgenden Begriff ein.

#### Definition 3.3.2

Ein Flächenpunkt  $q \in S$  heißt Fokaler Punkt einer gegebenen Progenitorkurve  $\alpha$  bzw. eines Progenitorpunktes  $p \in S$ , falls er ein singulärer Punkt der Geodätischen Offsetkurve  $\alpha_{s_0}$  zum Parameter  $t$  und einem gewissen Abstand  $s_0$  ist, d.h. falls  $\alpha'_{s_0}(t) = \mathbf{0}$  gilt. Der zugehörige Geodätische Abstand  $s_0$  wird Fokaler Abstand genannt.

Aufgrund von Lemma 3.3.1 ist ein Fokalpunkt  $q = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  im Fokalen Abstand  $s_0$  zu einer Progenitorkurve  $\alpha$  bzw. zu einem Progenitorpunkt  $p$  auch dadurch charakterisiert, daß es einen Kurvenparameter (bzw. einen tangentialen Winkel)  $t$  gibt, so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\alpha(s_0, t) &= (u_0, v_0) \quad \text{und} \quad \partial_t \mathcal{O}_\alpha(s_0, t) = \mathbf{0} \\ (\text{bzw. } \mathcal{O}_p(s_0, t) &= (u_0, v_0) \quad \text{und} \quad \partial_t \mathcal{O}_p(s_0, t) = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich gibt es Progenitorobjekte, die keine Fokalfpunkte besitzen. Als Beispiele können Punkte und Geraden in der Euklidischen Ebene angeführt werden. Aber auch in anderen, nicht Euklidischen Geometrien gibt es Objekte, die keine Fokalfpunkte haben.

Im Fall eines Progenitorpunktes  $\mathbf{p}$  wird ein zugehöriger Fokalfpunkt  $\mathbf{q}$  auch als zu  $\mathbf{p}$  *konjugierter Punkt* bezeichnet (siehe z.B. [BL73], S. 298 ff.). Die Menge der Fokalfpunkte einer Kurve wird in der Literatur häufig auch unter dem Namen *Evolute* eingeführt. Im Euklidischen Fall entspricht sie der Menge aller Krümmungszentren von  $\alpha$  (vgl. [Sto69], S. 29 ff. oder [BG92], S. 118 ff.). In [BL73] (S. 218 ff.) wird auf die Situation von Evoluten (dort *Hüllkurve*) auf parametrischen Flächen eingegangen. Um einen einheitlichen Begriff für beide Situationen — Progenitorpunkt und –kurve — benutzen zu können, haben wir uns für die Bezeichnung „Fokalfpunkt“ entschieden. Diese Namensgebung ist motiviert durch die Tatsache, daß benachbarte Geodätische, die im Progenitorobjekt starten, sich in dem fraglichen Fokalfpunkt schneiden, das Bündel der Geodätischen Kurven also fokussiert.

Nach einem Resultat von Jacobi ist eine Geodätische Kurve nicht mehr distanzminimal, nachdem sie einen Fokalfpunkt eines Progenitorpunkts passiert hat. Einzelheiten zu dem Theorem von Jacobi kann z.B. [dC76], S. 415 ff. entnommen werden. Dieser Satz jedoch deutet bereits an, warum die Menge aller Fokalfpunkte für unsere Belange von großem Interesse ist. Allerdings kann eine Geodätische Kurve ihre Distanzminimalität bereits verloren haben, *bevor* sie einen Fokalfpunkt erreicht hat. Die Menge aller Punkte, in der Geodätische aufhören, die Bogenlänge zu minimieren, nennt man *Cut Locus*. Für eine detaillierte Diskussion des Cut Locus sei der interessierte Leser auf [Wol85] verwiesen.

In Abschnitt 2.2 wurde bereits erwähnt, daß man durch Lösen der Geodätischen Differentialgleichung nicht nur die Parameter  $(u(s), v(s))$  eines Punktes der Geodätischen Kurve erhält, sondern ebenfalls die zugehörige Tangente der Parameterraumkurve  $(u'(s), v'(s))$ . Daher können  $\mathcal{O}$  und die partielle Ableitung  $\partial_s \mathcal{O}$  durch Integrieren von System (2.10) berechnet werden.<sup>2</sup> Im Rest dieses Abschnitts wollen wir zeigen, wie man die fehlende partielle Ableitung  $\partial_t \mathcal{O}$  erhalten kann. Hierfür ist es manchmal nützlich, in Verallgemeinerung zu der Vorgehensweise bei Geodätischen Polarkoordinaten (siehe Gleichung (2.15)), mit

$$\mathbf{r}^\alpha(s, t) := (\mathbf{r} \circ \mathcal{O}_\alpha)(s, t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r}^p(s, t) := (\mathbf{r} \circ \mathcal{O}_p)(s, t) \quad (3.28)$$

lokal (d.h. in einer gewissen Umgebung des gegebenen Progenitorobjekts) eine neue Parametrisierung der betrachteten Fläche einzuführen. Die Jacobi Matrix dieser Parametrisierung ist nach Hilfssatz 3.3.1 durch  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)(\partial_s \mathcal{O}, \partial_t \mathcal{O})$  gegeben. Daher ist die in (3.28) eingeführte Parametrisierung regulär, solange man sich nicht in einem Fokalfpunkt des Progenitorobjekts befindet (hier gilt  $\partial_t \mathcal{O} = \mathbf{0}$ ). Wir werden diese durch die Offsetfunktion induzierte Parametrisierung *Geodätische Koordinaten* nennen. Unser oben formuliertes Ziel dieses Abschnitts, eine Berechnungsmethode der partiellen Ableitung  $\partial_t \mathcal{O}$  zu entwickeln, entspricht der Vorgabe, die partiellen Ableitungen der Geodätischen Koordinaten berechnen zu wollen. Die zweiten partiellen Ableitungen dieser Parametrisierung werden Inhalt des nachfolgenden Abschnitts 3.4 sein.

Der folgende Hilfssatz verallgemeinert in Teilen Lemma 2.4.2. Dort wurde insbesondere bewiesen, daß der Koeffizient  $F^p$  der ersten Fundamentalform bzgl. der Parametrisierung  $\mathbf{r}^p$  stets Null ist, also die Geodätische Offsetkurve bezüglich eines Punktes  $\mathbf{p}$  die zugehörige Geodätische immer im rechten Winkel schneidet. Dies trifft nicht nur im Fall eines Progenitorpunktes, sondern auch bei Progenitorkurven zu.

<sup>2</sup>Im folgenden wird die Bezeichnung  $\mathcal{O}$  anstelle von  $\mathcal{O}_p$  bzw.  $\mathcal{O}_\alpha$  benutzt werden, wenn Aussagen über Offsetfunktionen gemacht werden, die unabhängig davon gelten, ob ein Progenitorpunkt oder eine Progenitorkurve betrachtet wird.

**Lemma 3.3.3**

Die Tangentenvektoren der Geodätischen Offsetkurve und der Geodätischen Kurve sind orthogonal zueinander, d.h.

$$\langle \boldsymbol{\alpha}'_s(t), \boldsymbol{\gamma}'_t(s) \rangle = 0 \quad (3.29)$$

gilt für jeden Parameter  $t$  der Progenitorcurve (bzw. jeden tangentialen Winkel  $t$  an dem betrachteten Progenitorpunkt) und jeden Geodätischen Abstand  $s$ . Insbesondere erhält man

$$E^\alpha(s, t) = 1 = E^p(s, t), \quad F^\alpha(s, t) = 0 = F^p(s, t), \quad G^\alpha(s, t) = \|\boldsymbol{\alpha}'_s(t)\|^2 = G^p(s, t)$$

als Formeln für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform bezüglich der in (3.28) eingeführten Parametrisierung  $\mathbf{r}^\alpha$  bzw.  $\mathbf{r}^p$ .

**Beweis:**

Wie bereits oben bemerkt, ist der Hilfssatz im Fall eines Progenitorpunkts bereits mit Lemma 2.4.2 bewiesen. Wir betrachten daher die in Gleichung (3.28) eingeführte Parametrisierung  $\mathbf{r}^\alpha$  in einer Umgebung von  $\boldsymbol{\alpha}$ . Die Koeffizienten  $E^\alpha$  und  $G^\alpha$  der ersten Fundamentalform bezüglich des lokalen Koordinatensystems  $\mathbf{r}_s^\alpha, \mathbf{r}_t^\alpha$  sind nach Lemma 3.3.1 durch

$$\begin{aligned} E^\alpha &= \langle \boldsymbol{\gamma}'_t(s), \boldsymbol{\gamma}'_t(s) \rangle = 1 \\ G^\alpha &= \langle \boldsymbol{\alpha}'_s(t), \boldsymbol{\alpha}'_s(t) \rangle = \|\boldsymbol{\alpha}'_s(t)\|^2 \end{aligned}$$

gegeben. Da die Geodätischen  $\boldsymbol{\gamma}_t$  in der betrachteten Parametrisierung Isoparameterlinien sind, folgt aus der zweiten Gleichung der Geodätischen Differentialgleichungen (2.9)  $\Gamma_{11}^2 (s')^2 = 0$ , was  $\Gamma_{11}^2 = 0$  impliziert. Benutzt man ferner das lineare Gleichungssystem (2.8) von Seite 25, welches die Christoffelsymbole in Beziehung zu den ersten und zweiten partiellen Ableitungen der betrachteten Parametrisierung setzt, so ergibt sich bei Benutzung der ersten beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E^\alpha + \Gamma_{11}^2 F^\alpha &= \langle \mathbf{r}_{ss}^\alpha, \mathbf{r}_s^\alpha \rangle = \frac{1}{2} E_s^\alpha \\ \Gamma_{11}^1 F^\alpha + \Gamma_{11}^2 G^\alpha &= \langle \mathbf{r}_{ss}^\alpha, \mathbf{r}_t^\alpha \rangle = F_s^\alpha - \frac{1}{2} E_t^\alpha \end{aligned} \right\}$$

Da nun, wie gesehen,  $E^\alpha = 1$  und  $\Gamma_{11}^2 = 0$  gilt, folgt aus diesem Gleichungssystem  $\Gamma_{11}^1 = 0 = F_s^\alpha$ . Damit hängt der Koeffizient  $F^\alpha$  nicht von dem Geodätischen Abstand  $s$  ab. Aufgrund der Definition von  $\boldsymbol{\gamma}_t$ , nach der diese Geodätische im rechten Winkel von der Progenitorcurve ausgeht, kann man

$$\langle \boldsymbol{\alpha}'_s(t), \boldsymbol{\gamma}'_t(s) \rangle = F^\alpha(s, t) = F^\alpha(0, t) = \langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\gamma}'_t(0) \rangle = 0$$

schließen, was die Behauptung zeigt. ■

Zu beachten ist, daß Gleichung (3.29) ihre Gültigkeit in und jenseits von Fokalfpunkten behält, wo die Tangentlänge einer Geodätischen Offsetkurve definitionsgemäß verschwindet. Ferner ist es wert, darauf hinzuweisen, daß die partiellen Ableitungen der Offsetfunktion  $\partial_t \mathcal{O}(s, t_0)$  und  $\partial_s \mathcal{O}(s, t_0)$ , also die Tangentenvektoren der zugehörigen Parameterraumkurven, i.a. nicht orthogonal zueinander sind.

Eine wichtige Konsequenz aus Lemma 3.3.3 ist, daß man lediglich das Längenverhalten der Tangenten Geodätischer Offsetkurven kennen muß, um auf die Tangentenvektoren selbst schließen

zu können. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß man die Tangente  $\gamma'_{t_0}$  bereits durch Lösen von System (2.10) ermitteln kann. Daher führen wir die folgende reellwertige Funktion ein:

$$y_{t_0}(s) := \begin{cases} \|\alpha'_s(t_0)\| & \text{falls } \gamma'_{t_0}(s), \alpha'_s(t_0), \mathbf{N} \text{ positiv orientiert ist.} \\ -\|\alpha'_s(t_0)\| & \text{falls } \gamma'_{t_0}(s), \alpha'_s(t_0), \mathbf{N} \text{ negativ orientiert ist.} \end{cases} \quad (3.30)$$

$y_{t_0}(s)$  entspricht der vorzeichenbehafteten Länge der Tangente der Geodätischen Offsetkurve an dem Parameterwert  $t_0$  als Funktion des Geodätischen Abstands  $s$ . Bei dieser Formulierung wird nicht mehr zwischen Progenitorpunkt und –kurve unterschieden, da durch den Kontext jeweils klar ist, welches Progenitorobjekt betrachtet wird. Im Fall einer Progenitor Kurve hat  $y_{t_0}(0)$  nach Konvention stets positives Vorzeichen. (Die Startrichtung der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}$  ist nach Definition 3.2.1 so zu wählen, daß die Vektoren  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$ ,  $\mathbf{N}$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem bilden.) Bei Progenitorpunkten gilt nach Lemma 2.4.2  $y_{t_0}(0) = 0$  und  $y'_{t_0}(0) = 1$ , so daß  $y_{t_0}(\varepsilon) \neq 0$  für alle hinreichend klein gewählten  $\varepsilon > 0$  gilt. Da die Offsetfunktion für ein festes  $t_0$  nach  $s$  differenzierbar ist, kann das Vorzeichen in beiden Fällen nur dann wechseln, wenn die Geodätische einen Fokelpunkt bzgl. des Progenitorobjekts durchläuft. Darüberhinaus ist  $y(s, t) = y_t(s)$  als Funktion beider Veränderlicher unter gewissen Voraussetzungen differenzierbar, wie der folgende Satz besagt.

### Satz 3.3.4

Sei  $\mathbf{r} \in C^{p+1}$  und  $\alpha \in C^{p+1}$  mit  $p \geq 1$ . Für jeden festen Parameter  $t_0$  ist die Längenfunktion  $y_{t_0}(s)$  eine  $C^p$ –stetige Abbildung. Betrachtet man diese Funktion  $y(s, t) = y_t(s)$  als eine Abbildung zweier Veränderlicher, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^p y}{\partial s^i \partial t^j} \quad \text{für alle } i + j = p \text{ mit } i \geq 1$$

und sind stetig.

### Beweis:

Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.2.8. Dort wurde gezeigt, daß die Abbildung, die dem Tupel  $(s, t)$  die Lösung  $(u(s, t), v(s, t), \frac{\partial}{\partial s}u(s, t), \frac{\partial}{\partial s}v(s, t))$  des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.10) zuordnet, eine  $C^p$ –stetige Funktion ist. Insbesondere sind für alle  $r \leq p$  die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^r}{\partial s^i \partial t^j} \frac{\partial}{\partial s} u \quad \text{und} \quad \frac{\partial^r}{\partial s^i \partial t^j} \frac{\partial}{\partial s} v \quad \text{mit } i + j = r$$

stetig. Satz 3.3.4 ergibt damit unter Berücksichtigung der Identität  $\alpha'_s(t) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathcal{O}$ . ■

Zu beachten ist, daß die Aussage von Satz 3.3.4 ist nicht etwa  $y(s, t) \in C^p$  lautet. Betrachtet man z.B.  $C^2$ –stetige Flächen ( $p = 1$ ), so garantiert Satz 3.2.8 lediglich die Existenz der stetigen zweiten partiellen Ableitungen  $(\partial^2/\partial s \partial t)u$  und  $(\partial^2/\partial s \partial t)v$ . Daraus folgt für die Vorzeichenfunktion  $y(s, t)$  die stetige partielle Differenzierbarkeit in Bezug auf  $s$  und die Stetigkeit bezüglich  $t$ . Im folgenden Kontext (solange nicht explizit abweichendes angegeben) sollen die Flächenparametrisierung und die Progenitor Kurve von der Stetigkeitsordnung  $C^{p+1}$  mit  $p \geq 2$  sein. Dies impliziert nach Satz 3.2.8 eine mindestens zweimal stetig partiell differenzierbare Offsetfunktion und nach Satz 3.3.4 eine einmal stetig partiell differenzierbare Längenfunktion  $y(s, t)$ . Für einen beliebigen, aber festen Parameter  $t_0$  existiert unter diesen Voraussetzungen ferner die zweite Ableitung  $y''_{t_0}(s)$ . Der nächste Satz beschreibt, wie man die Funktion  $y_{t_0}(s)$  als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung gewinnen kann.

**Satz 3.3.5**

Die Längenfunktion  $y_{t_0}(s)$  definiert in (3.30) genügt der sogenannten Jacobi Gleichung

$$y''_{t_0}(s) + K(s, t_0) y_{t_0}(s) = 0, \quad (3.31)$$

in der  $K(s, t_0)$  die Gaußkrümmung  $K(\mathcal{O}(s, t_0))$  des Flächenpunktes  $\gamma_{t_0}(s) = \mathbf{r}(\mathcal{O}(s, t_0))$  bezeichnet.

**Beweis:**

Zum Beweis der Aussage führen wir das Vektorfeld

$$\mathbf{J}_{t_0}(s) := \boldsymbol{\alpha}'_s(t_0)$$

der Tangenten Geodätischer Offsetkurven  $\boldsymbol{\alpha}_s(t_0)$  entlang der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}(s)$  ein. Offensichtlich ist  $\mathbf{J}_{t_0}(s)$  ein Jacobi Feld gemäß Definition 2.3.4 auf Seite 30. Nach einer Eigenschaft des Kreuzprodukts und unter Ausnutzung der Orthogonalität der Tangenten von Offsetkurve und Geodätischer (Lemma 3.3.3) ergibt sich

$$(\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \wedge \mathbf{J}_{t_0}(s)) \wedge \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) = \|\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s)\|^2 \mathbf{J}_{t_0}(s) - \langle \mathbf{J}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \rangle \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) = \mathbf{J}_{t_0}(s).$$

Satz 2.3.5 zusammen mit dieser Gleichung liefert für das Jacobi Feld  $\mathbf{J}_{t_0}(s)$  die Beziehung

$$\frac{D^2}{ds^2} \mathbf{J}_{t_0}(s) + K(s) \mathbf{J}_{t_0}(s) = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Da wir nun lediglich an der vorzeichenbehafteten Länge  $y_{t_0}(s)$  von  $\mathbf{J}_{t_0}(s)$  interessiert sind, setzen wir  $\mathbf{J}_{t_0}(s) = y_{t_0}(s) \mathbf{w}_{t_0}(s)$ , wobei  $\mathbf{w}_{t_0}(s)$  das eindeutig bestimmte Vektorfeld der Länge Eins längs  $\gamma_{t_0}$  ist, so daß  $\boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s)$ ,  $\mathbf{w}_{t_0}(s)$ ,  $\mathbf{N}$  positiv orientiert ist. Da mit dieser Setzung  $\langle \mathbf{w}_{t_0}(s), \mathbf{w}_{t_0}(s) \rangle = 1$  und  $\langle \mathbf{w}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \rangle = 0$  gilt, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \left[ \langle \mathbf{w}_{t_0}(s), \mathbf{w}_{t_0}(s) \rangle \right] = 2 \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{w}_{t_0}(s), \mathbf{w}_{t_0}(s) \right\rangle \\ 0 &= \frac{d}{ds} \left[ \langle \mathbf{w}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \rangle \right] \\ &= \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{w}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \right\rangle + \langle \mathbf{w}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}''_{t_0}(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{w}_{t_0}(s), \boldsymbol{\gamma}'_{t_0}(s) \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Charakterisierung von Geodätischen folgt, nach der ihr Krümmungsvektor  $\boldsymbol{\gamma}''_{t_0}(s)$  in Richtung der Flächennormalen verläuft. Diese beiden Gleichungen zeigen, daß die Ableitung des Vektorfeldes  $\mathbf{w}_{t_0}(s)$  keinen tangentialen Anteil besitzt, folglich für die kovariante Ableitung  $(D/ds)\mathbf{w}_{t_0}(s) = \mathbf{0}$  gilt.<sup>3</sup> Mit dieser Einsicht kann man für die kovariante Ableitung des Jacobi Feldes

$$\frac{D}{ds} \mathbf{J}_{t_0}(s) = y_{t_0}(s) \frac{D}{ds} \mathbf{w}_{t_0}(s) + y'_{t_0}(s) \mathbf{w}_{t_0}(s) = y'_{t_0}(s) \mathbf{w}_{t_0}(s),$$

sowie analog  $(D^2/ds^2)\mathbf{J}_{t_0}(s) = y''_{t_0}(s) \mathbf{w}_{t_0}(s)$  folgern. Aus dieser Identität folgt die Behauptung durch Multiplikation mit  $\mathbf{w}_{t_0}(s)$  aus Gleichung (3.32). ■

<sup>3</sup>Diese Argumentation zeigt nichts anderes, als daß das Vektorfeld  $\mathbf{w}_{t_0}(s)$  ein Paralleler Transport längs  $\gamma_{t_0}$  ist. Da wir diesen Begriff jedoch nicht weiter benötigen, haben wir auf seine Einführung im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Weitere Einzelheiten findet man in [dC76], S. 238 ff.

Satz 3.3.5 ist ein klassisches Resultat aus der Differentialgeometrie, welches jedoch unseres Wissens noch nicht für die von uns betrachtete Anwendung, nämlich die numerische Berechnung der Tangenten(-längen) von Geodätischen Offsetkurven, ausgenutzt wurde. Diese Methode wurde erstmals im Rahmen von Seminaren von Wolter ([Wol95] und [Wol96]) vorgeschlagen und von Rausch et al. in [RWS96a] und [RWS96b] publiziert. Dort wurde allerdings nur die Situation für Progenitorcurven behandelt. Ferner wurde in keiner der erwähnten Quellen eine genaue Untersuchung des Verhaltens der Vorzeichenfunktion  $y(s, t)$  durchgeführt, wie es im Laufe der nachfolgenden Arbeit geschehen wird.

Zu beachten ist, daß Jacobis Gleichung für alle Geodätischen Abstände  $s$  gültig ist. Dies schließt das Verhalten der Längenfunktion in Fokalfpunkten ( $y_{t_0}(s) = 0$ ) ein. Da die Gaußkrümmung einer abgeschlossenen Fläche beschränkt ist (und nur mit solchen Flächen haben wir es in der Anwendung zu tun), genügt die Differentialgleichung (3.31) einer Lipschitz-Bedingung. Daher gibt es für jedes Paar von Anfangswerten  $y_{t_0}(0), y'_{t_0}(0)$  eine eindeutig bestimmte Lösung der Jacobi Gleichung. Um die Tangentlängen  $y_{t_0}(s)$  Geodätischer Offsetkurven zu berechnen, müssen wir demnach passende Anfangswerte der Differentialgleichung (3.31) finden. Im Fall eines Progenitorpunktes liegen diese bereits mit Hilfssatz 2.4.2 von Seite 32 vor. Dort wurde für den Koeffizient  $G^p$  der ersten Fundamentalform Geodätischer Polarkoordinaten  $\mathbf{r}^p$  die Eigenschaft

$$\lim_{s \rightarrow 0} G^p(s, t) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \sqrt{G^p(s, t)} \right] = 1$$

zeigt. Folglich sind im Progenitorpunktfall für alle tangentialen Winkel  $t_0 \in [0, 2\pi]$  als Anfangswerte der Differentialgleichung zweiter Ordnung (3.31)  $y_{t_0}(0) = 0$  und  $y'_{t_0}(0) = 1$  zu wählen. Um eine gleichwertige Aussage für den Fall einer Progenitorcurve treffen zu können, zitieren wir den folgenden Hilfssatz, der etwa in [dC76], S. 252 ff. zu finden ist, und den wir für den Beweis des nachfolgenden Satzes benötigen.

### Lemma 3.3.6

Sei  $\mathbf{r}(u, v)$  eine (lokale) orthogonale Parametrisierung der regulären, orientierten Fläche  $S$ , d.h. für den Koeffizienten  $F$  der ersten Fundamentalform gelte  $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ . Ferner sei  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  eine Flächenkurve und  $\mathbf{w}(t)$  ein differenzierbares Vektorfeld der Länge Eins entlang  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ . Bezeichnet man mit  $\varphi(t)$  den orientierten Winkel zwischen  $\mathbf{r}_u(u(t), v(t))$  und  $\mathbf{w}(t)$  bezüglich der durch  $\mathbf{N}$  gegebenen Orientierung von  $S$ , so gilt

$$\left\langle \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t), (\mathbf{N} \wedge \mathbf{w}(t)) \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \{G_u v'(t) - E_v u'(t)\} + \frac{d}{dt}\varphi(t)$$

für alle Kurvenparameter  $t$ .

Da das Vektorfeld des letzten Hilfssatzes die Länge Eins besitzt, ist  $\mathbf{w}(t)$  sowohl zu der Ableitung  $(d\mathbf{w}/dt)(t)$  als auch zu deren Normalprojektion in die Tangentialebene orthogonal. Dies bedeutet, daß die kovariante Ableitung  $(D\mathbf{w}/dt)(t)$  ein Vektor in Richtung von  $(\mathbf{N} \wedge \mathbf{w}(t))$  sein muß (siehe auch [dC76], S. 248 ff.). Daher entspricht die linke Seite aus Lemma 3.3.6 der vorzeichenbehafteten Länge der kovarianten Ableitung von  $\mathbf{w}(t)$ .

Um die fehlenden Anfangswerte der Jacobi Gleichung im Fall einer Progenitorcurve zu erhalten, wird der folgende Satz benutzt werden. Seine Aussage besagt, daß die Veränderung der Tangentlänge proportional zu der Länge selbst ist. Er gilt allgemein für Offsetkurven, ist also nicht nur in dem Fall hilfreich, in dem als Progenitorobjekt eine Flächenkurve betrachtet wird.

**Satz 3.3.7**

Sei  $\gamma_{t_0}(s)$  eine Geodätische Kurve gemäß Definition 3.2.1 bzw. 3.2.2, die von einer Progenitor-kurve bzw. einem Progenitorpunkt ausgeht. Die Funktion  $y_{t_0}(s)$  der vorzeichenbehafteten Tangentlängen Geodätischer Offsetkurven genügt für alle  $s$  mit  $y_{t_0}(s) \neq 0$  der Identität

$$y'_{t_0}(s) = \kappa_g y_{t_0}(s, t_0) \quad (3.33)$$

Dabei bezeichnet  $\kappa_g(s, t_0)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve  $\alpha_s$  im Punkt  $\alpha_s(t_0) = \gamma_{t_0}(s)$ .

**Beweis:**

Wir betrachten das tangentielle Vektorfeld der Länge Eins

$$\mathbf{w}(t) := \frac{\alpha'_s(t)}{\|\alpha'_s(t)\|}$$

entlang einer regulären Offsetkurve  $\alpha_s(t)$ . Für die Ableitung dieses Vektorfelds erhält man den Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) = \frac{1}{\|\alpha'_s(t)\|} \alpha''_s(t) - \frac{\langle \alpha'_s(t), \alpha''_s(t) \rangle}{\|\alpha'_s(t)\|^3} \alpha'_s(t).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Krümmungsvektor  $\mathbf{k}$  von  $\alpha_s$  (siehe Gleichung (2.1) auf Seite 22), so erkennt man

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) = \|\alpha'_s(t)\| \mathbf{k}(t).$$

Nun ergibt sich die Geodätische Krümmung  $\kappa_g$  der Offsetkurve  $\alpha_s(t)$  aus der vorzeichenbehafteten Länge der Normalprojektion des Krümmungsvektors auf die Tangentialebene (vgl. Abschnitt 2.1, S. 23). Andererseits ist, wie oben erläutert, die Länge dieses projizierten Vektors in Richtung von  $\mathbf{N} \wedge \mathbf{w}(t) = -\gamma'_{t_0}(s)$  zu messen. Daher ergibt sich für die geodätische Krümmung die Beziehung

$$\left\langle \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t), \mathbf{N} \wedge \mathbf{w}(t) \right\rangle = \kappa_g \|\alpha'_s(t)\| = \kappa_g \operatorname{sign}(y_t(s)) y_t(s) \quad (3.34)$$

In einer hinreichen kleinen Umgebung eines Nicht-Fokalpunktes  $\alpha_{s_0}(t_0)$  der betrachteten Offsetkurve kann man die Fläche durch die Abbildung  $\tilde{\mathbf{r}} := \mathbf{r} \circ \mathcal{O}$  regulär parametrisieren. Dies entspricht der analogen Vorgehensweise wie bei Einführung Geodätischer Polarkoordinaten. Nach Lemma 3.3.3 ist dies eine orthogonale Parametrisierung, deren Koeffizienten der ersten Fundamentalform den Identitäten

$$\tilde{E}(s, t) = 1, \quad \tilde{F}(s, t) = 0, \quad \tilde{G}(s, t) = \langle \alpha'_s(t), \alpha'_s(t) \rangle = (y_t(s))^2$$

genügen. Der durch diese Parametrisierung induzierte Normalenvektor ist durch

$$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}(s, t) = \gamma'_t(s) \wedge \frac{\alpha'_s(t)}{\|\alpha'_s(t)\|} = \gamma'_t(s) \wedge \mathbf{w}(t)$$

gegeben. Da die Offsetkurve  $\alpha_s(t)$  in der gegebenen Parameterumgebung eine Isoparameterlinie zu konstantem  $s$  ist, erhält man durch Anwenden von Hilfssatz 3.3.6

$$\left\langle \frac{d\mathbf{w}}{dt}(t), (\tilde{\mathbf{N}} \wedge \mathbf{w}(t)) \right\rangle = \frac{1}{2 \|\alpha'_s(t)\|} \frac{d}{ds} \left[ \|\alpha'_s(t)\|^2 \right] = \operatorname{sign}(y_t(s)) y'_t(s), \quad (3.35)$$

da der Winkel zwischen  $\tilde{\mathbf{r}}_s = \gamma'_t$  und  $\mathbf{w}(t)$  konstant  $\pi/2$  ist. Da nun

$$\tilde{\mathbf{N}} \wedge \mathbf{w}(t) = (\gamma'_t(s) \wedge \mathbf{w}(t)) \wedge \mathbf{w}(t) = -\gamma'_t(s) = \mathbf{N} \wedge \mathbf{w}(t)$$

gilt, erhält man aus den Gleichungen (3.34) und (3.35) die behauptete Formel. ■

Einen Beweis des letzten Satzes für den Fall von Progenitorpunkten findet man auch in [BL73], S. 205 ff. Im Fall von Progenitorkurven ist die positive Orientierung des Systems  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$ ,  $\mathbf{N}$  ganz wesentlich im Hinblick auf die Gültigkeit der Aussage von Satz 3.3.7. Mit dieser Orientierung zeigt der Vektor  $\gamma'_{t_0}(0)$  zur rechten Seite der Progenitorkurve  $\alpha$  (in Bezug auf die Orientierung der Fläche). Rechtsseitiges Offsetting entspricht daher einem wachsenden Geodätischen Abstand  $s$ . Für negativ gewählte Geodätische Abstände (d.h. für linksseitige Offsetkurven) behält Gleichung (3.33) zwar ihre Richtigkeit, man muß sich aber klar machen, daß diese Formel eine Aussage über das Wachstumsverhalten von  $y_{t_0}(s)$  für wachsendes  $s$  liefert. Im Fall linksseitigen Offsettings wird man vielleicht lieber eine entsprechende Identität für fallende Werte von  $s$  benutzen wollen. Eine solche Beziehung ergibt sich durch Umkehren des Durchlaufsinns der Geodätischen, also durch Betrachten von  $\gamma_{t_0}(-s)$ . Aufgrund der Beziehung  $(d/dt)[y_{t_0}(-s)] = -y'_{t_0}(-s)$  ergibt sich aus (3.33) sofort die Identität

$$y'_{t_0}(-s) = -\kappa_g y_{t_0}(-s) \quad (3.36)$$

für alle  $s$  mit  $y_{t_0}(-s) \neq 0$ .

Identität (3.33) wird, wie angekündigt, von uns vorwiegend dazu benutzt werden, um Anfangswerte der Jacobi Differentialgleichung im Fall von Progenitorkurven zu berechnen. Hierzu werden wir (3.33) für  $s = 0$  auswerten, um so eine Beziehung zwischen  $y'_t(0)$  und der Geodätischen Krümmung der Progenitorkurve zu erhalten. Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht für Progenitorpunkte zulässig, da dort nach Lemma 2.4.2  $y_t(0) = 0$  für alle  $t$  gilt. Gleichung (3.33) verliert aber ihre Gültigkeit, falls die Geodätische einen Fokalfunkt (und als solchen kann man einen Progenitorpunkt auch interpretieren) passiert. Mit anderen Worten: Aus der Tatsache, daß die Tangente der Geodätische Offsetkurve verschwindet ( $y_{t_0}(s) = 0$ ), kann man *nicht* schließen, daß die Längenfunktion stationär wird. Es gilt sogar im Gegenteil stets  $y'_{t_0}(s_0) \neq 0$ , wie der folgende Satz besagt.

### Satz 3.3.8

*Für einen Fokalfunkt  $\gamma_{t_0}(s_0)$  bezüglich einer gegebenen regulären Progenitorkurve  $\alpha(t)$  bzw. eines Progenitorpunkts  $\mathbf{p}$  ist die Änderung der Tangentenlänge der Geodätischen Offsetkurve nicht trivial, d.h. es gilt  $y'_{t_0}(s_0) \neq 0$ . Daher ändert sich das Vorzeichen von  $y_{t_0}(s)$  dann und nur dann, wenn  $\gamma_{t_0}(s)$  einen Fokalfunkt passiert.*

#### Beweis:

Sei  $\gamma_{t_0}(s_0)$  ein Fokalfunkt, d.h. es gelte  $y_{t_0}(s_0) = 0$ . Ferner nehmen wir an, daß  $y'_{t_0}(s_0) = 0$  erfüllt wäre. Da Jacobis Gleichung auch für Fokale Situationen gültig ist, müßte die Längenfunktion  $y_{t_0}$  die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (3.31) mit Anfangswerten  $y_{t_0}(s_0) = 0 = y'_{t_0}(s_0)$  sein. Offensichtlich ist die triviale Lösung  $y_{t_0}(s) = 0$  für alle  $s$  die einzige Lösung, die diesen Anfangswerten genügt. Insbesondere würde damit im Fall einer Progenitorkurve die Identität

$$y_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\| = 0$$

erfüllt sein, die jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung steht, nach der  $\alpha$  eine reguläre Kurve ist. Im Fall von Progenitorpunkten ergibt sich aus  $y'_{t_0}(0) = 0$  ein Widerspruch zu Lemma 2.4.2, nach dem  $y'_{t_0}(0) = 1$  gelten muß. ■

Mit Hilfe von Satz 3.3.7 können wir nun die gewünschten Anfangswerte der Jacobi Gleichung im Fall einer Progenitorkurve bestimmen. Dafür berechnen wir die Tangentenlänge der Progenitorkurve im Parameterwert  $t_0$ . Nach der Definition der Funktion  $y_{t_0}$  gilt  $y_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\|$ .

Schließlich bestimmt man die Geodätische Krümmung  $\kappa_g$  der Progenitorkurve  $\alpha$  für den Parameter  $t_0$ , um mit Hilfe von Satz 3.3.7 auch den zweiten Anfangswert zu bestimmen. Insgesamt sind die Anfangswerte für eine Progenitorkurve  $\alpha$  durch

$$y_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\| \quad \text{und} \quad y'_{t_0}(0) = \kappa_g y_{t_0}(0) \quad (3.37)$$

gegeben. Im Fall eines Progenitorpunkts waren die Anfangswerte, wie in Lemma 2.4.2 besprochen, durch

$$y_{t_0}(0) = 0 \quad \text{und} \quad y'_{t_0}(0) = 1 \quad (3.38)$$

bestimmt. Zur numerischen Behandlung der Jacobi Gleichung (3.31) ist diese zunächst in das zugehörige System von Differentialgleichungen erster Ordnung überzuführen, welches durch

$$y'_1(s, t_0) = y_2(s, t_0) \quad (3.39a)$$

$$y'_2(s, t_0) = -K(s, t_0) y_1(s, t_0) \quad (3.39b)$$

gegeben ist. Der Parameter  $t_0$  entspricht dabei dem Parameter der Progenitorkurve. Da dieser Parameter für dieses System konstant ist, handelt es sich bei (3.39) um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Insbesondere verstehen sich alle Ableitungen bezüglich der Variablen  $s$ . Zu beachten ist, daß zur Lösung der Jacobi Differentialgleichung die Geodätische Differentialgleichung (2.10) simultan gelöst werden muß, da man zur Berechnung der Gaußkrümmung  $K(s, t_0) = K(\mathcal{O}(s, t_0))$  die Parameterwerte  $\mathcal{O}(s, t_0)$  der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}(s)$  kennen muß.

Durch Lösen der Jacobi Gleichung (3.31) erhalten wir für jeden Geodätischen Abstand  $s$  die Tangentenlänge der zugehörigen Geodätischen Offsetkurve. Aufgrund der Orthogonalität von  $\alpha'_s(t_0)$  und  $\gamma'_{t_0}(s)$  (vgl. Lemma 3.3.3) sind wir ferner in der Lage, den Tangentenvektor der Geodätischen Offsetkurve zu berechnen. Hierzu ist es unbedingt notwendig, daß die Funktion  $y_{t_0}(s)$  als *vorzeichenbehaftete* Längenfunktion eingeführt wurde. Formeln, die analog zu denen aus (3.1a) und (3.1b) sind, liefern ein Tupel  $(\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0))$ , so daß die induzierte tangentielle Richtung  $\mathbf{w} := \bar{u}(s_0) \mathbf{r}_u + \bar{v}(s_0) \mathbf{r}_v$  orthogonal zu  $\gamma'_{t_0}(s_0)$  ist. Darüberhinaus bilden  $\mathbf{w}$ ,  $\gamma'_{t_0}(s_0)$ ,  $\mathbf{N}$  ein positiv orientiertes Orthogonalsystem. Daher gilt

$$\partial_t \mathcal{O}(s_0, t_0) = -y_{t_0}(s_0) (\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0))^T. \quad (3.40)$$

Damit kann man ebenfalls  $\alpha'_{s_0}(t_0) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathcal{O}(s_0, t_0)$  berechnen, den Tangentenvektor der Geodätischen Offsetkurve. Da Satz 3.3.7 für alle nichtfokalen Geodätischen Abstände  $s$  gilt, können wir mit Hilfe der Ergebnisse der Jacobi Differentialgleichung ebenfalls die Geodätische Krümmung der Offsetkurve  $\alpha_s$  ermitteln.

### 3.4 Zweite Ableitungen Geodätischer Koordinaten

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, wie man die partiellen Ableitungen Geodätischer Koordinaten

$$\mathbf{r}^\alpha(s, t) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_\alpha(s, t)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r}^p(s, t) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_p(s, t))$$

numerisch bestimmen kann. In Lemma 3.3.3 haben wir ferner mit

$$E^\alpha = \langle \gamma'_t(s), \gamma'_t(s) \rangle = 1 = \partial_s \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \partial_s \mathcal{O}_\alpha \quad (3.41a)$$

$$F^\alpha = \langle \gamma'_t(s), \alpha'_s(t) \rangle = 0 = \partial_s \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \partial_t \mathcal{O}_\alpha \quad (3.41b)$$

$$G^\alpha = \langle \alpha'_s(t), \alpha'_s(t) \rangle = \|\alpha'_s(t)\|^2 = \partial_t \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \partial_t \mathcal{O}_\alpha. \quad (3.41c)$$

die Werte der ersten Fundamentalform bezüglich dieser Parametrisierung bestimmt. Damit sind wir in der Lage, alle geometrischen Größen erster Ordnung (d.h. jene, die durch die erste Fundamentalform bestimmt sind) in Termen der Geodätischen Offsetfunktion auszudrücken. Die gleichen Formeln gelten für die Koeffizienten  $E^p$ ,  $F^p$  und  $G^p$  der Geodätischen Polarkoordinaten bezüglich eines Flächenpunktes  $\mathbf{p} \in S$  mit Ausnahme des Progenitorpunktes, da Geodätische Polarkoordinaten für  $s = 0$  nicht erklärt sind (siehe dazu auch Hilfssatz 2.4.2). Für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform ergibt eine einfache Rechnung

$$L^\alpha = \partial_s \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \partial_s \mathcal{O}_\alpha = II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha, \partial_s \mathcal{O}_\alpha) \quad (3.42a)$$

$$M^\alpha = \partial_s \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \partial_t \mathcal{O}_\alpha = II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha, \partial_t \mathcal{O}_\alpha) \quad (3.42b)$$

$$N^\alpha = \partial_t \mathcal{O}_\alpha^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \partial_t \mathcal{O}_\alpha = II(\partial_t \mathcal{O}_\alpha, \partial_t \mathcal{O}_\alpha), \quad (3.42c)$$

also einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der zweiten Fundamentalform bezüglich Geodätischer Koordinaten  $L^\alpha$ ,  $M^\alpha$ ,  $N^\alpha$  und denen der Ausgangsparametrisierung  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Wieder gelten für  $s > 0$  dieselben Formeln für den Punktfall.

Um nun auch die zweiten partiellen Ableitungen der Geodätischen Koordinaten berechnen zu können, müssen wir nach Satz 3.2.8 fordern, daß die betrachtete Fläche  $S$  eine mindestens dreimal stetig differenzierbare Parametrisierung  $\mathbf{r}$  besitzt. Andernfalls ist nicht gewährleistet, daß die zweite Ableitung der Offsetfunktion  $\alpha_s''(t) = \mathbf{r}_{tt}^\alpha(s, t)$  (bzw.  $= \mathbf{r}_{tt}^p(s, t)$ ) existiert. Da die im folgenden herzuleitenden Identitäten sowohl für Progenitorcurven als auch Progenitorpunkte übereinstimmen werden, verzichten wir ab nun auf eine explizite Unterscheidung. Geodätische Koordinaten und die von ihnen abgeleiteten Größen werden wir durch eine Tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) kennzeichnen.

Wir beginnen mit der partiellen Ableitung  $\tilde{\mathbf{r}}_{ss}$ . Da  $\gamma_{t_0}(s)$  eine bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve ist, ist die zweite Ableitung ein Vektor in Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{N}$  mit einer Länge, die der Normalkrümmung der Fläche  $S$  in Richtung  $\gamma'_{t_0}(s)$  entspricht (siehe auch Abschnitt 2.1). Daher gilt die Darstellung

$$\gamma''_{t_0}(s) = II(\partial_s \mathcal{O}(s, t_0)) \mathbf{N}, \quad (3.43)$$

wobei  $II(\cdot)$  die zweite Fundamentalform von  $S$  bezeichnet.

Für die Berechnung der beiden verbleibenden zweiten partiellen Ableitungen benutzen wir die Christoffelsymbole  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  bezüglich Geodätischer Koordinaten. Nach Gleichung (2.8) aus Abschnitt 2.1 unter Verwendung der Identitäten für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform (3.41) ergibt sich

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^1 = 0, \quad \tilde{G} \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{G} = -\tilde{\Gamma}_{22}^1, \quad \tilde{G} \tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}. \quad (3.44)$$

Unter Benutzung der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y(s, t)$  gilt nun

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{G} = \frac{\partial}{\partial s} [\|\alpha'_s(t)\|^2] = \frac{\partial}{\partial s} [(y(s, t))^2] = 2y(s, t) \frac{\partial}{\partial t} y(s, t) = 2\kappa_g(s, t) (y(s, t))^2.$$

Hierbei wurde im letzten Umformungsschritt Satz 3.3.7 verwendet. Damit erhält man zunächst

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \kappa_g(s, t), \quad \tilde{\Gamma}_{22}^1 = -\kappa_g(s, t) (y(s, t))^2, \quad (3.45)$$

wobei  $\kappa_g(s, t)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve  $\alpha_s$  im Parameter  $t$  bezeichnet. Für das letzte zu berechnende Christoffelsymbol überlege man

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{1}{2 \|\alpha'_s(t)\|^2} \frac{\partial}{\partial t} [\|\alpha'_s(t)\|^2] = \frac{\text{sign}(y(s, t))}{\|\alpha'_s(t)\|} \frac{\partial}{\partial t} y(s, t). \quad (3.46)$$

Mit Hilfe der soeben berechneten Christoffelsymbole können wir nun alle zweiten partiellen Ableitungen Geodätischer Koordinaten angeben.

### Satz 3.4.1

Sei  $S$  eine reguläre parametrische Fläche mit zugehöriger Parametrisierungsabbildung  $\mathbf{r}$ . Ferner sei  $\bar{s}$  so gewählt, daß für alle  $0 < s < \bar{s}$  der Offsetpunkt  $\mathbf{r}(\mathcal{O}(s, t))$  kein Fokelpunkt des betrachteten Progenitorobjekts ist. Die zweiten partiellen Ableitungen Geodätischer (Polar-)Koordinaten  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \mathcal{O}$  können durch die Formeln

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ss}(s, t) = II(\partial_s \mathcal{O}(s, t)) \mathbf{N}, \quad (3.47a)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{st}(s, t) = \kappa_g(s, t) \tilde{\mathbf{r}}_t(s, t) + II(\partial_s \mathcal{O}(s, t), \partial_t \mathcal{O}(s, t)) \mathbf{N}, \quad (3.47b)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{tt}(s, t) = -\kappa_g(s, t) (y(s, t))^2 \tilde{\mathbf{r}}_s(s, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} y(s, t) \frac{\tilde{\mathbf{r}}_t(s, t)}{\|\tilde{\mathbf{r}}_t(s, t)\|} + II(\partial_t \mathcal{O}(s, t)) \mathbf{N} \quad (3.47c)$$

berechnet werden. Dabei bezeichnet  $\kappa_g(s, t)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve  $\alpha_s(t)$  und  $\sigma := \text{sign}(y(s, t))$  das Vorzeichen der Längenfunktion.

### Beweis:

Gleichung (3.47a) wurde bereits mit (3.43) bewiesen. Die Identitäten für die zweiten partiellen Ableitungen  $\tilde{\mathbf{r}}_{st}$  und  $\tilde{\mathbf{r}}_{tt}$  ergeben sich aus den Gleichungen (3.44), (3.45) und (3.46) sowie den Eigenschaften der Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{st} &= \tilde{\Gamma}_{12}^1 \tilde{\mathbf{r}}_s + \tilde{\Gamma}_{12}^2 \tilde{\mathbf{r}}_t + \tilde{M} \mathbf{N}, \\ \tilde{\mathbf{r}}_{tt} &= \tilde{\Gamma}_{22}^1 \tilde{\mathbf{r}}_s + \tilde{\Gamma}_{22}^2 \tilde{\mathbf{r}}_t + \tilde{N} \mathbf{N} \end{aligned}$$

(siehe auch (2.7) auf Seite 25). Ferner sind die in (3.42) notierten Beziehungen  $II(\partial_s \mathcal{O}, \partial_t \mathcal{O}) = \tilde{M}$  und  $II(\partial_t \mathcal{O}) = \tilde{N}$  zu benutzen. ■

Bei der Formulierung von Satz 3.4.1 wird davon ausgegangen, daß es sich bei den Geodätischen Koordinaten um eine reguläre Parametrisierung handelt. Dies schließt die Existenz singulärer Punkte des betrachteten Geodätischen Offsets, und damit Nullstellen der Längenfunktion  $y(s, t)$  aus. Daher ist Gleichung (3.47c) stets wohldefiniert. (Die partielle Ableitung  $(\partial/\partial t)y$  existiert nach Satz 3.3.4 unter unserer oben getroffenen Voraussetzung, daß die betrachtete Fläche  $C^3$ -stetig parametrisiert ist.) Ferner ist das Vorzeichen  $\sigma$  stets Eins, da sich nach Satz 3.3.8 das Vorzeichen von  $y$  nur in Fokelpunkten ändert. Zwar liefern Geodätische Koordinaten in Fokelpunkten keine reguläre Parametrisierung, die Formeln (3.47) für die zweiten Ableitungen  $\gamma''_t$ ,  $(\partial/\partial t)\gamma'_t = (\partial/\partial s)\alpha'_s$  und  $\alpha''_s$  behalten jenseits von Fokalen Situationen dennoch ihre Gültigkeit. Die Formel der zweiten Ableitung der Offsetkurve  $\alpha''_s(t)$  ist uns im wesentlichen bereits bekannt gewesen, wie die folgende Bemerkung feststellt.

### Bemerkung 3.4.2

Gleichung (3.47c) aus Satz 3.4.1 ist äquivalent zu der Zerlegung des Krümmungsvektors  $\mathbf{k}_s(t)$  von  $\alpha_s(t)$  in einen tangentialen und einen normalen Anteil aus Gleichung (2.4).

**Beweis:**

Aufgrund der Identität

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} y(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\|\alpha'_s(t)\|] = \frac{\langle \alpha'_s(t), \alpha''_s(t) \rangle}{\|\alpha'_s(t)\|}$$

ist Gleichung (3.47c) äquivalent zu

$$\frac{1}{\|\alpha'_s(t)\|^2} \alpha''(t) - \frac{\langle \alpha'_s(t), \alpha''_s(t) \rangle}{\|\alpha'_s(t)\|^4} \alpha'_s(t) = -\kappa_g(s, t) \gamma'_t(s) + \frac{II(\partial_t \mathcal{O}(s, t))}{\|\alpha'_s(t)\|^2} \mathbf{N}.$$

Die linke Seite dieser Beziehung entspricht nach (2.1) auf Seite 22 dem Krümmungsvektor  $\mathbf{k}_s(t)$ . Ferner erkennt man, daß  $\partial_t \mathcal{O}(s, t)/\|\alpha'_s(t)\|$  die korrespondierende Parameterraumrichtung der normierten Tangente von  $\alpha_s$  im Parameter  $t$  ist. Der Wert

$$\frac{II(\partial_t \mathcal{O}(s, t))}{\|\alpha'_s(t)\|^2} = II\left(\frac{\partial_t \mathcal{O}(s, t)}{\|\alpha'_s(t)\|}\right)$$

liefert daher die Normalkrümmung  $\kappa_n(s, t)$  der Offsetkurve. Daher ist Gleichung (3.47c) aus Satz 3.4.1 äquivalent zu der Identität

$$\mathbf{k}_s(t) = -\kappa_g(s, t) \gamma'_t(s) + \kappa_n(s, t) \mathbf{N},$$

die Gleichung (2.4) auf Seite 23 entspricht. ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir die Gleichungen (3.47) aus Satz 3.4.1 im Hinblick auf ihre numerische Berechenbarkeit betrachten. Im Fall der zweiten Ableitung der Geodätischen Kurve  $\gamma''_t(s)$  benötigen wir nach (3.47a) zu ihrer Berechnung (neben den Koeffizienten der zweiten Fundamentalform) lediglich die partielle Ableitung der Offsetfunktion  $\partial_s \mathcal{O}$ . Diese erhalten wir durch Lösen der Geodätischen Differentialgleichung. Die gemischte zweite partielle Ableitung ergibt sich durch die Kenntnis der partiellen Ableitung  $\partial_t \mathcal{O}$  sowie der Geodätischen Krümmung der entsprechenden Offsetkurve. Diese Größen berechnet man, wie in Abschnitt 3.3 erläutert, durch Lösen der Jacobi Differentialgleichung (3.31) bzw. unter Benutzung von Satz 3.3.7. Da  $\tilde{\mathbf{r}}_{st}(s, t)$  ferner der Identität

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{st} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma'_t(s) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha'_s(t) \\ &= ((\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}) \partial_s \mathcal{O}, (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv}) \partial_s \mathcal{O}) \partial_t \mathcal{O} + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_{st} \mathcal{O} \end{aligned} \quad (3.48)$$

genügt, die man durch zweimaliges Ableiten der Definition der Offsetfunktion erhält, ist man ferner in der Lage, die zweite gemischte Ableitung der Offsetfunktion  $\partial_{st} \mathcal{O}$  zu bestimmen.

Analog zu Gleichung (3.48) erfüllt die zweite Ableitung der Offsetkurve

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{tt} &= \alpha''_s(t) \\ &= ((\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}) \partial_t \mathcal{O}, (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv}) \partial_t \mathcal{O}) \partial_t \mathcal{O} + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_{tt} \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Daher kann man ebenfalls  $\partial_{tt} \mathcal{O}$  berechnen, vorausgesetzt man kennt die zweite Ableitung  $\alpha''_s(t)$ . Für die Berechnung der zweiten Ableitung der Geodätischen Offsetkurve benötigt man (neben den bereits im vorangegangenen Absatz aufgezählten Größen) den Wert der partiellen Ableitung  $\frac{\partial}{\partial t} y(s_0, t)$  der Tangentenlänge des Geodätischen Offsets. Wir werden auf die Berechnung dieser Größe im folgenden Abschnitt eingehen.

### 3.5 Berechnung der partiellen Ableitungen von $y$

Eine zentrale Beobachtung, von der unsere bisherigen Untersuchungen ausgegangen sind, ist, daß  $y(s, t)$  als Funktion der Variablen  $s$  der Jacobi Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} y(s, t) + K(s, t) y(s, t) = 0 \quad (3.50)$$

genügt (vgl. Satz 3.3.5). Differenziert man diese gewöhnliche Differentialgleichung nach dem Parameter  $t$ , so erhält man

$$\frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t} y(s, t) + K(s, t) \frac{\partial}{\partial t} y(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} K(s, t) y(s, t) = 0.$$

Substituiert man  $z(s, t) := \frac{\partial}{\partial t} y(s, t)$ , so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} z(s, t) + K(s, t) z(s, t) + \frac{\partial}{\partial t} K(s, t) y(s, t) = 0, \quad (3.51)$$

die man wieder als gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung interpretieren kann. Die Ableitungen der gesuchten Funktion  $z(s, t)$  sind alle bezüglich der Variablen  $s$  zu bilden;  $t$  wird wieder als konstanter Parameter betrachtet. Diese neue Differentialgleichung werden wir im folgenden *gestörte Jacobi Differentialgleichung* nennen. Um Gleichung (3.50) nach  $t$  differenzieren zu können, nehmen wir im folgenden an, daß die Flächenparametrisierung  $\mathbf{r}$  mindestens eine  $C^4$ -stetige Abbildung ist. Betrachten wir als Progenitorobjekt eine Flächenkurve, so sei diese ebenfalls mindestens viermal stetig differenzierbar. Nach Satz 3.3.4 sind unter diesen Voraussetzungen alle partiellen Ableitungen in Gleichung (3.51) stetig.

Das zugehörige System erster Ordnung lautet

$$\frac{d}{ds} z_1(s, t) = z_2(s, t) \quad (3.52a)$$

$$\frac{d}{ds} z_2(s, t) = -K(s, t) z_1(s, t) - \frac{\partial}{\partial t} K(s, t) y(s, t) \quad (3.52b)$$

Zum Lösen dieses Systems benötigen wir geeignete Anfangswerte für  $s = 0$ . Mit anderen Worten müssen wir in der Lage sein, die Größen  $z_1(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(0, t)$  und  $z_2(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(0, t)$  zu berechnen. Handelt es sich bei dem betrachteten Progenitorobjekt um einen Flächenpunkt, stellt die Wahl geeigneter Anfangswerte kein Problem dar. Nach Hilfssatz 2.4.2 gilt

$$y(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial s} y(0, t) = 1$$

für alle  $t \in [0, 2\pi]$ . Ist  $y(s, t)$  zweimal stetig differenzierbar, ergibt sich hieraus

$$z_1(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad z_2(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(0, t) = 0 \quad (3.53)$$

für alle tangentialen Winkel  $t$ .

Im Fall einer Progenitorcurve betrachten wir die Situation für einen beliebigen Geodätischen Abstand  $s$  mit der Eigenschaft, daß die zugehörige Offsetkurve in einer Umgebung von  $t$  regulär ist. Insbesondere gelte also  $\|\alpha'_s(t)\| \neq \mathbf{0}$ . Differenzieren der Tangentenlänge der Geodätischen Offsetfunktion liefert

$$\frac{d}{dt} (\|\alpha'_s(t)\|) = \frac{\langle \alpha'_s(t), \alpha''_s(t) \rangle}{\|\alpha'_s(t)\|}.$$

Daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} y(s, t) = \frac{\langle \alpha'_s(t), \alpha''_s(t) \rangle}{y(s, t)} \quad (3.54)$$

für alle nicht-fokalen Abstände  $s$ . Speziell für  $s = 0$  erhält man aus Gleichung (3.54) den ersten gesuchten Anfangswert. Nach Satz 3.3.7 gilt ferner die Identität

$$\frac{\partial}{\partial s} y(s, t) = \kappa_g y(s, t),$$

vorausgesetzt  $y(s, t)$  ist nicht trivial. Differenziert man diese Beziehung nach dem Parameter  $t$ , so erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(s, t) = \frac{d}{dt} \kappa_g y(s, t) + \kappa_g \frac{\partial}{\partial t} y(s, t). \quad (3.55)$$

Für  $s = 0$  erhält man damit den zweiten gesuchten Anfangswert für das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.52). Insgesamt können wir also folgende Aussage treffen.

### Satz 3.5.1

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial t} y$  und  $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y$  der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y(s, t)$  sind Lösungen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.52). Im Fall einer Progenitorkurve  $\alpha \subset S$  genügen die Anfangswerte den Gleichungen (3.54) und (3.55) mit  $s = 0$ . Betrachtet man einen Flächenpunkt als Progenitorobjekt, so lauten die Anfangswerte  $z_1(0, t) = 0 = z_2(0, t)$  für alle Parameter  $t \in [0, 2\pi]$ .

Der vorangegangene Satz liefert also den Schlüssel, um die gesuchte partielle Ableitung von  $y$  nach dem Progenitorparameter  $t$  zu bestimmen. Dennoch sind noch einige offene Probleme zu lösen, bevor man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen numerisch behandeln kann. So benötigt man in System (3.52) die partielle Ableitung der Gaußkrümmung  $K$  in Richtung der Tangente  $\alpha'_s(t)$  der Offsetkurve. Der folgende Hilfssatz 3.5.2 behandelt die Berechnung dieser Größe. Darüberhinaus kann ein Anfangswert für  $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y$  nach Gleichung (3.55) nicht berechnet werden, ohne Kenntnis einer Formel für die Ableitung  $\frac{d}{dt} \kappa_g$  der Geodätischen Krümmung in Richtung der Progenitorkurve. Eine solche Beziehung wird im restlichen Abschnitt entwickelt und in Korollar 3.5.4 angegeben werden.

### Lemma 3.5.2

Die partielle Ableitung der Gaußkrümmung in Richtung der Flächenparameter  $u$  und  $v$  sind durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} K (EG - F^2) &= N \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uuu} \rangle - 2M \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uvv} \rangle + L \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{vvv} \rangle \\ &+ (a_{11} N - 2GK) \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + (a_{21} N + 2FK) \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle \\ &- 2(a_{11} M - FK) \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle - 2(a_{21} M + EK) \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle \\ &+ a_{11} L \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle + a_{21} L \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv} \rangle \end{aligned} \quad (3.56a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} K (EG - F^2) &= N \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uvv} \rangle - 2M \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{vvv} \rangle + L \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{vvv} \rangle \\ &+ a_{12} N \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + a_{22} N \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle \\ &- 2(a_{12} M + GK) \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle - 2(a_{22} M - FK) \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle \\ &+ (a_{12} L + 2FK) \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle + (a_{22} L - 2EK) \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv} \rangle. \end{aligned} \quad (3.56b)$$

gegeben. Die Matrix  $(a_{ik})_{1 \leq i, k \leq 2}$  bezeichnet dabei die Repräsentation des Differentials der Gauß-Abbildung in lokalen Koordinaten (vgl. Gleichung (2.5) und (2.6)).

**Beweis:**

Wie in Abschnitt 2.1 erläutert, genügt die Gaußkrümmung der Darstellung

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (3.57)$$

Differenziert man Gleichung (3.57) nach dem Flächenparameter  $u$ , so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial u} K = \left\{ \frac{\partial}{\partial u} [LN - M^2] (EG - F^2) - (LN - M^2) \frac{\partial}{\partial u} [EG - F^2] \right\} (EG - F^2)^{-2}. \quad (3.58)$$

Als partielle Ableitung des Zählers aus (3.57) berechnet man weiter

$$\frac{\partial}{\partial u} [LN - M^2] = L_u N + L N_u - 2 M M_u,$$

wobei die Benutzung des Index  $u$  als Abkürzung für die partielle Differentiation nach  $u$  benutzt wird. Ferner gilt nun

$$\begin{aligned} L_u &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uuu} \rangle, \\ M_u &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uuv} \rangle, \\ N_u &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uvv} \rangle. \end{aligned}$$

Benutzt man diese Gleichungen zusammen mit der Identität  $\mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{r}_u + a_{21} \mathbf{r}_v$  (vgl. Gleichung (2.5) auf Seite 24), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} [LN - M^2] &= (a_{11} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + a_{21} \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uuu} \rangle) N \\ &\quad + (a_{11} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle + a_{21} \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uvv} \rangle) L \\ &\quad - 2 (a_{11} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle + a_{21} \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uuv} \rangle) M. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Die partielle Ableitung des Nenners aus Gleichung (3.57) ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial u} [EG - F^2] = E_u G + E G_u - 2 F F_u.$$

Benutzt man ferner  $E_u = 2 \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle$ ,  $F_u = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle$  und  $G_u = 2 \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle$ , so erhält man den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u} [EG - F^2] = 2 G \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + 2 E \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle - 2 F \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle - 2 F \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle. \quad (3.60)$$

Beide Gleichungen (3.59) und (3.60) zusammen ergeben die behauptete Formel (3.56a). Die zweite Gleichung (3.56b) kann völlig analog verifiziert werden. ■

Mit Hilfe von Lemma 3.5.2 kann die in Gleichung (3.52) benötigte partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial t} K$  recht einfach berechnet werden. Nach der Kettenregel gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t} K(\mathcal{O}_\alpha(s, t)) = \left( \frac{\partial}{\partial u} K(\mathcal{O}_\alpha(s, t)), \frac{\partial}{\partial v} K(\mathcal{O}_\alpha(s, t)) \right) \partial_t \mathcal{O}_\alpha(s, t).$$

Die Größe  $\partial_t \mathcal{O}_\alpha$  kann, wie oben erläutert, durch Lösen der Jacobi Differentialgleichung bestimmt werden (siehe Abschnitte 3.3 und 3.6).

Zur Berechnung der Anfangswerte zu Gleichung (3.52) im Fall einer Progenitorkurve muß man die partielle Ableitung nach dem Progenitorkurvenparameter  $t$  der Geodätischen Krümmung  $\kappa_g$  kennen (vgl. Gleichung (3.55)). Mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes werden wir in der Lage sein, diese Größe zu berechnen.

**Lemma 3.5.3**

Die Ableitung  $\frac{d}{dt}\kappa_g$  der Geodätischen Krümmung  $\kappa_g(s_0, t)$  längs der Geodätischen Offsetkurve  $\alpha_{s_0}(t)$  genügt der Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\kappa_g(s_0, t) = & -\frac{1}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} \left\{ \langle \alpha'''_{s_0}(t), \gamma'_t(s_0) \rangle + 3\kappa_g(s_0, t) \langle \alpha'_{s_0}(t), \alpha''_{s_0}(t) \rangle \right. \\ & \left. + II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha(s_0, t), \partial_t \mathcal{O}_\alpha(s_0, t)) \langle \alpha''_{s_0}(t), N_{s_0}(t) \rangle \right\} \quad (3.61) \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, daß  $\alpha_{s_0}(t)$  kein Fokuspunkt ist. Dabei bezeichnet  $N_{s_0}(t)$  wieder die Flächennormale von  $S$  längs der Geodätischen Offsetkurve  $\alpha_{s_0}(t)$ .

**Beweis:**

Die betrachtete Geodätische Krümmung  $\kappa_g$  entspricht dem tangentialen Anteil des Krümmungsvektors  $k_{s_0}(t)$  der Offsetkurve  $\alpha_{s_0}(t)$ . Bekanntlich ist dieser Krümmungsvektor orthogonal zur Tangente  $\alpha'_{s_0}(t)$ . Da das System  $\gamma'_t, \alpha'_{s_0}, N$  positiv orientiert ist, kann man die Geodätische Krümmung in der Form

$$\begin{aligned} \kappa_g(s_0, t) &= \left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} - \frac{\langle \alpha'_{s_0}(t), \alpha''_{s_0}(t) \rangle}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^4} \alpha'_{s_0}(t), -\gamma'_t(s_0) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \gamma'_t(s_0) \right\rangle \end{aligned}$$

schreiben. Mit der Produktregel erhält man aus dieser Beziehung die Identität

$$\frac{d}{dt}\kappa_g(s_0, t) = -\left\langle \frac{d}{dt} \left[ \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} \right], \gamma'_t(s_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \frac{d}{dt} [\gamma'_t(s_0)] \right\rangle. \quad (3.62)$$

Weiter gilt nun

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} \right] = \frac{\alpha'''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} - 2 \frac{\langle \alpha'_{s_0}(t), \alpha''_{s_0}(t) \rangle}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^4} \alpha''_{s_0}(t),$$

so daß der erste Summand aus Gleichung (3.62)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \left[ \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} \right], \gamma'_t(s_0) \right\rangle &= \left\langle \frac{\alpha'''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \gamma'_t(s_0) \right\rangle - 2 \frac{\langle \alpha'_{s_0}(t), \alpha''_{s_0}(t) \rangle}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^4} \langle \alpha''_{s_0}(t), \gamma'_t(s_0) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\alpha'''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \gamma'_t(s_0) \right\rangle + 2\kappa_g(s_0, t) \frac{\langle \alpha'_{s_0}(t), \alpha''_{s_0}(t) \rangle}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2} \quad (3.63) \end{aligned}$$

entspricht. Der zweite Summand aus Gleichung (3.62) ergibt sich nach Satz 3.4.1, Gleichung (3.47b) durch

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \frac{d}{dt} [\gamma'_t(s_0)] \right\rangle &= \kappa_g(s_0, t) \left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, \alpha'_{s_0}(t) \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\alpha''_{s_0}(t)}{\|\alpha'_{s_0}(t)\|^2}, II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha(s_0, t), \partial_t \mathcal{O}_\alpha(s_0, t)) N_{s_0}(t) \right\rangle. \quad (3.64) \end{aligned}$$

Kombiniert man Gleichung (3.63) und (3.64), so erhält man die behauptete Identität (3.61). ■

Die Formel aus Hilfssatz 3.5.3 für die Ableitung der Geodätischen Krümmung in Richtung einer Offsetkurve kann nun dazu benutzt werden, um  $z_2(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(s, t)$  in Termen von Offsetkurve, Geodätischer und Flächennormale auszudrücken.

### Korollar 3.5.4

Die gemischte zweite partielle Ableitung von  $y(s, t)$  genügt für alle Nicht-Fokalpunkte der gegebenen Progenitorkurve  $\alpha(t)$  der Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(s, t) = & -\frac{1}{y(s, t)} \left\{ \langle \alpha_s'''(t), \gamma_t'(s) \rangle + 2\kappa_g(s, t) \langle \alpha_s'(t), \alpha_s''(t) \rangle \right. \\ & \left. + II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha(s, t), \partial_t \mathcal{O}_\alpha(s, t)) \langle \alpha_s''(t), \mathbf{N}_s(t) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Dabei entspricht  $\mathbf{N}_s(t)$  wieder der Flächennormalen längs der Geodätischen Offsetkurve  $\alpha_s(t)$ .

Der Beweis von Korollar 3.5.4 erfolgt einfach durch Einsetzen von Gleichung (3.61) aus Lemma 3.5.3 in Formel (3.55). Wertet man diese Identität für  $s = 0$  aus, so erhält man den gesuchten Anfangswert für das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.52). Die Berechnung der Anfangswerte für den Fall einer Progenitorkurve wird in dem folgenden Satz zusammengefaßt.

### Satz 3.5.5

Für den Fall einer regulären Progenitorkurve  $\alpha \subset S$  ergeben sich die Anfangswerte des Differentialgleichungssystems (3.52) durch

$$z_1(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(0, t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \quad (3.66a)$$

$$\begin{aligned} z_2(0, t) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} y(0, t) \\ &= -\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \left\{ \langle \alpha'''(t), \gamma_t'(0) \rangle + 2\kappa_g(t) \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \right. \\ &\quad \left. + II(\partial_s \mathcal{O}_\alpha(0, t), \partial_t \mathcal{O}_\alpha(0, t)) \langle \alpha''(t), \mathbf{N}(t) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.66b)$$

wobei  $\kappa_g$  die Geodätische Krümmung von  $\alpha$  und  $\mathbf{N}(t)$  die Flächennormale von  $S$  längs  $\alpha$  bezeichnet.

Es soll an dieser Stelle jedoch nicht verschwiegen werden, daß zur numerischen Behandlung der Differentialgleichung (3.51) bzw. des zugehörigen Systems erster Ordnung (3.52) ein sehr hoher Rechenaufwand benötigt wird. Da man in System (3.52) neben der partiellen Ableitung  $(\partial/\partial t)K$  der Gaußkrümmung auch den Wert der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y(s, t)$  kennen muß, ist die Jacobi Differentialgleichung (3.31) bzw. (3.39) simultan zu lösen. Damit handelt es sich in Wahrheit bei (3.52) um ein Differentialgleichungssystem aus acht Gleichungen.

## 3.6 Numerische Berechnung von Offsetkurven

In diesem Abschnitt wollen wir die numerische Umsetzung der in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse eingehender besprechen und einige Beispiele unserer Berechnungen präsentieren. Insgesamt haben wir in den vorangegangenen Abschnitten drei Differentialgleichungssysteme betrachtet:

<b>Geodätische Differentialgleichung</b> (siehe auch Gleichung (2.10) auf Seite 28)	
Methode:	Differentialgleichungssystem erster Ordnung aus 4 Gleichungen.
Voraussetzung:	$C^2$ -stetige Fläche, ggf. $C^2$ -stetige Flächenkurve.
Anfangswerte:	Nach Lemma 3.1.2 (Progenitorcurven) bzw. Lemma 3.1.4 (Progenitorpunkte).
Ergebnisse:	
$\mathcal{O}(s_0, t_0)$	Bild der Geodätischen Offsetfunktion als Lösung $(u_1(s_0), v_1(s_0))^T$ .
$\alpha_{s_0}(t_0)$	Zugehöriger Punkt der Geodätischen Offsetkurve. Ergibt sich durch $\alpha_{s_0}(t_0) = \mathbf{r}(\mathcal{O}(s_0, t_0))$ .
$\partial_s \mathcal{O}(s_0, t_0)$	Partielle Ableitung der Offsetfunktion bzgl. Geodätischem Abstand, entspricht der Lösung $(u_2(s_0), v_2(s_0))^T$ .
$\gamma'_{t_0}(s_0)$	Tangente der Geodätischen Kurve mittels $\gamma'_{t_0}(s_0) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_s \mathcal{O}(s_0, t_0)$ nach Lemma 3.3.1.
$\partial_{ss} \mathcal{O}(s_0, t_0)$	Zweite partielle Ableitung der Offsetfunktion bzgl. Geodätischem Abstand; ergibt sich als linke Seite der Geodätischen Differentialgleichung.
$\gamma''_{t_0}(s_0)$	Zweite Ableitung der Geodätischen Kurve; kann mit Hilfe von Satz 3.4.1, Gleichung (3.47a) bestimmt werden.

Tabelle 3.1: Anforderungen und Ergebnisse der Geodätischen Differentialgleichung

die Geodätische Differentialgleichung (Abschnitt 2.2 und 3.1), die Jacobi Differentialgleichung (Abschnitt 3.3), sowie die gestörte Jacobi Differentialgleichung (Abschnitt 3.5). Die numerische Behandlung jede dieser Gleichungen kann durch Standardverfahren zur Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erfolgen. Eine Übersicht über die in Frage kommenden Verfahren bietet jedes gute Lehrbuch über Numerische Mathematik, wie z.B. [SH82] oder [SB90]. Wir haben bei unseren Experimenten auf die Implementationen der Numerical Algorithm Group [NAG89] zurückgegriffen, die uns in den Versionen Mark 13 und Mark 18 zur Verfügung standen. Eingesetzt haben wir das sogenannte Runge–Kutta Verfahren, sowie das Verfahren nach Adams. Beide Methoden werden eingehend in [HW76] besprochen.

Zum Lösen der Geodätischen Differentialgleichung hat man das folgende zugehörige System erster Ordnung zu behandeln (vgl. Gleichung (2.10)).

$$u'_1 = u_2 \quad (3.67a)$$

$$u'_2 = -\left(\Gamma_{11}^1 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^1 v_2^2\right) \quad (3.67b)$$

$$v'_1 = v_2 \quad (3.67c)$$

$$v'_2 = -\left(\Gamma_{11}^2 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^2 v_2^2\right). \quad (3.67d)$$

Als Anfangswerte  $u_1(0)$  und  $v_1(0)$  sind die  $uv$ -Parameter des betrachteten Progenitorpunkts  $\mathbf{p}$  bzw.  $\alpha(t_0)$  zu wählen. Die Werte  $u_2(0)$  und  $v_2(0)$  ergeben sich als die korrespondierenden Parameterraumrichtungen der Geodätischen Tangente  $\gamma'_{t_0}(0)$ , die man mit Hilfe der Formeln

<b>Jacobi Differentialgleichung</b> (siehe Gleichung (3.68))	
Methode:	Differentialgleichungssystem erster Ordnung aus 6 Gleichungen.
Voraussetzung:	$C^3$ -stetige Fläche, ggf. $C^3$ -stetige Flächenkurve.
Anfangswerte:	$y(0, t_0) = \ \alpha'(t_0)\ $ und $y'(0, t_0) = \kappa_g y(0, t_0)$ nach Gleichung (3.37) (Progenitorcurven) bzw. $y(0, t_0) = 0$ und $y'(0, t_0) = 1$ nach (3.38) (Progenitorpunkte).
Ergebnisse:	
$y_{t_0}(s_0)$	Vorzeichenbehaftete Funktion der Tangentenlänge der Geodätischen Offsetkurve als Lösung $y_1(s_0, t_0)$ .
$\partial_t \mathcal{O}(s_0, t_0)$	Partielle Ableitung der Offsetfunktion bzgl. Progenitorparameter, ergibt sich aus Gleichung (3.40).
$\alpha'_{s_0}(t_0)$	Tangente der Geodätischen Offsetkurve, genügt nach Lemma 3.3.1 $\alpha'_{t_0}(s_0) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathcal{O}(s_0, t_0)$ .
$y'_{t_0}(s_0)$	Veränderung der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven unter Variation des Geodätischen Abstands, gegeben durch die Lösung $y_2(s_0, t_0)$ .
$\kappa_g(t_0)$	Geodätische Krümmung der Offsetkurve im Punkt $\alpha_{s_0}(t_0)$ , falls dieser kein singulärer Punkt ist. Ergibt sich nach Satz 3.3.7 durch $\kappa_g(t_0) = \frac{y'_{t_0}(s_0)}{y_{t_0}(s_0)}$ .
$\frac{\partial}{\partial t} \gamma'_{t_0}(s_0)$	Gemischte zweite partielle Ableitung Geodätischer Koordinaten, stimmt mit $\frac{\partial}{\partial s} \alpha'_{s_0}(t_0)$ überein. Kann mit Hilfe von Satz 3.4.1, Gleichung (3.47b) berechnet werden.
$\partial_{st} \mathcal{O}(s_0, t_0)$	Gemischte zweite partielle Ableitung der Offsetfunktion nach Gleichung (3.48).
$y''_{t_0}(s_0)$	Zweite Ableitung der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven, gegeben als linke Seite der Jacobi Differentialgleichung.

Tabelle 3.2: Anforderungen und Ergebnisse der Jacobi Differentialgleichung

in Lemma 3.1.4 bzw. Lemma 3.1.2 berechnen kann. Folglich erhält man mit der Lösung von (3.67) den Wert der Geodätischen Offsetfunktion  $\mathcal{O}(s, t_0) = (u_1(s_0), v_1(s_0))^T$  und ihre partielle Ableitung nach dem Geodätischen Abstand  $s$   $\partial_s \mathcal{O}(s, t_0) = (u_2(s_0), v_2(s_0))^T$ . In Tabelle 3.1 sind die wichtigsten Eigenschaften der Geodätischen Differentialgleichung, sowie die mit ihrer Hilfe zu ermittelnden Größen zusammengefaßt.

Die Jacobi Differentialgleichung wird durch Lösen des zugehörigen Systems erster Ordnung (3.39) behandelt. Da die Gauß-Krümmung  $K(s, t_0)$  für jeden Schritt des Lösungsverfahrens zu bestimmen ist, müssen die Parameterwerte des betreffenden Punkts  $\gamma_{t_0}(s)$  der Geodätischen Kurve gleichzeitig bekannt sein. Dies erreicht man durch simultanes Lösen der Geodätischen

<b>Gestörte Jacobi Differentialgleichung</b> (siehe Gleichung (3.52))	
Methode:	Differentialgleichungssystem erster Ordnung aus 8 Gleichungen.
Voraussetzung:	$C^4$ -stetige Fläche, ggf. $C^4$ -stetige Flächenkurve.
Anfangswerte:	Nach Satz 3.5.5 (Progenitorcurven) bzw. nach Gleichung (3.53) (Progenitorpunkte).
Ergebnisse:	
$\frac{\partial}{\partial t}y(s_0, t_0)$	Veränderung der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven unter Variation des Progenitorparameters als Lösung $z_1(s_0, t_0)$ .
$\alpha''_{s_0}(t_0)$	Zweite Ableitung der Geodätischen Offsetkurve unter Verwendung von Satz 3.4.1, Gleichung (3.47c).
$\partial_{tt}\mathcal{O}(s_0, t_0)$	Zweite partielle Ableitung der Offsetfunktion bzgl. Progenitorparameter nach Gleichung (3.49).
$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}y(s_0, t_0)$	Gemischte zweite partielle Ableitung der Funktion der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven durch Lösung $z_2(s_0, t_0)$ .
$\frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t}y(s_0, t_0)$	Dritte partielle Ableitung der Funktion der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven als linke Seite der Differentialgleichung.

Tabelle 3.3: Anforderungen und Ergebnisse der gestörten Jacobi Differentialgleichung

Differentialgleichung (3.67). Daher betrachtet man das zu sechs Gleichungen erweiterte System

$$u'_1 = u_2 \quad (3.68a)$$

$$u'_2 = -\left(\Gamma_{11}^1 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^1 v_2^2\right) \quad (3.68b)$$

$$v'_1 = v_2 \quad (3.68c)$$

$$v'_2 = -\left(\Gamma_{11}^2 u_2^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_2 v_2 + \Gamma_{22}^2 v_2^2\right) \quad (3.68d)$$

$$y'_1(s, t_0) = y_2(s, t_0) \quad (3.68e)$$

$$y'_2(s, t_0) = -K(u_1, v_1) y_1(s, t_0) \quad (3.68f)$$

Die ersten vier Gleichungen in System (3.68) entsprechen den Geodätischen Differentialgleichungen (3.67). Daher werden die Werte  $\mathcal{O}(s, t_0) = (u_1(s_0), v_1(s_0))^T$ ,  $\partial_s \mathcal{O}(s, t_0) = (u_2(s_0), v_2(s_0))^T$  ebenfalls bestimmt. Neben den oben besprochenen Anfangswerten für die Geodätische Differentialgleichung ist  $y_1(0, t_0) = y(0, t_0)$  und  $y_2(0, t_0) = (\partial/\partial s)y(0, t_0)$  wie in Gleichung (3.37) im Progenitorcurvenfall oder wie in Gleichung (3.38) im Fall eines Progenitorpunktes zu wählen. Nachdem die Jacobi Differentialgleichung gelöst wurde, können eine Reihe weiterer geometrischer Größen bestimmt werden. Mit Ausnahme der bereits in Tabelle 3.1 aufgeführten Einträge werden diese in Tabelle 3.2 zusammengefaßt.

Schließlich wollen wir eine ähnliche Zusammenfassung des Systems der gestörten Jacobi Differentialgleichung (3.52) erstellen. Wie bereits am Ende von Abschnitt 3.5 erwähnt, muß man simultan zu (3.52) ebenfalls die Jacobi Differentialgleichung lösen. Damit erhält man ein System aus acht Differentialgleichungen erster Ordnung (welches wir an dieser Stelle nicht mehr explizit

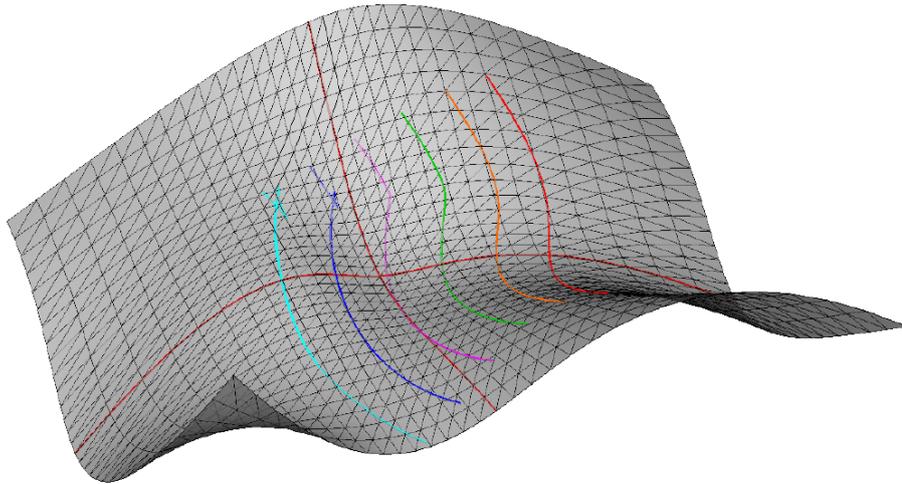


Abbildung 3.3: Geodätische Offsetkurven einer Kurve auf einer  $C^2$ -stetigen BSpline-Fläche

angeben wollen). Die benötigten Formeln zur Bestimmung der restlichen Anfangswerte wurden im letzten Abschnitt erläutert. Die passenden Referenzen wurden in Tabelle 3.3 vermerkt.

Nachdem die bislang entwickelten Methoden tabellarisch zusammengefaßt wurden, sollen nun noch einige Beispiele unserer Berechnungen präsentiert werden. Begleitend zu dieser Arbeit wurde vom Autor ein umfassendes Programmpaket implementiert, mit dessen Hilfe die mathematischen Konzepte in der Praxis erprobt wurden. Einige Ergebnisse dieser Berechnungen wurden bereits in den Abbildungen 2.2, 2.3 und 2.6 in Abschnitt 2.4 gezeigt. Diese Abbildungen können bereits als Beispiele der numerischen Behandlung der Geodätischen Differentialgleichung betrachtet werden.

Ein Vertreter Geodätischer Offsets einer Flächenkurve ist in Abbildung 3.3 zu finden. Bei der betrachteten Fläche handelt es sich um eine Spline-Fläche vom Grad 3 in beiden Parameterrichtungen, bestehend aus vier Teilsegmenten. Die Segmentübergänge sind bei dieser Fläche krümmungsstetig. In der Repräsentation als BSpline-Fläche ist die Fläche durch die deBoor-Kontrollpunkte

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

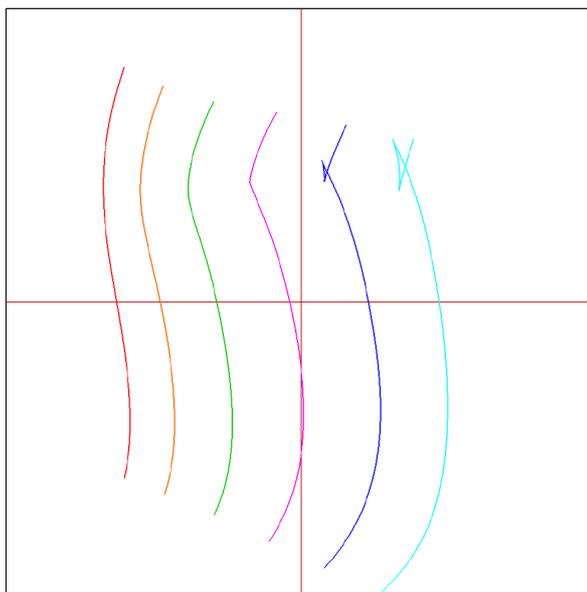


Abbildung 3.4: Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.3

und dem Knotenvektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2)$  gegeben, der für beide Parameterraumrichtungen identisch ist. Als Parameterraum der Fläche ergibt sich damit  $[0, 2] \times [0, 2]$ . Die Segmentgrenzen der Fläche wurden in Abbildung 3.3 in roter Farbe eingezeichnet. Die betrachtete Progenitorkurve ist ebenfalls eine BSplinekurve. Sie besitzt den Grad 3 und den Knotenvektor  $T = (0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1)$ . Sie ist ebenfalls  $C^2$ -stetig an ihrer Segmentgrenze  $t = 1/2$ . Ihre deBoor-Punkte lauten

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.35 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.8 \end{pmatrix}.$$

Diese Progenitorkurve wurde sowohl in Abbildung 3.3 als auch in Abbildung 3.4, die alle zugehörigen Parameterraumkurven in korrespondierender Farbe zeigt, rot gezeichnet. Insgesamt wurden fünf Geodätische Offsets berechnet, die alle unterschiedlichen Farbe dargestellt wurden. Die hierbei gewählten Abstände sind die Vielfachen von  $2/5$  bis zu einem maximalen Abstandswert von  $s = 2$  im Fall der magentafarbenen Offsetkurve.

Sowohl in Abbildung 3.3 als auch in der zugehörigen Darstellung des  $uv$ -Parameterraums erkennt man, daß die Offsets im Abstand  $s = 8/5$  (blaue Kurve) und jene im Abstand  $s = 2$  singuläre Punkte besitzen. Sie stimmen mit den Spitzen beider Kurven überein. Die zugehörigen Tangenten der Offsetkurven verschwinden an diesen Stellen. Bevor wir ein weiteres Beispiel für das Auftreten solcher Fokalfunkte der betrachteten Progenitorobjekte liefern, wollen wir das Jacobifeld der Offsetkurventangenten längs Geodätischer Kurven visualisieren.

In Abbildung 3.5 erkennt man die gleiche BSpline-Fläche des letzten Beispiels, aus einer anderen Blickrichtung betrachtet, wieder. Diesmal ist als Progenitorobjekt der Flächenpunkt mit den Parameterwerten  $\mathbf{p} = (1.3, 0.6)^T$  gewählt. Um diesen Flächenpunkt betrachten wir insgesamt drei Geodätische Offsets mit den Abständen 0.3, 0.6 bzw. 0.9. Die resultierenden Kurven wurden in Rot, Orange bzw. Grün eingezeichnet. Dies betrifft wieder sowohl Abbildung 3.5 als auch Abbildung 3.6, in der die Situation im  $uv$ -Parameterraum wiedergegeben wird. In der Farbe Magenta werden drei Geodätische Kurven ausgehend vom Punkt  $\mathbf{p}$  dargestellt. Ihre vorgegebene

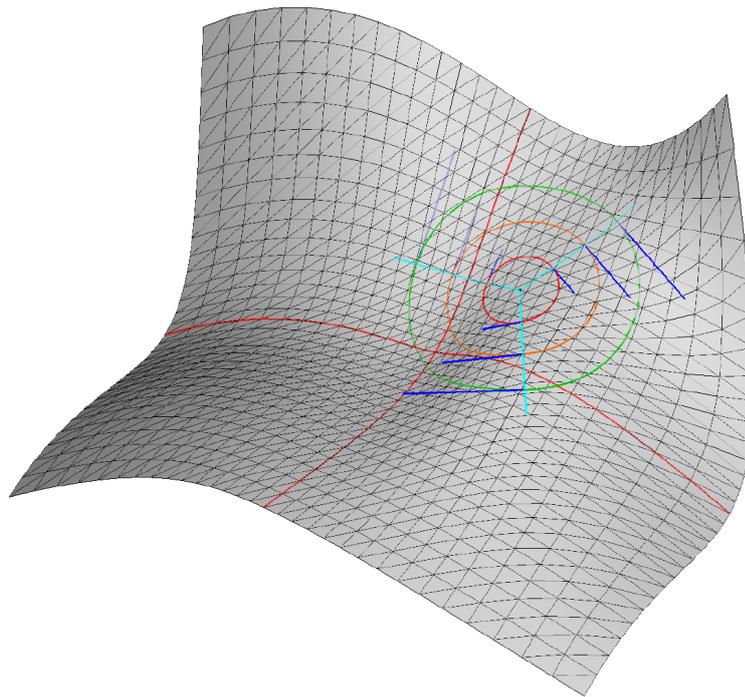


Abbildung 3.5: Geodätische Offsetkurven und Jacobifeld eines Flächenpunktes auf einer  $C^2$ -stetigen BSpline-Fläche

Bogenlänge beträgt 1.1, ihre Startwinkel betragen  $-\pi/3$ ,  $\pi/3$  und  $\pi$ . Die blau eingezeichneten neun Vektoren sind Tangenten der Offsetkurven in ihren Schnittpunkten mit den Geodätischen. (Drei dieser tangentialen Vektoren sind in Abbildung 3.5 nur recht schemenhaft zu erkennen. Dies resultiert aus ihrem Verlauf unterhalb der Fläche aus Sicht des Betrachters. Daß man sie dennoch erkennen kann, wurde durch Benutzung eines entsprechenden Alphawerts bei der Darstellung der Fläche erreicht, der diese etwas transparent werden läßt.)

Anhand von Abbildung 3.6 erkennt man ferner, daß die partiellen Ableitungen der Geodätischen Offsetfunktion  $\partial_s \mathcal{O}$  und  $\partial_t \mathcal{O}$  im allgemeinen nicht orthogonal zueinander sind. Diese Vektoren des Parameterraums induzieren die Tangenten der Geodätischen Kurve bzw. der Geodätischen Offsetkurve durch die Beziehungen

$$\gamma'_{t_0}(s_0) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_s \mathcal{O}(s_0, t_0) \quad \text{bzw.} \quad \alpha'_{s_0}(t_0) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathcal{O}(s_0, t_0);$$

letztgenannte Tangenten sind orthogonale Vektoren im Tangentialraum der Fläche. Eine Orthogonalität zwischen  $\partial_s \mathcal{O}$  und  $\partial_t \mathcal{O}$  liegt aufgrund dieser Beziehung genau dann vor, wenn die betrachtete Parametrisierung winkeltreu ist.

Es ist übrigens bemerkenswert, daß es sich bei der BSpline-Fläche in Abbildung 3.5 lediglich um eine  $C^2$ -stetige Fläche handelt. Dies mag auf den ersten Blick etwas verwundern, da wir aus formalen Gründen zur Formulierung und Behandlung der Jacobi Differentialgleichung eine mindestens dreimal stetig partiell differenzierbare Fläche fordern mußten. Zur Berechnung der Tangenten der Geodätischen Offsetkurven in Abbildung 3.5 wurde aber offensichtlich die Jacobi Differentialgleichung eingesetzt. Das Verfahren erwies sich dennoch über die Segmentgrenzen der Spline-Fläche hinaus als stabil. Der Grund für unsere hohen Stetigkeitforderungen stellt die Gewährleistung der Existenz der partiellen Ableitung  $\partial_t \mathcal{O}$  der Offsetfunktion dar. Tatsächlich war die Frage, ob denn  $\partial_t \mathcal{O}$  im Fall einer  $C^2$ -Fläche als stetige Funktion existiert, eine gewisse

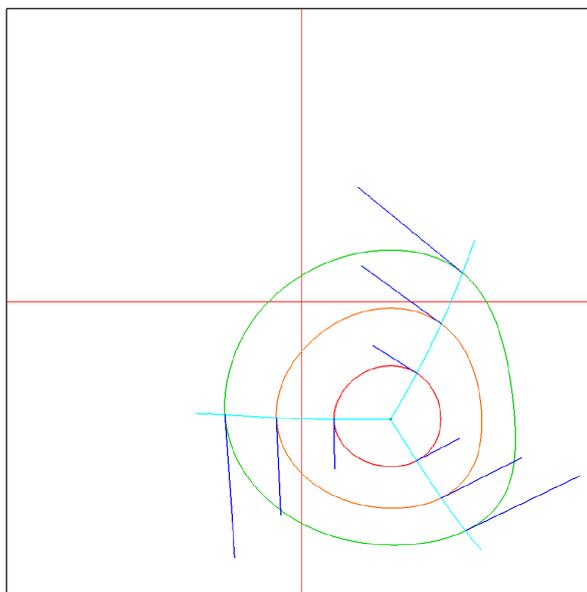


Abbildung 3.6: Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.5 und partielle Ableitungen der Offsetfunktion

Zeit eine offene Frage, bis Hartman in [Har51] ein Gegenbeispiel präsentieren konnte. Er selbst bezeichnet dort sein Gegenbeispiel als kurios („curious“), so daß man mit einiger Hoffnung für die Praxis erwarten kann, daß krümmungsstetige Flächen hinreichende Voraussetzungen für die präsentierten Methoden bieten. Dies deckt sich auch mit unseren Beobachtungen, nach denen die Jacobi Differentialgleichung auch über die Segmentgrenzen einer  $C^2$ -Fläche hinaus „vernünftige“ Resultate lieferte.

In dem letzten Beispiel besitzen die Geodätischen Offsets keine singulären Punkte. Dies erahnt man bereits daran, daß die eingezeichneten Tangentenvektoren der Geodätischen Offsets (blaue Farbe) längs der betrachteten Geodätischen ein monotonen Wachstumsverhalten besitzen. Um das Verhalten der Tangentenlängen im Fall einer fokalen Situation zu studieren, geben wir ein letztes Beispiel der numerischen Auswertung der Jacobi Differentialgleichung. In Abbildung 3.7 wird als Flächengeometrie der Torus betrachtet. Er wurde als Rotationsfläche des Kreises in der  $xz$ -Ebene mit Radius Eins und Mittelpunkt  $(3, 0, 0)^T$  durch Rotation um die  $z$ -Achse erzeugt. Als Parameterraum ergibt sich damit  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Als Progenitorkurve betrachten wir die Erzeugende des Torus, die wieder in roter Farbe eingezeichnet wurde. Die magentafarbene Kurve längs des Äquators entspricht der Geodätischen, die im rechten Winkel zur Progenitorkurve im Punkt  $\mathbf{q} := (4, 0, 0)^T$  startet. In den Farben Orange, Grün, Pink und Blau erkennt man Geodätische Offsets in den Abständen 1, 2, 3 und 4. Durch die Verwendung eines Alphawerts wurde der Torus wieder leicht transparent dargestellt, so daß man sich davon überzeugen kann, daß alle Offsetkurven geschlossene Kurven sind.

Zunächst erkennt man im Fall der blau dargestellten Offsetkurve im Abstand  $s = 4$  die Existenz von Fokalfpunkten bezüglich der roten Progenitorkurve. Aus Symmetriegründen muß der fokale Abstand, gemessen längs der magentafarbenen Geodätischen, des Progenitorkurvenpunkts  $\mathbf{q}$  demnach zwischen Drei und Vier liegen, da die pinkfarbene Offsetkurve keinen singulären Punkt besitzt. (Diese Eigenschaft der Offsetkurve im Abstand  $s = 3$  erkennt man natürlich nicht zuverlässig mit Hilfe von Abbildung 3.7 bzw. 3.8; sie wurde anhand der berechneten Ableitungen  $\partial_t \mathcal{O}$  verifiziert.) Um dies zu veranschaulichen, wurden in Abbildung 3.7 acht Offsetkurventan-

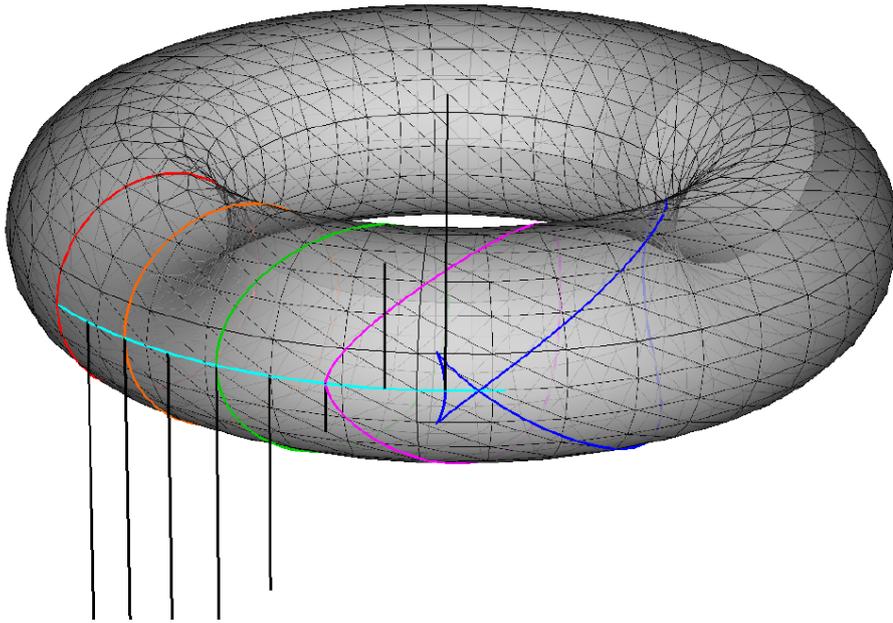


Abbildung 3.7: Geodätische Offsetkurven und Jacobifeld der Erzeugenden des Torus

genten längs der fraglichen Geodätischen in äquidistanten Schritten der Länge  $1/2$  in schwarzer Farbe eingezeichnet. Aus Platzgründen sind die ersten vier Tangenten (von links nach rechts gezählt) in 3.7 nicht vollständig abgebildet worden. Die Tangenten der zugehörigen Parameterraumkurven in Abbildung 3.8 wurden dagegen ungekürzt wiedergegeben. Nach Konvention hat die Längenfunktion  $y_{t_0}(s)$  zu Anfang (d.h. für  $s = 0$ ) positives Vorzeichen. Man erkennt das  $y_{t_0}$  streng monoton fällt. Zwischen der pinkfarbenen ( $s = 3$ ) und der blauen Offsetkurve ( $s = 4$ ) kommt es zu dem vermuteten Vorzeichenwechsel. Hier befindet sich nach Definition der Fokalpunkt der Progenitorkurve bezüglich des Kurvenpunkts  $\mathbf{q}$ .

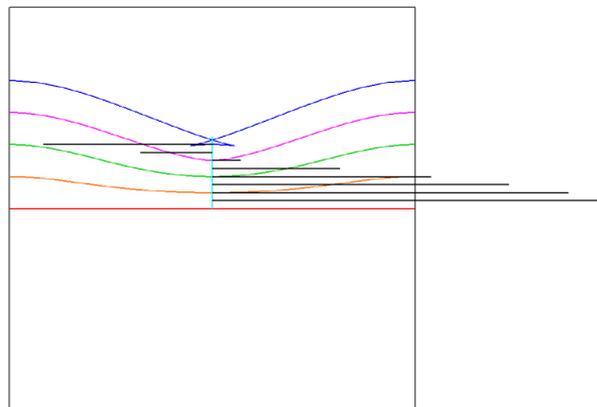


Abbildung 3.8: Parameterraumkurven der Geodätischen Offsetkurven aus Abbildung 3.7

# Kapitel 4

## Mediale Kurven

### 4.1 Verallgemeinerte Mediale Kurven

Im folgenden betrachten wir zwei Progenitorobjekte auf einer regulären parametrischen Fläche  $S$ , die (solange nicht explizit anders gefordert) mindestens  $C^2$ -stetig sei. Bei den Progenitorobjekten darf es sich sowohl um reguläre, mindestens  $C^2$ -stetige Kurven als auch um Flächenpunkte handeln. Die zugehörigen Geodätischen Offsetfunktionen seien mit  $\mathcal{O}(s, t)$  und  $\widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{s}, \tilde{t})$  bezeichnet. In beiden Fällen kann damit also eine Offsetfunktion bezüglich einer Flächenkurve  $\alpha$  oder bezüglich eines Punktes  $\mathbf{p} \in S$  gemeint sein. Unser Ziel ist es, die Menge aller Punkte auf der Fläche  $S$  zu bestimmen, die in halbem Geodätischen Abstand zwischen diesen beiden Progenitorobjekten liegen. Etwas allgemeiner führen wir die folgende Sprechweise ein.

#### Definition 4.1.1

Zu zwei Progenitorobjekten einer parametrischen Fläche  $S$  mit Parameterabbildung  $\mathbf{r}$  und einer differenzierbaren, reellwertigen Funktion  $b(t)$  mit  $0 < b(t) < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , sei die vektorwertige Funktion  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$\mathbf{F}(s, t, \tilde{t}) := \widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t) s, \tilde{t}) - \mathcal{O}(\sigma s, t)$$

gegeben. Dabei sind  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \{-1, 1\}$  konstante Vorzeichen, die kontrollieren, zu welcher Seite der Geodätische Offset betrachtet werden soll. Nach Konvention soll der Geodätische Abstand  $s \geq 0$  genügen. Die Menge

$$\left\{ \mathbf{r}(\mathcal{O}(\sigma s_0, t_0)) = \mathbf{r}(\widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t_0) s_0, \tilde{t}_0)) \mid F(s_0, t_0, \tilde{t}_0) = \mathbf{0} \right\}$$

nennen wir verallgemeinerte Mediale Kurve bezüglich der gegebenen Progenitorobjekte. Gilt speziell  $b(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so nennen wir die Menge Mediale Kurve.

Um diese Definition genauer zu besprechen, betrachten wir für einen Augenblick den Spezialfall zweier Progenitorkurven  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$ . Die durch die zugehörigen Offsetfunktionen  $\mathcal{O}$  bzw.  $\widetilde{\mathcal{O}}$  induzierten Geodätischen Kurven  $\gamma_{t_0}(s) = \mathbf{r}(\mathcal{O}(s, t_0))$  bzw.  $\tilde{\gamma}_{\tilde{t}_0}(s) = \mathbf{r}(\widetilde{\mathcal{O}}(s, \tilde{t}_0))$  haben nach Definition 3.2.1 die Eigenschaft, daß  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$ ,  $\mathbf{N}$  bzw.  $\tilde{\gamma}'_{\tilde{t}_0}(0)$ ,  $\tilde{\alpha}'(\tilde{t}_0)$ ,  $\mathbf{N}$  eine positiv orientierte Orthogonalbasis bilden. Ein positives Vorzeichen  $\sigma$  bedeutet daher, daß die Geodätische  $\gamma_{t_0}$  in positiver Richtung startet. Ein negatives Vorzeichen läßt die Geodätische nach links laufen

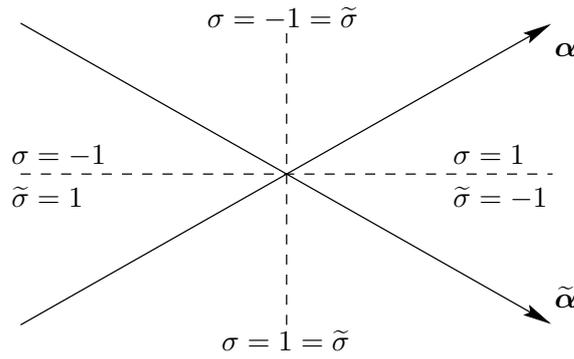


Abbildung 4.1: Verlauf der Medialen Kurve bei links- bzw. rechtsseitigem Offsetting

(aus der Sicht der Flächenkurve  $\alpha(t)$  unter Berücksichtigung der Flächenorientierung  $\mathbf{N}$ ). Entsprechendes gilt für die zweite Geodätische  $\tilde{\gamma}_{t_0}$ . Jede Wurzel  $(s_0, t_0, \tilde{t}_0)$  der Funktion  $\mathbf{F}$  genügt der Gleichung

$$\mathcal{O}(\sigma s_0, t_0) = \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t_0) s_0, \tilde{t}_0).$$

Dies impliziert

$$\gamma_{t_0}(\sigma s_0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{t}_0}(\tilde{\sigma} b(t_0) s_0),$$

d.h. die Geodätischen Kurven  $\gamma_{t_0}$  und  $\tilde{\gamma}_{\tilde{t}_0}$ , die beide im rechten Winkel von der jeweiligen Progenitorcurve  $\alpha$  bzw.  $\tilde{\alpha}$  starten, schneiden sich im Geodätischen Abstand  $s_0$  bzw.  $b(t_0)s_0$ . Falls die Funktion  $b(t)$  konstant Eins gewählt wurde, hat dieser Schnittpunkt den Geodätischen Abstand  $s_0$  zu beiden Progenitorcurven (gemessen längs den Geodätischen Kurven  $\gamma_{t_0}$  und  $\tilde{\gamma}_{\tilde{t}_0}$ , die — wie oben erläutert — nicht unbedingt distanzminimal sein müssen). Dies rechtfertigt die Verwendung des Wortes *Medial* in diesem Zusammenhang. Für eine beliebige Wahl von  $b(t)$  stehen die Geodätischen Abstände im Verhältnis  $1 : b(t)$ . Es muß an dieser Stelle noch einmal deutlich gemacht werden, daß die betrachteten Geodätischen nicht notwendigerweise global kürzeste Verbindungen realisieren. Daher könnte man auch von *Lokal Medialen Kurven* sprechen.

Die eben erläuterten Eigenschaften von Definition 4.1.1 bleiben unverändert gültig im Fall von Progenitorpunkten. Die einzige Ausnahme betrifft die Rolle des Vorzeichens  $\sigma$  bzw.  $\tilde{\sigma}$ . Bei Progenitorpunkten startet  $\gamma_{t_0}$  in zu  $\mathbf{r}_u$  tangentialem Winkel  $t_0$ . Eine Unterscheidung zwischen links- und rechtsseitigem Offsetting ist hierbei nicht sinnvoll. (Würde man  $\sigma = -1$  wählen, so entspräche dies dem tangentialem Winkel  $t_0 + \pi$ .) Daher vereinbaren wir für Progenitorpunkte stets positives Vorzeichen  $\sigma = 1$ .

Im Fall von Progenitorcurven ist die Benutzung der Vorzeichen jedoch essentiell. Hiefür betrachte man das einfache Beispiel zweier sich schneidender Geraden in der Euklidischen Ebene (siehe Abbildung 4.1). Die Mediale Kurve enthält die Winkelhalbierenden, die dort gestrichelt dargestellt sind. Ausgehend vom Schnittpunkt beider Geraden kann man die vier Äste der Medialen mit Hilfe der Vorzeichen unterscheiden, wie dies in Abbildung 4.1 geschehen ist.

Sei nun  $(s_0, t_0, \tilde{t}_0)$  eine Wurzel von  $\mathbf{F}$  mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det \left( \partial_s \mathbf{F}(s_0, t_0, \tilde{t}_0), \partial_{\tilde{t}} \mathbf{F}(s_0, t_0, \tilde{t}_0) \right) \\ &= \det \left( \tilde{\sigma} b(t_0) \partial_s \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t_0) s_0, \tilde{t}_0) - \sigma \partial_s \mathcal{O}(\sigma s_0, t_0), \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t_0) s_0, \tilde{t}_0) \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nach dem Satz über Implizite Funktionen existiert eine Umgebung  $J \subset I$  von  $t_0$ , sowie differenzierbare Funktionen  $s, \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß

$$\mathbf{F}(s(t), t, \varphi(t)) = \mathbf{0}$$

für alle  $t \in J$  gilt. Im folgenden nennen wir  $s(t)$  die *Funktion des Medialen Abstands* und  $\varphi(t)$  den *geschleppten* oder *korrespondierenden Parameter* des zweiten Progenitorobjekts. Die zugehörige, implizit definierte Kurve  $\mathbf{m}(t)$  im Parameterraum von  $S$  genügt der Beziehung

$$\mathcal{O}(\sigma s(t), t) = \mathbf{m}(t) = \widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t) s(t), \varphi(t)) \quad (4.2)$$

für alle  $t \in J$ . Die induzierte Flächenkurve  $\boldsymbol{\mu}(t) := \mathbf{r}(\mathbf{m}(t))$  ist damit eine stückweise Parametrisierung der Menge, die in Definition 4.1.1 eingeführt wurde. Differenziert man Gleichung (4.2) nach der Variablen  $t$ , so erhält man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen<sup>1</sup>

$$\left( \tilde{\sigma} b(t) \partial_s \widetilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}, \partial_t \widetilde{\mathcal{O}} \right) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \partial_t \mathcal{O} - \tilde{\sigma} b'(t) s(t) \partial_s \widetilde{\mathcal{O}}. \quad (4.3)$$

Da die Regularitätsbedingung (4.1) nach dem Satz über Implizite Funktionen für alle  $t \in J$  (nach etwaiger Verkleinerung der Umgebung  $J$ ) erfüllt ist, ist die Matrix in Gleichung (4.3) regulär in  $J$ . Durch Invertieren dieser Matrix ergibt sich daher

$$\begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \left( \tilde{\sigma} b(t) \partial_s \widetilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}, \partial_t \widetilde{\mathcal{O}} \right)^{-1} \left( \partial_t \mathcal{O} - \tilde{\sigma} b'(t) s(t) \partial_s \widetilde{\mathcal{O}} \right).$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, welches benutzt werden kann, um die verallgemeinerte Mediale Kurve zu berechnen. Die dazu benötigten partiellen Ableitungen von  $\mathcal{O}$  und  $\widetilde{\mathcal{O}}$  der Geodätischen Offsetfunktion erhält man mit den in Abschnitt 3.3 vorgestellten Techniken.

Offensichtlich ist es wichtig, die Regularität der Matrix aus Gleichung (4.3) zu gewährleisten. Prinzipiell gibt es drei mögliche Gründe, warum die Matrix singular werden könnte. Entweder ist einer der beiden Spaltenvektoren trivial oder beide Vektoren sind linear abhängig. Im folgenden wollen wir alle drei Fälle im einzelnen analysieren.

Nehmen wir zunächst an, die zweite Spalte entspräche dem Nullvektor, d.h. es gelte  $\partial_t \widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{0}$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn die Mediale Kurve einen Fokalfunkt bzgl. des zweiten Progenitorobjekts passiert, da nach Lemma 3.3.1

$$\tilde{\sigma}'_{\tilde{\sigma} b(t) s(t)}(\varphi(t)) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \widetilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t) s(t), \varphi(t)) = \mathbf{0}$$

gilt und  $\mathbf{r}$  eine reguläre Parametrisierung ist.

Als zweiten Fall behandeln wir die Situation, in der der erste Spaltenvektor verschwindet. Es gelte also die Identität  $\tilde{\sigma} b(t) \partial_s \widetilde{\mathcal{O}} = \sigma \partial_s \mathcal{O}$ . Multipliziert man diese Gleichung mit der Jacobimatrix  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  der Parametrisierung, so erhält man mit Hilfssatz 3.3.1

$$\sigma \gamma'_t(\sigma s(t)) = \tilde{\sigma} b(t) \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} b(t) s(t)). \quad (4.4)$$

Dies impliziert, daß die beiden Geodätischen Kurven im Medialen Punkt die gleiche tangentielle Richtung besitzen. Nach Lemma 2.2.2, welches besagt, daß Geodätische Kurven durch

<sup>1</sup>Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die partielle Ableitung der Offsetfunktion  $\widetilde{\mathcal{O}}$  nach der Veränderlichen  $\tilde{t}$  mit  $\partial_{\tilde{t}} \widetilde{\mathcal{O}}$  und nicht durch  $\partial_t \widetilde{\mathcal{O}}$ .

einen Anfangspunkt und eine Anfangsrichtung eindeutig bestimmt sind, stellen die betrachteten Kurven  $\gamma_t$  und  $\tilde{\gamma}_{\varphi(t)}$  Parametrisierungen der gleichen Geodätischen Kurve (möglicherweise zu unterschiedlichen Parameterintervallen) dar. Da beide Kurven nach Vereinbarung nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sind, kann dieser Fall nur für  $b(t) = 1$  eintreten, da sonst die Tangentenvektoren in Gleichung (4.4) nicht die gleiche Länge besäßen. Damit müssen die zugehörigen Punkte des Progenitorobjekts identisch sein. Im Fall zweier Progenitorcurven liegt ein tangentialer Schnittpunkt beider Objekte vor, bei einem Progenitorpunkt  $\mathbf{p}$  und einer Progenitorkurve  $\alpha$  ist der Punkt  $\mathbf{p}$  Element der Spur von  $\alpha$ . Betrachtet man zwei Progenitorpunkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  aus  $S$ , so sind die Progenitorobjekte identisch. Jeder dieser Unterfälle entspricht einer Situation, in der man keinen eindeutigen zugehörigen Medialen Punkt bestimmen kann. Streng genommen wäre die Lösung eine komplette Kurve (Kurve / Kurve und Kurve / Punkt) oder sogar die komplette Fläche (Punkt / Punkt). Daher können wir ohne Beschränkung annehmen, daß die erste Spalte der Matrix stets vom Nullvektor verschieden ist. Bei der numerischen Behandlung der Differentialgleichung (4.3) ist beim Auftreten einer der genannten Fälle die Berechnung abubrechen.

Für den letzten verbleibenden Fall nehme man die Existenz einer reellen Zahl  $\lambda \neq 0$  an, so daß

$$\tilde{\sigma} b(t) \partial_s \tilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O} = \lambda \partial_t \tilde{\mathcal{O}}$$

gilt, was äquivalent zur Annahme der linearen Abhängigkeit der beiden Spaltenvektoren ist. Erneut multiplizieren wir diese Gleichung mit der Jacobimatrix  $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  und benutzen Hilfssatz 3.3.1, um

$$\tilde{\sigma} b(t) \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} b(t) s(t)) - \sigma \gamma'_t(\sigma s(t)) = \lambda \tilde{\alpha}'_{\tilde{\sigma} b(t) s(t)}(\varphi(t)). \quad (4.5)$$

zu erhalten. Da der Vektor  $\tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}$  orthogonal zur Offsetkurven-Tangente  $\tilde{\alpha}'_{\tilde{\sigma} b(t) s(t)}$  ist, erhält man aus Gleichung (4.5) durch Multiplikation mit  $\tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} b(t) s(t))$

$$\left\langle \gamma'_t(\sigma s(t)), \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} b(t) s(t)) \right\rangle = \sigma \tilde{\sigma} b(t). \quad (4.6)$$

Nach Konvention sind alle betrachteten Geodätischen Kurven nach ihrer Bogenlänge parametrisiert, haben also Tangentenlänge Eins. Gleichung (4.6) besagt also anschaulich, daß der Winkel zwischen beiden Geodätischen im Medialen Punkt  $\arccos(\pm b(t))$  betragen muß. Diese Bedingung kann sicherlich nicht für ein Verhältnis  $b(t) > 1$  erfüllt sein.

Betrachten wir diesen letzten Fall speziell für ein konstantes Verhältnis  $b(t) = 1$  für alle  $t$ . Da die beiden Geodätischen im Medialen Punkt keine gemeinsame tangentiale Richtung besitzen dürfen (vgl. zweiten Fall), hat Bedingung (4.6) in diesem Spezialfall die Gestalt

$$\left\langle \gamma'_t(\sigma s(t)), \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t)) \right\rangle = \sigma \tilde{\sigma} = -1,$$

da für  $\sigma \tilde{\sigma} = 1$  ein Schnittwinkel von Null vorliegen würde. Setzt man diese Beziehung in Gleichung (4.5) ein, so erhält man

$$2 \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t)) = \tilde{\sigma} \lambda \tilde{\alpha}'_{\tilde{\sigma} s(t)}(\varphi(t)),$$

was jedoch der Tatsache widerspricht, daß  $\tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t))$  und  $\tilde{\alpha}'_{\tilde{\sigma} s(t)}(\varphi(t))$  orthogonal zueinander sind (siehe Lemma 3.3.3). Damit konnte gezeigt werden, daß die Spaltenvektoren der Matrix für die Wahl  $b(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  linear unabhängig sind. Die Ergebnisse dieser Diskussion können in dem nachfolgenden Satz zusammengefaßt werden.

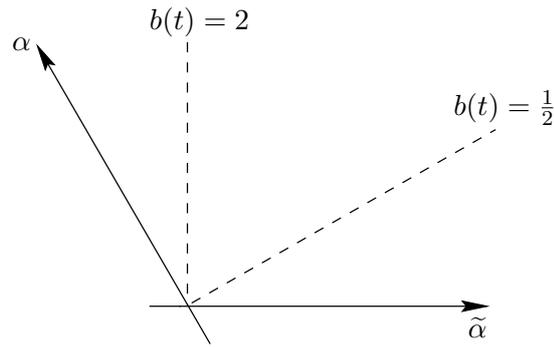


Abbildung 4.2: Verallgemeinerte Mediale Kurve zweier Geraden in der Euklidischen Ebene

**Satz 4.1.2**

Wenn das Verhältnis des Geodätischen Abstands  $b(t)$  der Bedingung  $b(t) \geq 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  genügt, dann ist die Matrix  $(\tilde{\sigma} b(t) \partial_s \tilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}, \partial_t \tilde{\mathcal{O}})$  zu paarweise verschiedenen Progenitorpunkten genau dann singulär, wenn  $\partial_t \tilde{\mathcal{O}} = \mathbf{0}$  gilt. Dies entspricht der Situation, daß der zugehörige Mediale Punkt ein Fokuspunkt bzgl. des zweiten Progenitorobjekts ist.

Wie bereits oben erwähnt, ist die Bedingung der paarweise verschieden Progenitorpunkte in Abhängigkeit der zugrundeliegenden Progenitorobjekte unterschiedlich zu verstehen. Betrachtet man die Mediale Kurve zu zwei Progenitorpunkten  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ , so lautet die Vorgabe einfach  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ . Wird die Situation zu den Objekten  $\mathbf{p} \in S$  und  $\alpha \subset S$  behandelt, so lautet die Bedingung  $\mathbf{p} \neq \alpha(t)$  (bzw.  $\mathbf{p} \neq \alpha(\varphi(t))$ ) für alle  $t$ . Bei zwei Progenitorkurven und  $b(t) = 1$  sollen Schnittpunkte  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(\varphi(t))$  mit kollinearen Tangenten  $\alpha'(t), \tilde{\alpha}'(\varphi(t))$  ausgeschlossen sein. Für ein allgemeines Verhältnis dürfen die jeweiligen Geodätischen nicht die gleiche Spur besitzen.

Die Bedingung  $b(t) \geq 1$  stellt keine Einschränkung hinsichtlich der behandelbaren Probleme dar. In Abbildung 4.2 ist der Ast der Medialen Kurve zu  $\sigma = 1$  und  $\tilde{\sigma} = -1$  zweier Geraden in der Euklidischen Ebene zu unterschiedlichen Verhältnissen  $b(t)$  dargestellt. Der Schnittwinkel zwischen den Progenitorkurven  $\tilde{\alpha}$  und  $\alpha$  beträgt in diesem Beispiel  $2/3\pi$ . Bei der Wahl von  $b(t) = 1/2$  erhält man eine Mediale Kurve, die im rechten Winkel von  $\alpha$  ausgeht. Dies bedeutet jedoch, daß der Mediale Abstand und der korrespondierende Kurvenparameter von  $\tilde{\alpha}$  nicht als Funktion des Kurvenparameters  $t$  von  $\alpha$  ausgedrückt werden kann, da dieser für  $b(t) = 1/2$  konstant bleibt. Für  $b(t) = 2$  ergibt sich die spiegelsymmetrische Situation, in der die Mediale im rechten Winkel zu  $\tilde{\alpha}$  verläuft. Hier sind der Mediale Abstand und der geschleppte Parameter als Funktionen  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  definiert;  $\varphi(t)$  ist hier eine konstante Funktion. Man erkennt ferner, daß man die Situation für  $b(t) = 1/2$  durch Vertauschen der Progenitorobjekte, d.h. der Rollen von  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  behandeln kann. Schließlich ist es egal, ob man das Abstandsverhältnis  $1 : b(t)$  oder  $(1/b(t)) : 1$  betrachtet.

Falls  $\partial_t \tilde{\mathcal{O}} = \mathbf{0}$  gilt, die Mediale Kurve also durch einen Fokuspunkt bezüglich des zweiten Progenitorobjekts verläuft, so könnte man ebenfalls auf die Idee kommen, die Rollen von erstem und zweitem Progenitorobjekt zu vertauschen. Für den Fall, daß  $b(t) = 1$ ,  $\partial_t \mathcal{O} \neq \mathbf{0}$  und  $\partial_t \tilde{\mathcal{O}} = \mathbf{0}$  gilt, hätte man durch einen solchen Tausch erreicht, daß die fragliche Matrix regulär, und damit das Differentialgleichungssystem (4.3) weiter definiert ist. Satz 4.1.2 kann damit für den Fall  $b(t) = 1$  dahingehend verschärft werden, daß das Differentialgleichungssystem (4.3) regulär ist, mit Ausnahme des Falls  $\partial_t \mathcal{O} = \mathbf{0} = \partial_t \tilde{\mathcal{O}}$ . Die Diskussion dieser Situation vertagen wir jedoch auf Abschnitt 4.2 (vgl. Lemma 4.2.1).

Insgesamt haben wir also das System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung aus Gleichung (4.3) zur Verfügung, um den Verlauf verallgemeinerter Medialer Kurven zu verfolgen. Für den wichtigen Spezialfall  $b(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ergibt sich nach Invertieren der Matrix das System

$$\begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \left( \tilde{\sigma} \partial_s \tilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}, \partial_t \tilde{\mathcal{O}} \right)^{-1} \partial_t \mathcal{O}. \quad (4.7)$$

für Mediale Kurven. Für eine allgemeiner gewählte Verhältnisfunktion  $b(t) > 1$  erhält man

$$\begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \left( \tilde{\sigma} b(t) \partial_s \tilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}, \partial_t \tilde{\mathcal{O}} \right)^{-1} \left( \partial_t \mathcal{O} - \tilde{\sigma} b'(t) s(t) \partial_s \tilde{\mathcal{O}} \right). \quad (4.8)$$

Nach Satz 4.1.2 sind beide Gleichungssysteme definiert, solange die (verallgemeinerte) Mediale Kurve keinen Fokalpunkt des zweiten Progenitorobjekts passiert.<sup>2</sup> Bemerkenswert ist sicherlich, daß beide Differentialgleichungssysteme (4.7) und (4.8) unabhängig von den betrachteten Progenitorobjekten formuliert werden konnten. Das Problem, geeignete Anfangswerte numerisch zu bestimmen, werden wir in dem weiter unten folgenden Abschnitt 4.5 behandeln.

Schließlich sei an dieser Stelle bemerkt, daß man den Tangentenvektor der Medialen Kurve  $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{m}(t))$  mit Hilfe dieser Technik relativ einfach berechnen kann. Benutzt man die linke Seite von Gleichung (4.2) zusammen mit der Kettenregel, so erhält man nämlich

$$\boldsymbol{\mu}'(t) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \mathbf{m}'(t) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) (\sigma s'(t) \partial_s \mathcal{O}(\sigma s(t), t) + \partial_t \mathcal{O}(\sigma s(t), t)). \quad (4.9)$$

Zu beachten ist, daß die Verhältnisfunktion  $b(t)$  in dieser Formel keinen Beitrag liefert.

## 4.2 Eigenschaften Medialer Kurven mit konstantem Verhältnis

Bevor wir näher auf die numerische Behandlung der Medialen Differentialgleichung eingehen, sollen in diesem Abschnitt einige geometrische Eigenschaften der Medialen Kurven herausgearbeitet werden. Dafür schreiben wir die Mediale Differentialgleichung in der Form

$$\sigma s' \partial_s \mathcal{O} + \partial_t \mathcal{O} = \mathbf{m}' = \tilde{\sigma} (b s' + b' s) \partial_s \tilde{\mathcal{O}} + \varphi' \partial_t \tilde{\mathcal{O}}. \quad (4.10)$$

Die zugehörige Formulierung der Differentialgleichung in Termen tangentialer Vektoren der betrachteten Fläche  $S$  lautet entsprechend

$$\sigma s' \boldsymbol{\gamma}'_t + \boldsymbol{\alpha}'_s = \boldsymbol{\mu}' = \tilde{\sigma} (b s' + b' s) \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'_\varphi + \varphi' \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_s. \quad (4.11)$$

Zur besseren Übersicht wurde in beiden Gleichungen die Abhängigkeit von der Variablen  $t$  nicht explizit ausgedrückt.

Um diese beiden Gleichungen formulieren zu können, d.h. die Existenz der Funktionen  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  annehmen zu dürfen, müssen wir nach Satz 4.1.2 voraussetzen, daß  $b(t) \geq 1$  und  $\partial_t \mathcal{O} \neq \mathbf{0}$  gilt. Wir erinnern an dieser Stelle nochmal daran, daß die zweite Bedingung äquivalent zu der

<sup>2</sup>An dieser Stelle ist die Sprechweise etwas unpräzise. Exakter müßte man formulieren: „(...), solange der induzierte Mediale Punkt kein Fokalpunkt des zweiten Progenitorobjekts zum Parameter  $\varphi(t)$  ist.“ Allgemeine Schnittpunkte der Medialen Kurve mit der Fokalkurve des zweiten Progenitorobjekts, bei denen die jeweiligen Parameterwerte nicht miteinander korrespondieren, sind per se noch nicht kritisch. Dennoch werden wir auch in Zukunft die kurze, wenn auch unpräzise Sprechweise beibehalten.

Bedingung  $\tilde{\alpha}'_s(s(t)) \neq \mathbf{0}$  ist. Dies entspricht der Forderung, daß die Mediale Kurve nicht durch einen Fokalkpunkt bzgl. des zweiten Progenitorobjekts verläuft.

Die Medialen Kurven, die in diesem Abschnitt betrachtet werden, sollen ein konstantes Verhältnis  $b(t)$  besitzen. Ein beliebiges funktionales Verhältnis bietet so große Freiheiten, daß die meisten der hier betrachteten Eigenschaften i.a. nicht mehr gelten. Es sei also für diesen Abschnitt  $b(t) = \text{const} \geq 1$  vorausgesetzt. Damit ergibt sich aus Gleichung (4.10) bzw. (4.11)

$$\sigma s' \partial_s \mathbf{O} + \partial_t \mathbf{O} = \mathbf{m}' = \tilde{\sigma} b s' \partial_s \tilde{\mathbf{O}} + \varphi' \partial_t \tilde{\mathbf{O}} \quad (4.12)$$

$$\sigma s' \gamma'_t + \alpha'_s = \boldsymbol{\mu}' = \tilde{\sigma} b s' \tilde{\gamma}'_\varphi + \varphi' \tilde{\alpha}'_s. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen können wir nun den folgenden Hilfssatz zeigen.

### Lemma 4.2.1

Falls  $b(t) = \text{const} \geq 1$  gilt und die betrachtete Mediale Kurve nicht durch einen Fokalkpunkt bzgl. des zweiten Progenitorobjekts verläuft (d.h.  $\partial_t \tilde{\mathbf{O}} \neq \mathbf{0}$ ), dann sind die folgenden Aussagen gleichbedeutend:

- (a) Die Mediale Kurve hat einen singulären Punkt, d.h.  $\boldsymbol{\mu}'(t) = \mathbf{0}$ .
- (b) Die Ableitungen der Funktionen des Medialen Abstands und des korrespondierenden Parameters des zweiten Progenitorobjekts verschwinden:  $s'(t) = 0 = \varphi'(t)$ .
- (c) Die Mediale Kurve verläuft durch einen Fokalkpunkt bezüglich des ersten Progenitorobjekts, d.h. es gilt  $\alpha'_{s(t)}(t) = \mathbf{0}$ .

### Beweis:

Sei  $\boldsymbol{\mu}'(t) = \mathbf{0}$ . Für die Norm des Tangentenvektors eines solchen singulären Punktes der Medialen Kurve gilt nach Gleichung (4.13) einerseits

$$0 = \|\boldsymbol{\mu}'(t)\|^2 = (s'(t))^2 + \|\alpha'_{s(t)}(t)\|^2,$$

woraus zunächst  $s'(t) = 0$  und  $\alpha'_{s(t)}(t) = \mathbf{0}$  folgt. Andererseits erhält man aus der rechten Hälfte derselben Gleichung

$$0 = \|\boldsymbol{\mu}'(t)\|^2 = (b(t))^2 (s'(t))^2 + (\varphi'(t))^2 \|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|^2,$$

woraus man  $\varphi'(t) = 0$  folgern kann, da nach Voraussetzung  $\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t)) \neq \mathbf{0}$  gilt. Umgekehrt folgt aus  $s'(t) = 0 = \varphi'(t)$  sofort  $\boldsymbol{\mu}'(t) = \mathbf{0}$ . Dies zeigt die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b).

Aus der Annahme  $s'(t) = 0 = \varphi'(t)$  folgt ferner nach Gleichung (4.13)

$$\alpha'_{s(t)}(t) = \boldsymbol{\mu}'(t) = \mathbf{0}.$$

Nimmt man umgekehrt die Identität  $\alpha'_{s(t)}(t) = \mathbf{0}$  an, so ist dies zunächst gleichbedeutend zu der Annahme  $\partial_t \mathbf{O} = \mathbf{0}$ . Gleichung (4.12) nimmt, geschrieben als lineares Gleichungssystem, die Form

$$\left( \tilde{\sigma} b \partial_s \tilde{\mathbf{O}} - \sigma \partial_s \mathbf{O}, \partial_t \tilde{\mathbf{O}} \right) \begin{pmatrix} s'(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

an. Da nach Voraussetzung die Matrix dieses Gleichungssystems regulär ist (siehe auch Satz 4.1.2), besitzt es als einzige Lösung den trivialen Vektor. Daher muß  $s'(t) = 0 = \varphi'(t)$  gelten, was die Äquivalenz von Aussage (b) und (c) zeigt. ■

Lemma 4.2.1 liefert ein Kriterium, wann eine Mediale Kurve mit konstanten Verhältnis einen singulären Punkt besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Kurve einen Fokalkpunkt bzgl. der ersten Progenitorkurve durchläuft. Daß die Mediale Kurve einen Fokalkpunkt bzgl. der zweiten Progenitorkurve enthält, müßten wir für die Formulierung des Hilfssatzes ausschließen, da wir andernfalls die Existenz der Funktionen  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  nicht gewährleisten können. Die oben vorgeschlagene Strategie, beim Berechnen der Medialen Kurve die Rolle der ersten und zweiten Progenitorkurven immer dann zu vertauschen, wenn ein Fokalkpunkt bzgl. der zweiten Progenitorkurve auftritt, ergibt also nach Lemma 4.2.1, daß die Mediale Kurve einen singulären Punkt aufweisen wird. Der Fall, daß die Mediale Kurve einen Punkt durchläuft, der zu beiden Progenitorkurven Fokale Eigenschaft besitzt, kann mit den hier gemachten Aussagen nicht diskutiert werden.

Eine genauere Analyse des Beweises von Hilfssatz 4.2.1 zeigt, daß man eine etwas schärfere Aussage für die spezielle Mediale Kurve mit Verhältnis  $b(t) = 1$  beweisen kann. Gelten ansonsten die gleichen Voraussetzung wie in Lemma 4.2.1, so gilt  $\varphi'(t) = 0$  genau dann, wenn  $\alpha'_{s(t)}(t) = \mathbf{0}$  erfüllt ist. Denn für die Norm der Medialen Tangente gilt nach Gleichung (4.13)

$$(s'(t))^2 + \|\alpha'_{s(t)}(t)\|^2 = \|\mu'(t)\|^2 = (b(t))^2 (s'(t))^2 + (\varphi'(t))^2 \|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|^2,$$

oder gleichbedeutend

$$\|\alpha'_{s(t)}(t)\|^2 = \left( (b(t))^2 - 1 \right) (s'(t))^2 + (\varphi'(t))^2 \|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|^2. \quad (4.14)$$

Benutzt man nun  $b(t) = 1$ , so erhält man

$$\|\alpha'_{s(t)}(t)\|^2 = (\varphi'(t))^2 \|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|^2,$$

woraus sich die Behauptung ergibt, da nach Voraussetzung  $\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t)) \neq \mathbf{0}$  gelte. Unter der zusätzlichen Voraussetzung  $b(t) = 1$  ist  $\alpha'_{s(t)}(t) = \mathbf{0}$  (Aussage (c) aus Lemma 4.2.1) also äquivalent zu der (im Vergleich zu Aussage (b) etwas schwächeren) Bedingung  $\varphi'(t) = 0$ .

Diese Beobachtung ergibt sich auch als Spezialfall des folgenden Hilfssatzes, der die Bedeutung der Größe  $\varphi'(t)$  beleuchtet.

### Lemma 4.2.2

Falls  $b(t) = \text{const} \geq 1$  gilt und die betrachtete Mediale Kurve nicht durch einen Fokalkpunkt bezüglich des zweiten Progenitorobjekts verläuft, so genügt die Funktion des geschleppten Parameters des zweiten Progenitorobjekts  $\varphi(t)$  der Identität

$$\varphi'(t) = \pm \frac{\sqrt{(1 - (b(t))^2) (s'(t))^2 + \|\alpha'_{s(t)}(t)\|^2}}{\|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|}.$$

Für den Spezialfall  $b(t) = 1$  erhält man daher die Beziehung

$$\varphi'(t) = \pm \frac{\|\alpha'_{s(t)}(t)\|}{\|\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))\|}.$$

**Beweis:**

Die behauptete Formel ergibt sich sofort aus Gleichung (4.14). Zu beachten ist, daß aufgrund der Voraussetzungen des Hilfssatzes  $\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t)) \neq \mathbf{0}$  gilt. ■

Der vorangegangene Hilfssatz liefert vor allem für den Spezialfall  $b(t) = 1$  eine anschauliche Interpretation. In diesem Fall entspricht die Größe  $\varphi'(t)$  nämlich dem Verhältnis der Tangentenlängen der beteiligten Offsetkurven.

Im folgenden wollen wir nun die geometrische Bedeutung der Funktion des Medialen Abstands  $s(t)$  studieren. Wir beginnen mit der speziellen Situation, in der die beteiligten Geodätischen Tangenten in einem Medialen Punkt kollinear sind. Wie bereits oben erläutert, dürfen die Geodätischen Tangenten nicht in eine Richtung zeigen. Daher führt diese Forderung zu dem Ausdruck

$$\sigma \gamma'_t(\sigma s(t)) = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t)).$$

Da die Tangenten der Geodätischen Offsetkurven jeweils orthogonal zu den Tangenten der korrespondierenden Geodätischen sind, sind auch die Vektoren  $\alpha'_{s(t)}(t)$  und  $\tilde{\alpha}'_{s(t)}(\varphi(t))$  kollinear. Aus Gleichung (4.13) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \sigma s' \gamma'_t - \tilde{\sigma} b s' \tilde{\gamma}'_{\varphi} + \alpha'_s - \varphi' \tilde{\alpha}'_s \\ &= (1+b) s' \sigma \gamma'_t + (\pm \|\alpha'_s\| - \varphi' \|\tilde{\alpha}'_s\|) \frac{\tilde{\alpha}'_s}{\|\tilde{\alpha}'_s\|}. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Identität mit der Tangente  $\sigma \gamma'_t$ , so erhält man die Beziehung

$$(1+b) s' = 0,$$

da die Geodätische nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist, also Tangentenlänge Eins besitzt. Ferner wurde hierbei benutzt, daß  $\gamma'_t$  orthogonal zu  $\alpha'_s$  und damit auch zu  $\tilde{\alpha}'_s$  ist. Diese Gleichung kann nun offensichtlich nur für  $s'(t) = 0$  erfüllt sein. Anschaulich bedeutet dies, daß die Funktion  $s(t)$  im Fall kollinearier Geodätischer Tangenten stationär wird. Dies wird im wesentlichen im nächsten Hilfssatz zusammengefaßt.

**Lemma 4.2.3**

*Für ein konstantes Verhältnis  $b(t) = \text{const} \geq 1$  verlaufe die resultierende Mediale Kurve nicht durch einen Fokalpunkt bezüglich des zweiten Progenitorobjekts. Falls für einen Medialen Punkt  $\sigma \gamma'_t = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}$  erfüllt ist, so gilt  $s'(t) = 0$ . Gilt umgekehrt  $s'(t) = 0$  unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß es sich bei dem Medialen Punkt nicht um einen singulären Punkt der Medialen Kurve handelt (d.h.  $\mu'(t) \neq \mathbf{0}$ ), so folgt  $\sigma \gamma'_t = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}$ .*

**Beweis:**

Um den Beweis von Lemma 4.2.3 zu vollständigen, muß noch die Aussage, daß aus  $s'(t) = 0$  und  $\mu'(t) \neq \mathbf{0}$  die Kollinearität der beteiligten Geodätischen Tangenten folgt, gezeigt werden. Aus Gleichung (4.13) folgt für  $s'(t) = 0$

$$\alpha'_s = \mu'(t) = \varphi' \tilde{\alpha}'_s.$$

Da  $\mu'(t) \neq \mathbf{0}$  nach Voraussetzung gegeben ist, sind die Tangentenvektoren  $\alpha'_s$  und  $\tilde{\alpha}'_s$  kollinear. Die Geodätischen Tangenten  $\sigma \gamma'_t$  bzw.  $\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}$  sind orthogonal zu  $\alpha'_s$  bzw.  $\tilde{\alpha}'_s$ . Daher sind sie ebenfalls kollinear zueinander. Wie nun schon mehrfach benutzt, können sie nicht identisch sein, woraus die behauptete Identität  $\sigma \gamma'_t = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}$  folgt. ■

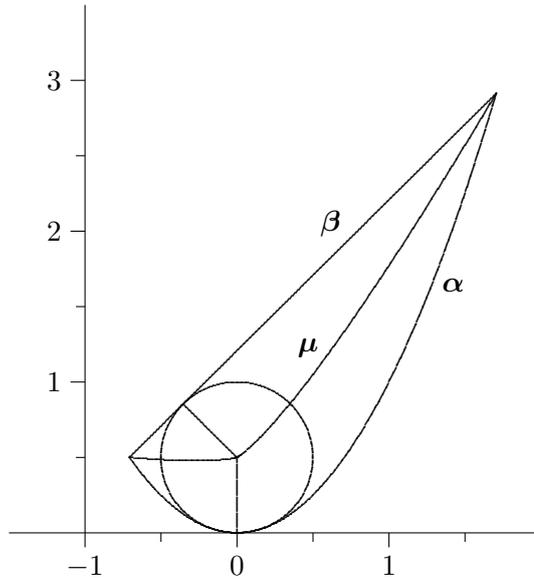


Abbildung 4.3: Nicht kollineare Normalen in singulärem Punkt der Medialen

Die Voraussetzung  $\boldsymbol{\mu}'(t) \neq \mathbf{0}$  ist für die Umkehrung der Aussage notwendig. Hierfür betrachte man das folgende Beispiel in der Euklidischen Ebene. Gegeben seien die beiden Progenitorcurven

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, t^2)^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (t-1, t+\sqrt{2}+1)^T,$$

siehe auch Abbildung 4.3. Die Offsetfunktion des ersten Progenitorobjekts, der Parabel, ist durch

$$\mathcal{O}_{\alpha}(s, t) = \left( t - \frac{2st}{\sqrt{1+4t^2}}, t^2 + \frac{s}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^T$$

gegeben, wobei bereits linksseitiges Offsetting berücksichtigt wurde. Die Offsetfunktion der Geraden lautet

$$\mathcal{O}_{\beta}(s, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (t+2s-1, t-2s+\sqrt{2}+1)^T.$$

Der Punkt  $\mathbf{p} = (0, 1/2)^T$  ist bekanntlich Zentrum des Krümmungskreises von  $\boldsymbol{\alpha}(0)$ , dem Scheitel der Parabel, und somit ein Fokuspunkt des ersten Progenitorobjekts. Das Beispiel ist nun so konstruiert, daß die Normale ausgehend vom Kurvenpunkt  $\boldsymbol{\beta}(0) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})^T$  im Abstand  $s = 1/2$  den Fokuspunkt  $\mathbf{p}$  erreicht. Damit gilt also

$$\mathcal{O}_{\alpha}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T = \mathcal{O}_{\beta}\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

der Fokuspunkt  $\mathbf{p}$  von  $\boldsymbol{\alpha}$  gehört damit zur Medialen Kurve. Nach Lemma 4.2.1 ist dieser Punkt eine singuläre Stelle der Medialen Kurve, d.h. es gilt  $\boldsymbol{\mu}'(0) = \mathbf{0}$ , woraus ebenfalls  $s'(0) = 0$  folgt. Die zugehörigen Normalen  $(0, 1)^T$  in  $\boldsymbol{\alpha}(0)$  und  $\frac{1}{2}(1, -1)^T$  von  $\boldsymbol{\beta}$  sind jedoch nicht kollinear. In diesem Beispiel lassen sich  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  übrigens explizit bestimmen. Es gilt

$$s(t) = \frac{\left(-t^2 + t + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\right)\sqrt{1+4t^2}}{2t + \sqrt{2} + 8t^2 + 1},$$

$$\varphi(t) = 1 + 2\sqrt{2}t - \frac{\left(4\sqrt{2}t + 2\sqrt{1+4t^2}\right)\left(-t^2 + t + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\right)}{2t + \sqrt{2} + 8t^2 + 1}.$$

Für folgenden Überlegungen fordern wir, daß die Mediale Kurve regulär ist. Unter welchen Bedingungen die Mediale Kurve einen singulären Punkt besitzt, wurde bereits in Lemma 4.2.1 ausführlich diskutiert. Sei also  $\boldsymbol{\mu}'(t) \neq \mathbf{0}$  erfüllt. Dann kann man  $\phi(t)$  bzw.  $\tilde{\phi}(t)$  als den Zwischenwinkel der Tangente der Medialen Kurve  $\boldsymbol{\mu}'(t)$  und der Geodätischen Tangente  $\sigma \boldsymbol{\gamma}'_t$  bzw.  $\tilde{\sigma} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'_{\varphi}$  definieren. Es sei also

$$\phi(t) := \angle(\boldsymbol{\mu}'(t), \sigma \boldsymbol{\gamma}'_t(\sigma s(t))), \quad (4.15)$$

$$\tilde{\phi}(t) := \angle(\boldsymbol{\mu}'(t), \tilde{\sigma} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t))). \quad (4.16)$$

Da die Geodätischen nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sind, gilt

$$\begin{aligned} \cos \phi(t) &= \left\langle \frac{\boldsymbol{\mu}'(t)}{\|\boldsymbol{\mu}'(t)\|}, \sigma \boldsymbol{\gamma}'_t(\sigma s(t)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\mu}'(t)\|} \langle \sigma s' \boldsymbol{\gamma}'_t + \boldsymbol{\alpha}'_s, \sigma \boldsymbol{\gamma}'_t \rangle = \frac{s'}{\|\boldsymbol{\mu}'(t)\|}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde erneut die Tatsache benutzt, daß die Tangentenvektoren  $\boldsymbol{\alpha}'_s$  und  $\boldsymbol{\gamma}'_t$  orthogonal zueinander sind. Analog erhält man für  $\tilde{\phi}(t)$  bei konstantem Verhältnis  $b(t) = \text{const} \geq 1$  die Beziehung

$$\cos \tilde{\phi}(t) = \frac{b s'}{\|\boldsymbol{\mu}'(t)\|}.$$

Durch Kombinieren beider Gleichungen ergibt sich der folgende Hilfssatz.

#### Lemma 4.2.4

Für ein konstantes Verhältnis  $b(t) = \text{const} \geq 1$  verlaufe die resultierende Mediale Kurve weder durch einen Fokelpunkt des ersten noch des zweiten Progenitorobjekts. Dann gilt für die Funktion des Medialen Abstands

$$\|\boldsymbol{\mu}'(t)\| \cos \phi(t) = s'(t) = \frac{\|\boldsymbol{\mu}'(t)\|}{b} \cos \tilde{\phi}(t).$$

wobei die Winkelfunktionen  $\phi(t)$  und  $\tilde{\phi}(t)$  gemäß (4.15) bzw. (4.16) definiert sind.

Nach Lemma 4.2.1 impliziert die Voraussetzung, daß die Mediale Kurve keinen Fokelpunkt bzgl. beider Kurven durchläuft, bereits  $\boldsymbol{\mu}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Dies zeigt die Richtigkeit der Formulierung des vorangegangenen Hilfssatzes. Zum Abschluß dieses Abschnitts betrachten wir Lemma 4.2.4 im Spezialfall von Medialen Kurven im Verhältnis  $b(t) = 1$ .

#### Korollar 4.2.5

Für den Spezialfall  $b(t) = 1$  verläuft die Tangente  $\boldsymbol{\mu}'(t)$  der resultierenden Medialen Kurve in Richtung einer der beiden Winkelhalbierenden zwischen den Tangenten  $\sigma \boldsymbol{\gamma}'_t(\sigma s(t))$  und  $\tilde{\sigma} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t))$  der beteiligten Geodätischen Kurven.

#### Beweis:

Aus Hilfssatz 4.2.4 folgt für  $b(t) = 1$  die Identität

$$\|\boldsymbol{\mu}'(t)\| \cos \phi(t) = s'(t) = \|\boldsymbol{\mu}'(t)\| \cos \tilde{\phi}(t).$$

Daher gilt insbesondere  $\cos \phi(t) = \cos \tilde{\phi}(t)$ . Betrachtet man die Hauptwerte der Winkel im Intervall  $[-\pi, \pi]$ , so folgt daraus zunächst  $\phi(t) = \pm \tilde{\phi}(t)$ . Da nun nach Voraussetzung die Vorzeichen  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  so gewählt wurden, daß die Tangenten  $\sigma \boldsymbol{\gamma}'_t(\sigma s(t))$  und  $\tilde{\sigma} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}'_{\varphi(t)}(\tilde{\sigma} s(t))$  in unterschiedliche Richtungen zeigen, muß  $\phi = -\tilde{\phi}$  gelten. Dies zeigt die behauptete Winkelhalbierendeigenschaft von  $\boldsymbol{\mu}'(t)$  für den Fall  $b(t) = 1$ . ■

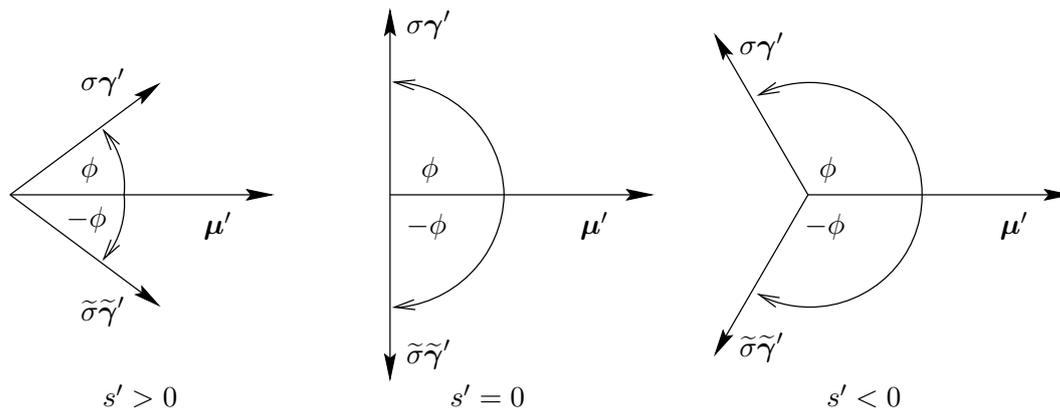


Abbildung 4.4: Wachstumverhalten des Medialen Abstands für  $b(t) = 1$

Neben der Eigenschaft, die Tangente der Medialen Kurve als Winkelhalbierende zu besitzen, kann man für  $b(t) = 1$  an der Lage der Tangenten der beteiligten Geodätischen ebenfalls das Wachstumsverhalten der Funktion des Medialen Abstands  $s'(t)$  ablesen. Dies wurde in Abbildung 4.4 schematisch dargestellt. Das Vorzeichen der Ableitung von  $s(t)$  hängt nach Korollar 4.2.5 allein von dem Winkel  $\phi$  zwischen der Medialen Tangente  $\mu'(t)$  und der Geodätischen Tangente  $\sigma\gamma'_t(s(t))$  ab. In Abbildung 4.4 sind die drei möglichen Fälle aufgeführt. Die dargestellten Vektoren sind alle Element der Tangentialebene  $T_{\mu(t)}(S)$ . Die Abstandsfunktion ist genau dann wachsend ( $s'(t) > 0$ ), wenn die Mediale und die Geodätische Tangente einen spitzen Winkel ( $0 < |\phi| < \pi/2$ ) bilden. Ist der betrachtete Winkel stumpf ( $\pi/2 < |\phi| < \pi$ ), so ist der Mediale Abstand im Abnehmen begriffen ( $s'(t) < 0$ ). Der Fall kollinearere Geodätischer Tangenten ( $|\phi| = \pi/2$ ) stellt hierbei in gewisser Hinsicht die interessanteste Situation dar. Falls kein singulärer Punkt der Medialen Kurve vorliegt, d.h. falls  $\mu'(t) \neq \mathbf{0}$  gilt, so ist das Auftreten kollinearere Geodätischer Tangenten in dem wichtigen Spezialfall äquivalent dazu, daß der Mediale Abstand  $s(t)$  stationär ist. Diese Aussage war bereits Inhalt von Hilfssatz 4.2.3.

Allerdings kann man den beiden Geodätischen Tangenten  $\sigma\gamma'_t(s(t))$  und  $\tilde{\sigma}\tilde{\gamma}'_{\varphi(t)}(s(t))$  alleine nicht ansehen, in welcher Richtung die induzierte Mediale Tangente verläuft. Nach Folgerung 4.2.5 kommen (falls  $b(t) = 1$  und  $\mu'(t) \neq \mathbf{0}$  gilt), nur die winkelhalbierenden Richtungen in Frage. Zur Entscheidung, welche der beiden möglichen Richtungen die richtige ist, benötigt man noch die Richtungen der zugehörigen Tangenten der beteiligten Offsetkurven. Dies wird in Abbildung 4.5 verdeutlicht. Dort wird die Euklidische Situation zu zwei Progenitor Kurven  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Teilabbildungen besteht in der Durchlaufrichtung der ersten Progenitor Kurve. Damit ändert sich das Vorzeichen der Ableitung  $\varphi'(t)$  der Funktion des geschleppten Parameters, also auch die Durchlaufrichtung des zweiten Progenitorobjekts sowie die Vorzeichen  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$ . Die beteiligten Geodätischen Tangenten sind in beiden Fällen jedoch identisch, während sich die Richtung der Medialen Kurve umdreht.

### 4.3 Bogenlängenparametrisierte Mediale Kurven

Sehr oft ist es von Nutzen, wenn der Parameter  $t$  einer Kurve der Bogenlänge der Kurve entspricht. Daher wollen wir in diesem Abschnitt eine Möglichkeit aufzeigen, wie man verallgemeinerte Mediale Kurven  $\mu(\tau) = r(m(\tau))$  berechnen kann, die bereits nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sind. Den Bogenlängenparameter wollen wir mit  $\tau$  bezeichnen, die zugehörige Parameterraumkurve einer Medialen  $\mu$  sei durch  $m$  beschrieben. Eine Umparametrisierung nach

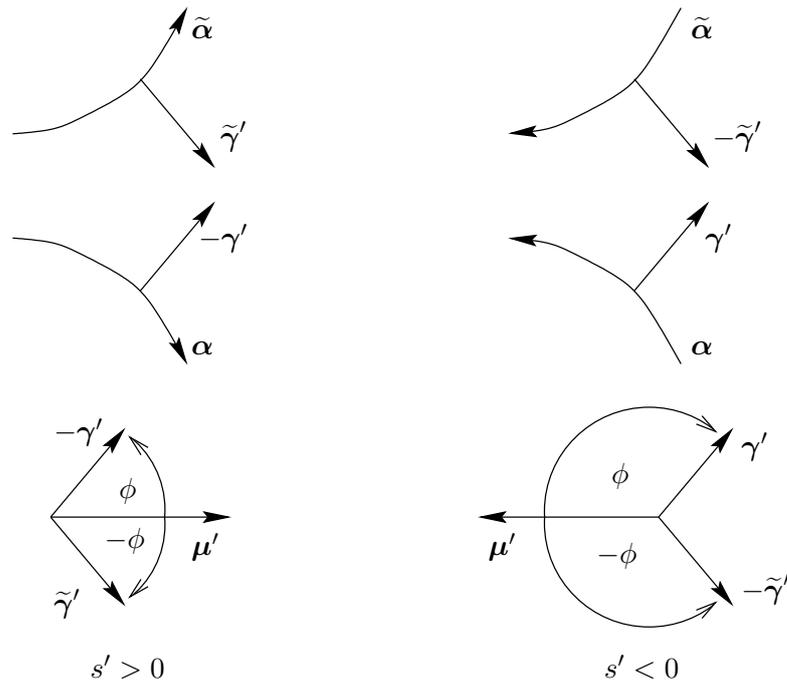


Abbildung 4.5: Winkelhalbierende Eigenschaft der Medialen Tangente und Durchlaufrichtung

Bogenlänge kann bekanntlich genau dann vorgenommen werden, wenn die betrachtete Kurve keinen singulären Punkt besitzt. Im Fall einer verallgemeinerten Medialen Kurve müssen wir für diesen Abschnitt also annehmen, daß  $\boldsymbol{\mu}'(t) \neq \mathbf{0}$  für alle Parameter  $t$  erfüllt ist. Nach Hilfssatz 4.2.1 ist dies gleichbedeutend zu der Forderung, daß die Mediale Kurve durch keinen Fokelpunkt bezüglich beider Progenitorobjekte verläuft.

Durch die Absicht, den Bogenlängenparameter  $\tau$  der Medialen Kurve einzuführen, ergibt sich die Notwendigkeit, den Parameter des ersten Progenitorobjekts ebenfalls als geschleppten Parameter anzusehen. Daher führen wir die neue Funktion  $\bar{\psi}(\tau)$  ein, die den Parameter des ersten Objekts in Abhängigkeit des Bogenlängenparameters  $\tau$  von  $\boldsymbol{\mu}$  liefert. Entsprechend bezeichnen die Funktionen  $\bar{s}(\tau)$  und  $\bar{\varphi}(\tau)$  den Medialen Abstand bzw. den geschleppten Parameter bezüglich des zweiten Progenitorobjekts in Abhängigkeit des Bogenlängenparameters  $\tau$ . Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion gelten für die Ableitungen dieser neuen Funktionen die Beziehungen

$$\bar{s}'(\tau_0) = \frac{s'(t_0)}{\|\boldsymbol{\mu}'(t_0)\|}, \quad \bar{\varphi}'(\tau_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\boldsymbol{\mu}'(t_0)\|}, \quad \text{und} \quad \bar{\psi}'(\tau_0) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\mu}'(t_0)\|},$$

wobei  $\tau_0 = \tau(t_0)$  der Bogenlänge von  $\boldsymbol{\mu}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  entspricht und  $s(t)$ ,  $\varphi(t)$  der Mediale Abstand bzw. der geschleppte Parameter bezüglich des zweiten Progenitorobjekts zum Parameter  $t$  des ersten Objekts ist. Die Bedingung der Bogenlängenparametrisierung von  $\boldsymbol{\mu}$  ergibt nun das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{O}(\sigma \bar{s}(\tau), \bar{\psi}(\tau)) &= \mathbf{m}(\tau) = \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(\tau) \bar{s}(\tau), \bar{\varphi}(\tau)) \\ \|\boldsymbol{\mu}'(\tau)\| &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

welches die Bedingungen (4.2) ersetzt. Durch Differenzieren der ersten Gleichung von (4.17) erhalten wir zunächst

$$(\tilde{\sigma} b \partial_s \tilde{\mathcal{O}} - \sigma \partial_s \mathcal{O}) \bar{s}' + \partial_t \tilde{\mathcal{O}} \bar{\varphi}' - \partial_t \mathcal{O} \bar{\psi}' = -\tilde{\sigma} b' \partial_s \tilde{\mathcal{O}} \bar{s}.$$

Benutzt man die Tatsache, daß die Tangentenvektoren der Geodätischen Kurve  $\gamma_{\bar{\psi}(\tau)}$  und der Geodätischen Offsetkurve  $\alpha_{\bar{s}(\tau)}$  orthogonal zueinander sind, so impliziert die zweite Gleichung ferner

$$\begin{aligned} 1 = \|\boldsymbol{\mu}'(\tau)\|^2 &= \left\| \sigma(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_s \mathbf{O} \bar{s}' + (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \partial_t \mathbf{O} \bar{\psi}' \right\|^2 \\ &= \left\| \sigma \gamma'_{\bar{\psi}(\tau)} \bar{s}' + \alpha'_{\bar{s}(\tau)} \bar{\psi}' \right\|^2 \\ &= \left\| \gamma'_{\bar{\psi}(\tau)} \right\|^2 (\bar{s}')^2 + \left\| \alpha'_{\bar{s}(\tau)} \right\|^2 (\bar{\psi}')^2 \\ &= (\bar{s}')^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) (\bar{\psi}')^2, \end{aligned}$$

wobei

$$I(\partial_t \mathbf{O}) = E(\partial_t \mathbf{O}_1)^2 + 2F \partial_t \mathbf{O}_1 \partial_t \mathbf{O}_2 + G(\partial_t \mathbf{O}_2)^2$$

der ersten Fundamentalform von  $S$  und  $E, F, G$  ihren Koeffizienten entspricht. Die Indizes  $i = 1, 2$  an  $\partial_t \mathbf{O}$  kennzeichnen die  $i$ -te Komponente dieses zweidimensionalen Vektors. Insgesamt erhält man also aus Gleichung (4.17) das System

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\sigma} b \partial_s \tilde{\mathbf{O}} - \sigma \partial_s \mathbf{O}) \bar{s}' + \partial_t \tilde{\mathbf{O}} \bar{\varphi}' - \partial_t \mathbf{O} \bar{\psi}' &= -\tilde{\sigma} b' \partial_s \tilde{\mathbf{O}} \bar{s} \\ (\bar{s}')^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) (\bar{\psi}')^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Offensichtlich hat dieses System keine eindeutig bestimmte Lösung, falls  $\partial_t \mathbf{O} = \mathbf{0}$  oder  $\partial_t \tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{0}$  gilt. Beide Fälle werden jedoch durch die zu Beginn des Abschnitts getroffene Vereinbarung, daß jeder betrachtete Mediale Punkt weder Fokalfunkt bezüglich  $\alpha$  noch  $\tilde{\alpha}$  ist, ausgeschlossen.

Wir führen zunächst die folgenden Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} D_1 &:= \det(\partial_t \tilde{\mathbf{O}}, \partial_t \mathbf{O}), & D_4 &:= -\det(\tilde{\sigma} b' \partial_s \tilde{\mathbf{O}}, \sigma \partial_s \mathbf{O}), \\ D_2 &:= \det\left(\left(\tilde{\sigma} b \partial_s \tilde{\mathbf{O}} - \sigma \partial_s \mathbf{O}\right), \partial_t \mathbf{O}\right), & D_5 &:= -\det(\tilde{\sigma} b' \partial_s \tilde{\mathbf{O}}, \partial_t \tilde{\mathbf{O}}), \\ D_3 &:= \det\left(\left(\tilde{\sigma} b \partial_s \tilde{\mathbf{O}} - \sigma \partial_s \mathbf{O}\right), \partial_t \tilde{\mathbf{O}}\right), & D_6 &:= -\det(\tilde{\sigma} b' \partial_s \tilde{\mathbf{O}}, \partial_t \mathbf{O}). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\partial_t \mathbf{O} \neq \mathbf{0} \neq \partial_t \tilde{\mathbf{O}}$  gilt, garantiert Satz 4.1.2  $D_2 \neq 0 \neq D_3$ , vorausgesetzt die Verhältnisfunktion  $b(t)$  wurde so gewählt, daß  $b(t) \geq 1$  erfüllt ist. Für eine konstant gewählte Verhältnisfunktion  $b(t) = \text{const}$  gilt ferner  $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ . Aus der ersten Gleichung von (4.18) ergibt sich mit Hilfe dieser Abkürzungen

$$\begin{aligned} D_2 \bar{s}' + D_1 \bar{\varphi}' &= D_6 \bar{s}, \\ D_3 \bar{s}' + D_1 \bar{\psi}' &= D_5 \bar{s}, \end{aligned}$$

so daß man die Beziehung  $\bar{s}' = (D_5 \bar{s} - D_1 \bar{\psi}')/D_3$  erhält, die man in die quadratische Gleichung aus (4.18) einsetzen kann. Auf diese Art erhält man einen Ausdruck für  $\bar{\psi}'$ , der anschließend dazu benutzt werden kann, um durch Rückwärtseinsetzen analoge differentiale Beziehungen für  $\bar{s}'$  und  $\bar{\varphi}'$  zu berechnen. Als Ergebnis ergibt sich das durch (4.18) implizierte System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\bar{s}' = \frac{I(\partial_t \mathbf{O}) D_3 D_5 \bar{s} \mp D_1 \sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) (D_3^2 - D_5^2 \bar{s}^2)}}{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) D_3^2}, \quad (4.19a)$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{(D_1 D_6 + I(\partial_t \mathbf{O}) D_3 D_4) \bar{s} \pm D_2 \sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) (D_3^2 - D_5^2 \bar{s}^2)}}{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) D_3^2}, \quad (4.19b)$$

$$\bar{\psi}' = \frac{D_1 D_5 \bar{s} \pm D_3 \sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) (D_3^2 - D_5^2 \bar{s}^2)}}{D_1^2 + I(\partial_t \mathbf{O}) D_3^2}, \quad (4.19c)$$

wobei außerdem die Identität  $D_3D_6 - D_2D_5 = D_1D_4$  zur weiteren Vereinfachung benutzt wurde. Da nach Voraussetzung  $\partial_t \mathcal{O} \neq \mathbf{0} \neq \partial_t \bar{\mathcal{O}}$  gilt, garantiert Satz 4.1.2  $D_3 \neq 0$ , vorausgesetzt die Verhältnissfunktion  $b(t)$  wurde so gewählt, daß  $b(t) \geq 1$  erfüllt ist. Daher sind die Nenner in (4.19a) – (4.19c) strikt positiv.

Das Auftreten eines quadratischen Ausdrucks in Gleichungssystem (4.18) ist der algebraische Grund dafür, daß das Differentialgleichungssystem (4.19) zwei Lösungen mit unterschiedlichen Vorzeichen der Diskriminante anbietet. Die Vorzeichenwahl muß im übrigen konsistent bezüglich aller drei Gleichungen erfolgen. Wählt man etwa das negative Vorzeichen in der Beziehung für  $\bar{s}'$ , so muß in den Gleichungen für  $\bar{\varphi}'$  und  $\bar{\psi}'$  entsprechend ein positives Vorzeichen benutzt werden. Da die Forderung nach einer Bogenlängenparametrisierung nicht die Durchlaufrichtung der Kurve determiniert, deckt sich die Existenz zweier Varianten auch mit der geometrischen Vorstellung. Tatsächlich kann man zeigen, daß sich beide Versionen des Differentialgleichungssystem (4.19) nur durch die Umkehrung des induzierten Durchlaufsinns von  $\boldsymbol{\mu}(\tau)$  unterscheiden.

Ausgehend von (4.19) betrachten wir noch den wichtigen Spezialfall einer konstanten Verhältnissfunktion  $b(t) = \text{const}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Hier gilt  $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ . Damit ergeben sich die entsprechend vereinfachten Formeln

$$\bar{s}' = \mp \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathcal{O}) D_3^2}} \quad (4.20a)$$

$$\bar{\varphi}' = \pm \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathcal{O}) D_3^2}} \quad (4.20b)$$

$$\bar{\psi}' = \pm \frac{D_3}{\sqrt{D_1^2 + I(\partial_t \mathcal{O}) D_3^2}} \quad (4.20c)$$

Zum Abschluß sei erwähnt, daß man mit der gleichen Vorgehensweise wie in diesem Abschnitt erreichen kann, daß der Parameter  $\tau$  der Bogenlänge der Parameterraumkurve  $\mathbf{m}$  von  $\boldsymbol{\mu}$  entspricht. Weitere Details zu diesem Thema findet man in [KWR97a] und [KWR97b].

## 4.4 Geodätische Krümmung Medialer Kurven

Im vorangegangenen Abschnitt wurden einige Eigenschaften Medialer Kurven betrachtet. Dabei handelte es sich ausschließlich um Größen erster Ordnung, d.h. um Eigenschaften, die sich mit Hilfe der ersten Ableitungen der beteiligten Kurven berechnen lassen. In diesem Abschnitt soll nun die Geodätische Krümmung der Medialen Kurve studiert werden, eine Größe zweiter Ordnung, für deren Berechnung man üblicherweise die zweite Ableitung der Medialen Kurve benötigt.

Nach den Beobachtungen des letzten Abschnitts könnte man vermuten, die Geodätische Krümmung könnte direkt aus dem Verhalten der Jacobifelder der beiden Progenitorkurven abgeleitet werden. Um diese Vermutung ggf. zu erhärten, betrachten wir das folgende Beispiel in der Euklidischen Ebene. Gegeben seien die Kurven

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(t) &:= \left( t, 1 + ct^2 \right)^T & t \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\beta}(t) &:= \left( t, 0 \right)^T & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei  $c > 0$  eine beliebige Konstante sei. Für  $c = 1$  entspricht die erste Progenitorkurve einer Parabel mit Scheitelpunkt  $(0, 1)^T$ . Die zweite Progenitorkurve parametrisiert die  $x$ -Achse nach

ihrer Bogenlänge. Betrachtet werde die Mediale Kurve im Verhältnis  $b(t) = 1$  zwischen diesen beiden Kurven. Die zugehörigen Offsetfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\alpha(s, t) &= \left( t + \frac{2cst}{\sqrt{A}}, 1 + ct^2 - \frac{s}{\sqrt{A}} \right)^T \\ \mathcal{O}_\beta(s, t) &= (t, s)^T.\end{aligned}$$

Der Term  $A := A(t)$  entspricht dabei dem Quadrat der Norm des Tangentenvektors von  $\alpha$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4c^2 t^2} =: \sqrt{A}.$$

Zu beachten ist hierbei, daß die Funktion  $\mathcal{O}_\beta$  bereits ein Offsetting nach links beschreibt. Dies entspricht einem Wert  $\tilde{\sigma} = -1$ , der aber in diesem Beispiel nicht explizit auftaucht. Zur Darstellung der Medialen Kurve hat man die Gleichung  $\mathcal{O}_\alpha(s(t), t) = \mathcal{O}_\beta(s(t), \varphi(t))$  zu lösen. Diese Identität ist gleichbedeutend zu dem Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned}t + \frac{2cst}{\sqrt{A}} &= \varphi \\ 1 + ct^2 - \frac{s}{\sqrt{A}} &= s\end{aligned} \right\}$$

in dem die Abhängigkeit der Funktionen  $s$  und  $\varphi$  von dem Parameter  $t$  zur besseren Übersicht vernachlässigt wurde. Dieses Gleichungssystem kann durch elementare Umformungen aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned}s(t) &= \frac{\sqrt{A}}{1 + \sqrt{A}} (1 + ct^2) \\ \varphi(t) &= t + \frac{2ct(1 + ct^2)}{1 + \sqrt{A}}\end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Damit erhält man die Darstellung der Medialen Kurve in der Form

$$\mu(t) = \mathcal{O}_\beta(s(t), \varphi(t)) = (\varphi(t), s(t))^T.$$

Zur Berechnung der Krümmung dieser Kurve benötigt man ihre ersten beiden Ableitungen. Für die ersten Ableitungen der Funktionen  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  gilt

$$\begin{aligned}s'(t) &= \frac{2ct\sqrt{A}}{1 + \sqrt{A}} + \frac{4c^2 t(1 + ct^2)}{\sqrt{A}(1 + \sqrt{A})^2} \\ \varphi'(t) &= 1 + \frac{2c + 6c^2 t^2}{1 + \sqrt{A}} - \frac{8c^3 t^2 + 8c^4 t^4}{\sqrt{A}(1 + \sqrt{A})^2},\end{aligned}$$

sowie für ihre zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}s''(t) &= \frac{2c\sqrt{A}}{1 + \sqrt{A}} + \frac{4c^2 + 20c^3 t^2}{\sqrt{A}(1 + \sqrt{A})^2} - \frac{16c^4 t^2(1 + ct^2)(1 + 3\sqrt{A})}{A^{3/2}(1 + \sqrt{A})^3} \\ \varphi''(t) &= \frac{12c^2 t}{1 + \sqrt{A}} - \frac{24c^3 t + 56c^4 t^3}{\sqrt{A}(1 + \sqrt{A})^2} + \frac{(32c^5 t^3 + 32c^6 t^5)(1 + 3\sqrt{A})}{A^{3/2}(1 + \sqrt{A})^3}.\end{aligned}$$

Für den Parameterwert  $t = 0$  gilt zunächst  $A(0) = 1$ , woraus  $s(0) = \frac{1}{2}$  und  $\varphi(0) = 0$  folgt. Ferner erhält man für die ersten Ableitungen die Werte  $s'(0) = 0$  und  $\varphi'(0) = 1 + c$ . Die Tangente der Medialen Kurve in der betrachteten Parametrisierung hat demnach die Form

$$\boldsymbol{\mu}'(0) = (1 + c, 0)^T.$$

Da ferner  $s''(0) = c(1 + c)$  und  $\varphi''(0) = 0$  gilt, folgt für die zweite Ableitung der Medialen Kurve

$$\boldsymbol{\mu}''(0) = (0, c(1 + c))^T.$$

Die Krümmung der Medialen Kurve  $\boldsymbol{\mu}$  berechnet man mit Hilfe der Formel

$$\kappa_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\det(\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')}{\|\boldsymbol{\mu}'\|^3}.$$

Sie entspricht im Fall von Kurven in der Ebene der Geodätischen Krümmung. Es ergibt sich in diesem Beispiel

$$\kappa_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{c(1 + c)^2}{(1 + c)^3} = \frac{c}{1 + c}.$$

Dieser Krümmungswert soll mit den Geodätischen Krümmungen  $\kappa_{\alpha_{s(t)}}$  bzw.  $\kappa_{\beta_{s(t)}}$  der beiden beteiligten Offsetkurven  $\boldsymbol{\alpha}_{s(t)}$  bzw.  $\boldsymbol{\beta}_{s(t)}$  verglichen werden. Offenbar gilt  $\kappa_{\beta_{s(t)}} = 0$  für alle  $t$ . Zur Berechnung von  $\kappa_{\alpha_{s(t)}}$  benötigen wir die partiellen Ableitungen  $\partial_t \boldsymbol{\mathcal{O}}_{\alpha}$  und  $\partial_{tt} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{\alpha}$  der ersten Offsetfunktion, da sie im Beispiel der Euklidischen Ebene den Ableitungen  $\boldsymbol{\alpha}'_s$  bzw.  $\boldsymbol{\alpha}''_s$  entsprechen. Sie sind durch

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{\mathcal{O}}_{\alpha} &= \left(1 + \frac{2cs}{A^{3/2}}\right) (1, 2ct)^T, \\ \partial_{tt} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{\alpha} &= \frac{2c}{A^{5/2}} \left(-12c^2 st, A^{5/2} + 2cs - 16c^3 st^2\right)^T \end{aligned}$$

gegeben. Folglich erhält man für die Geodätische Krümmung der Offsetkurve im Abstand  $s$  den Wert

$$\kappa_{\alpha_s} = \frac{2c}{A^{3/2} + 2cs}.$$

Setzt man nun den Medialen Abstand  $s(t)$  gemäß Gleichung (4.21) in diese Beziehung ein, so gilt für die Geodätische Krümmung längs der Medialen Kurve

$$\kappa_{\alpha_{s(t)}} = \frac{2c(1 + \sqrt{A})}{\sqrt{A}(A^{3/2} + 1 + 2c + 6c^2 t^2)}.$$

Für den Parameterwert  $t = 0$  ergibt sich daher eine Krümmung von

$$\kappa_{\alpha_{s(0)}} = \frac{2c}{1 + c}.$$

Für diesen speziellen Parameterwert gilt also  $\kappa_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2}(\kappa_{\alpha_{s(0)}} + \kappa_{\beta_{s(0)}})$ . Für beliebige Parameter ergibt sich die Geodätische Krümmung der Medialen Kurve jedoch *nicht* als das Mittel der Krümmungen der beteiligten Offsetkurven. Um dies einzusehen, berechne man die Geodätische Krümmung der Medialen Kurve explizit. Man erhält die Identität

$$\kappa_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{c(1 + \sqrt{A})}{\sqrt{2}\sqrt{A}} \frac{v + w\sqrt{A}}{(x + y\sqrt{A})^{3/2}},$$

wobei die Terme  $v, w, x, y$  durch

$$\begin{aligned} v &:= (1+c)^2 + 4c^2 (4+5c+c^2) t^2 + 7c^4 (13+8c) t^4 + 4c^6 (53+8c) t^6 + 160c^8 t^8, \\ w &:= (1+c)^2 + 2c^2 (7+8c+c^2) t^2 + c^4 (65+28c) t^4 + 106c^6 t^6 + 32c^8 t^8, \\ x &:= (1+c)^2 + c^2 (15+18c+4c^2) t^2 + c^4 (77+40c) t^4 + 148c^6 t^6 + 64c^8 t^8, \\ y &:= (1+c)^2 + c^2 (13+14c) t^2 + c^4 (53+16c) t^4 + 64c^6 t^6 \end{aligned}$$

gegeben sind. Man sieht zweierlei: Erstens tendieren die Ausdrücke offenbar selbst bei einfachen Beispielen bereits dazu, unübersichtlich zu werden, so daß man sie in der Regel nicht mehr explizit berechnen kann. Numerische Methoden, wie sie im Rahmen dieser Arbeit entwickelt werden, sind daher unverzichtbar bei der Behandlung Medialer Kurven und ihrer Geodätischen Krümmung. Andererseits ist der Zusammenhang zwischen der Geodätischen Krümmung der Medialen Kurve und der beteiligten Offsetkurven nach dem eben betrachteten Beispiel keineswegs linear.

Um zu einer numerischen Methode zu gelangen, die es uns ermöglicht, die zweite Ableitung von  $\boldsymbol{\mu}$  und damit die Geodätische Krümmung der Medialen Kurve zu berechnen, betrachten wir — ausgehend von der Flächenparametrisierung  $\boldsymbol{r}$  — die durch die Offsetfunktionen induzierten Parametrisierungen

$$\boldsymbol{r}^\alpha(s, t) = \boldsymbol{r}(\mathcal{O}_\alpha(s, t)) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{r}^\beta(s, t) = \boldsymbol{r}(\mathcal{O}_\beta(s, t))$$

der gegebenen Fläche  $S$  in einer Umgebung der Progenitorcurve  $\boldsymbol{\alpha}$  bzw.  $\boldsymbol{\beta}$ . Offenbar handelt es sich bei beiden Funktionen um reguläre Parametrisierungen der Fläche  $S$ , solange der Geodätische Abstand  $s$  so klein gewählt ist, daß kein Fokuspunkt bzgl.  $\boldsymbol{\alpha}$  bzw.  $\boldsymbol{\beta}$  erreicht wird. Da wir in diesem Abschnitt an der Geodätischen Krümmung der Medialen Kurve interessiert sind, ist diese Voraussetzung nach den Ergebnissen der letzten Abschnitte (insbesondere Satz 4.1.2 und Lemma 4.2.1) eine natürliche Forderung, da die Geodätische Krümmung in einem singulären Punkt einer Kurve nicht erklärt ist. Die folgenden Überlegungen werden stellvertretend für die Situation zweier Progenitorkurven angestellt. Sie lassen sich wörtlich auf die anderen drei möglichen Situationen übertragen. Liegt nämlich ein Progenitorpunkt  $\boldsymbol{p}$  vor, so kann man für ein hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon > 0$  anstelle von  $\boldsymbol{p}$  die Offsetkurve im Geodätischen Abstand  $s = \varepsilon$  von  $\boldsymbol{p}$  betrachten. Dies ist eine reguläre Kurve, so daß die im folgenden präsentierten Argumente auch für Progenitorpunkte standhalten.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß die Größen  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha, \partial_{ss} \mathcal{O}_\alpha$  durch Lösen der Geodätischen Differentialgleichung,  $\partial_t \mathcal{O}_\alpha, \partial_{st} \mathcal{O}_\alpha$  mit Hilfe der Jacobi Gleichung und  $\partial_{tt} \mathcal{O}_\alpha$  durch Behandlung der gestörten Jacobi Differentialgleichung berechnet werden können (siehe auch Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3). Bei der numerischen Behandlung der gestörten Jacobi Gleichung wird, wie in Abschnitt 3.6 beschrieben, das zugehörige System erster Ordnung bestehend aus acht Gleichungen gelöst, das es uns ermöglicht alle aufgeführten Größen zu bestimmen. Ferner können alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Geodätischen Koordinaten  $\boldsymbol{r}^\alpha$  bestimmt werden.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun der Berechnung der Geodätischen Krümmung der Medialen Kurve zu. Zu der Berechnung des Krümmungsvektors  $\boldsymbol{k}_\mu$  von  $\boldsymbol{\mu}$  mit Hilfe der Formel

$$\boldsymbol{k}_\mu = \frac{1}{\|\boldsymbol{\mu}'\|^2} \boldsymbol{\mu}'' - \frac{\langle \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'' \rangle}{\|\boldsymbol{\mu}'\|^4} \boldsymbol{\mu}'$$

(vgl. Gleichung (2.1) auf Seite 22) benötigt man die zweite Ableitung der Medialen Kurve. Bezüglich der Parametrisierung  $\boldsymbol{r}^\alpha$  besitzt die Mediale Kurve die Darstellung

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{r}^\alpha(s(t), t).$$

Die ersten beiden Ableitungen in dieser Darstellung sind daher durch

$$\boldsymbol{\mu}'(t) = s' \mathbf{r}_s^\alpha + \mathbf{r}_t^\alpha \quad (4.22)$$

$$\boldsymbol{\mu}''(t) = s'' \mathbf{r}_s^\alpha + (s')^2 \mathbf{r}_{ss}^\alpha + 2 s' \mathbf{r}_{st}^\alpha + \mathbf{r}_{tt}^\alpha \quad (4.23)$$

gegeben. Um  $\boldsymbol{\mu}''(t)$  bestimmen zu können, muß man also — neben den oben aufgelisteten Größen — ebenfalls in der Lage sein, die zweite Ableitung der Funktion des Medialen Abstands  $s(t)$  zu bestimmen. Um eine Möglichkeit zur Berechnung dieser Größe zu bekommen, leiten wir die Mediale Differentialgleichung

$$s' (\sigma_\beta b \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\alpha \partial_s \mathbf{O}_\alpha) + \varphi' \partial_t \mathbf{O}_\beta = \partial_t \mathbf{O}_\alpha - \sigma_\alpha b' s \partial_s \mathbf{O}_\beta$$

ein weiteres mal nach  $t$  ab. Wir erhalten damit die Beziehung

$$\begin{aligned} s'' (\sigma_\beta b \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\alpha \partial_s \mathbf{O}_\alpha) + \varphi'' \partial_t \mathbf{O}_\beta = & \\ (s')^2 (\partial_{ss} \mathbf{O}_\alpha - b^2 \partial_{ss} \mathbf{O}_\beta) - 2 \sigma_\beta b s' \varphi' \partial_{st} \mathbf{O}_\beta - (\varphi')^2 \partial_{tt} \mathbf{O}_\beta + 2 \sigma_\alpha s' \partial_{st} \mathbf{O}_\alpha + \partial_{tt} \mathbf{O}_\alpha & \\ - 2 \sigma_\beta b' s' \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\beta b'' s \partial_s \mathbf{O}_\beta - 2 b b' s s' \partial_{ss} \mathbf{O}_\beta - (b')^2 s^2 \partial_{ss} \mathbf{O}_\beta - 2 \sigma_\beta b' s \varphi' \partial_{st} \mathbf{O}_\beta. & \end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht nehmen wir für die folgenden Untersuchungen an, daß die Verhältnissfunktion  $b(t) = \text{const} \geq 1$  erfüllt. Für beliebige Funktionen kann man in analoger Art vorgehen; die dabei auftretenden Ausdrücke sind jedoch so unhandlich, daß es fraglich erscheint, ob die resultierende Formel von praktischem Wert ist. Unter dieser Annahme gilt  $b' = 0 = b''$ . Die Mediale Differentialgleichung hat nun die etwas vereinfachte Form

$$(\sigma_\beta b \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\alpha \partial_s \mathbf{O}_\alpha, \partial_t \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \partial_t \mathbf{O}_\alpha. \quad (4.24)$$

Für die Ableitung dieser Differentialgleichung gilt ferner

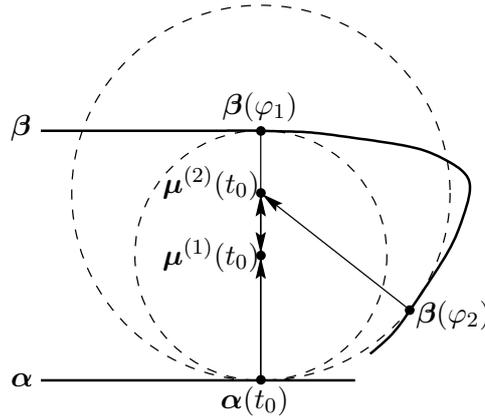
$$\begin{aligned} (\sigma_\beta b \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\alpha \partial_s \mathbf{O}_\alpha, \partial_t \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s'' \\ \varphi'' \end{pmatrix} = & \\ - \left( (b^2 \partial_{ss} \mathbf{O}_\beta - \partial_{ss} \mathbf{O}_\alpha, \sigma_\beta b \partial_{st} \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix}, (\sigma_\beta b \partial_{st} \mathbf{O}_\beta, \partial_{tt} \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} & \\ + 2 \sigma_\alpha s' \partial_{st} \mathbf{O}_\alpha + \partial_{tt} \mathbf{O}_\alpha. & \end{aligned} \quad (4.25)$$

Um zu garantieren, daß die betrachteten Parametrisierungen  $\mathbf{r}^\alpha$  und  $\mathbf{r}^\beta$  regulär bleiben, nehmen wir ferner an, daß die Mediale Kurve keinen Fokuspunkt bezüglich einer der beiden Progenitorobjekte durchläuft. Diese Voraussetzung stellt, wie oben erwähnt, keine Einschränkung dar, da nach Hilfssatz 4.2.1 die Mediale Kurve genau dann einen singulären Punkt besitzt, wenn sie durch einen Fokuspunkt einer der beiden Progenitorobjekte verläuft. Für  $\boldsymbol{\mu}'(t) = \mathbf{0}$  ist jedoch der Krümmungsvektor der Medialen Kurve nicht definiert, so daß für die hier untersuchte Geodätische Krümmung singuläre Punkte der Medialen Kurve auszuschließen sind. Nach Satz 4.1.2 ist die Matrix

$$M := (\sigma_\beta b \partial_s \mathbf{O}_\beta - \sigma_\alpha \partial_s \mathbf{O}_\alpha, \partial_t \mathbf{O}_\beta)$$

der Medialen Differentialgleichung unter diesen Voraussetzungen regulär. Wir können daher Gleichung (4.25) als Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s'' \\ \varphi'' \end{pmatrix} = 2 \sigma_\alpha s' M^{-1} \partial_{st} \mathbf{O}_\alpha + M^{-1} \partial_{tt} \mathbf{O}_\alpha & \quad (4.26) \\ - M^{-1} \left( (b^2 \partial_{ss} \mathbf{O}_\beta - \partial_{ss} \mathbf{O}_\alpha, \sigma_\beta b \partial_{st} \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix}, (\sigma_\beta b \partial_{st} \mathbf{O}_\beta, \partial_{tt} \mathbf{O}_\beta) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} s' \\ \varphi' \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

Abbildung 4.6: Nicht eindeutig bestimmte Wurzel von  $G_{t_0}$ 

schreiben. Durch numerisches Lösen der gestörten Jacobi Differentialgleichung (3.52) erhält man die Möglichkeit, alle benötigten Größen  $\partial_s \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\partial_{ss} \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\partial_t \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\partial_{st} \mathcal{O}_\alpha$  und  $\partial_{tt} \mathcal{O}_\alpha$  zu bestimmen. Daher kann mit Gleichung (4.26) insbesondere  $s''$  bestimmt werden. Mit Gleichung (4.23) erhält man schließlich den Krümmungsvektor der Medialen Kurve und ist damit in der Lage, die Geodätische Krümmung der Medialen zu berechnen.

## 4.5 Berechnung von Startwerten der Medialen Differentialgleichung

Nachdem in Abschnitt 4.1 die Mediale Differentialgleichung (4.7) zur Berechnung der Medialen Kurve eingeführt und untersucht wurde, müssen nun Anfangswerte zur Verfügung gestellt werden, um eine numerische Methode zur Integration dieses Differentialgleichungssystems zu etablieren. Hierzu betrachten wir erneut die vektorwertige Funktion  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

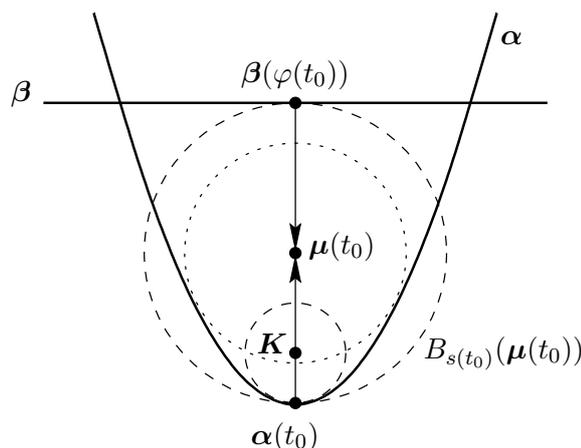
$$\mathbf{F}(s, t, \tilde{t}) = \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b(t) s, \tilde{t}) - \mathcal{O}(\sigma s, t),$$

als deren Nullstellenmenge die verallgemeinerte Mediale Kurve in Definition 4.1.1 eingeführt wurde. Für einen beliebigen, aber festen Parameter  $t_0$  des ersten Progenitorobjekts sind wir bei der Anfangswertsuche für die Mediale Differentialgleichung an zugehörigen Werten  $s, \varphi \in \mathbb{R}$  interessiert, so daß  $\mathbf{F}(s, t_0, \varphi) = \mathbf{0}$  gilt. Dies entspricht der Suche nach Wurzeln der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch

$$\mathbf{G}_{t_0}(s, \varphi) := \mathbf{F}(s, t_0, \varphi) = \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b_0 s, \varphi) - \mathcal{O}(\sigma s, t_0), \quad (4.27)$$

mit der Konstanten  $b_0 := b(t_0)$  definiert ist. Es ist an dieser Stelle wichtig darauf hinzuweisen, daß eine Wurzel dieser Funktion im allgemeinen *nicht* eindeutig bestimmt ist. Um sich dies zu verdeutlichen, betrachte man Abbildung 4.6.

In dem dort abgebildeten Beispiel, welches die Situation zweier Progenitorcurven  $\alpha$  und  $\beta$  in der Euklidischen Ebene behandelt, wurde ein konstantes Verhältnis  $b(t) = 1$  vorausgesetzt. Es sind zwei Wurzeln von  $\mathbf{G}_{t_0}$  zu dem Parameter  $t_0$  von  $\alpha$  eingezeichnet. Der erste korrespondierende Kurvenpunkt  $\beta(\varphi_1)$  liegt auf dem gegenüberliegenden Geradenstück von  $\beta$ . Diese Wurzel entspricht dem Medialen Punkt, den man intuitiv dem vorgegebenen Punkt  $\alpha(t_0)$  zuordnen würde, da er den Abstand zwischen den beiden Progenitorobjekten einerseits halbiert, andererseits die betrachteten Verbindungslinien zu den Progenitorcurven kürzeste Verbindungen sind.

Abbildung 4.7: Wurzel von  $\mathbf{G}_{t_0}$  jenseits des Fokalfpunkts von  $\alpha(t_0)$ 

Die zweite eingezeichnete Lösung weist nur die erste Eigenschaft auf. Die Normale des Kurvenpunkts  $\beta(\varphi_2)$ , der sich auf dem Parabelstück befindet, trifft die Normale ausgehend von  $\alpha(t_0)$  ebenfalls. Die Abstände, die dabei längs beider Normalen zurückgelegt werden, sind gleich, so daß der Schnittpunkt nach Definition zur Medialen Kurve gehört. Offenbar ist dieser Abstand jedoch größer als der der ersten Wurzel. Die zweite Wurzel widerspricht der intuitiven Vorstellung eines Medialen Punktes, da die Normale ausgehend von  $\beta(\varphi_2)$  keine kürzeste Verbindung zwischen dem Schnittpunkt und der Progenitorkurve  $\beta$  ist. Die Entscheidung, ob eine Verbindungslinie die kürzeste Verbindung darstellt, ist offensichtlich ein *globales* Problem. Es ist daher nicht verwunderlich, daß unsere bislang eingeführten Methoden, die auf *lokalem* Kalkül basieren, diese beiden Situationen nicht unterscheiden. Entsprechend wird die Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  im allgemeinen keine eindeutig bestimmte Wurzel besitzen. Insbesondere zeigt dieses Beispiel, daß  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  nur lokal definierte Funktionen sind. Die beiden eingezeichneten Punkte  $\mu^{(1)}(t_0)$  und  $\mu^{(2)}(t_0)$  sind beides Mediale Punkte, allerdings verschiedener Äste der lokal Medialen Kurve.

In Abbildung 4.7 ist ein Beispiel einer Situation skizziert, in der die Wurzel der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  einen Punkt  $\mu(t_0)$  induziert, der zu dem Punkt  $\alpha(t_0)$  und der Kurve  $\beta$  den gleichen Abstand besitzt, aber dennoch unserer Intuition nicht recht entsprechen mag. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß  $\mu(t_0)$  zwar zu  $\alpha(t_0)$  den Abstand  $s(t_0)$  hat, zu der gesamten Kurve  $\alpha$  jedoch einen geringeren Abstand besitzt. Dies erkennt man an der gestrichelt eingezeichneten Kreislinie  $B_{s(t_0)}(\mu(t_0))$ , die die Parabel  $\alpha$  schneidet, sowie an dem gepunktet eingezeichneten, zu  $\alpha$  tangentialen Kreis um  $\mu(t_0)$ . Der mathematische Grund für diesen Sachverhalt ist, daß die Normale ausgehend von  $\alpha(t_0)$  den zugehörigen Fokalfunkt passiert hat. Im Euklidischen Fall entspricht der Fokalfunkt einer Kurve bekanntlich dem Mittelpunkt  $\mathbf{K}$  des Krümmungskreises, der in Abbildung 4.7 zusammen mit dem zugehörigen Krümmungskreis eingezeichnet ist. Die besprochene Situation ist jedoch nicht als Gegenbeispiel zu werten. Das Konzept der Medialen Kurve ist ein *lokales* Kalkül; das Finden der eben diskutierten Wurzel von  $\mathbf{G}_{t_0}$  ist definitionskonform.

Bei der Definition der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  sind wir bislang noch nicht auf die Wahl der Vorzeichen  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  eingegangen. Zur Erinnerung: diese beiden Konstanten steuerten im Fall von Progenitorkurven, nach welcher Seite der Geodätische Offset betrachtet wird. Im Fall eines Progenitorpunkts ist das zugehörige Vorzeichen positiv zu wählen. Im Zusammenhang mit der Nullstellenberechnung der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  bestimmen diese beiden Vorzeichen, auf welcher Seite die Wurzel gesucht wird. Eine Antwort auf die Frage, wie  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  zu wählen sind, ist a priori keineswegs offensichtlich. Wir stellen dieses Problem eine Weile hinten an und kommen weiter unten darauf zurück.

Die partiellen Ableitungen der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  sind nach ihrer Definition (4.27) durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{G}_{t_0}(s, \varphi) &= \tilde{\sigma} b_0 \partial_s \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b_0 s, \varphi) - \sigma \partial_s \mathcal{O}(\sigma s, t_0) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{G}_{t_0}(s, \varphi) &= \partial_t \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b_0 s, \varphi)\end{aligned}$$

gegeben. Für eine Verhältnisfunktion, die der Bedingung  $b(t) \geq 1$  genügt, ist die Jacobimatrix  $J_G$  von  $\mathbf{G}_{t_0}$

$$\begin{aligned}J_G(s, \varphi) &= \left( \frac{\partial}{\partial s}\mathbf{G}_{t_0}(s, \varphi), \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{G}_{t_0}(s, \varphi) \right) \\ &= \left( \tilde{\sigma} b_0 \partial_s \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b_0 s, \varphi) - \sigma \partial_s \mathcal{O}(\sigma s, t_0), \partial_t \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\sigma} b_0 s, \varphi) \right)\end{aligned}$$

nach Satz 4.1.2 genau dann invertierbar, wenn  $\partial_t \tilde{\mathcal{O}} \neq \mathbf{0}$  erfüllt ist, d.h. die Mediale Kurve nicht durch einen Fokalfunkt bezüglich des zweiten Progenitorobjekts verläuft. Solange diese Situation nicht eintritt, kann man die Folge der Newtoniterierten

$$\begin{pmatrix} s_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} - J_G(s_i, \varphi_i)^{-1} \mathbf{G}_{t_0}(s_i, \varphi_i)$$

zu einem Startwert  $(s_0, \varphi_0)$  betrachten. Damit haben wir ein iteratives Verfahren formuliert, um einen einzelnen Punkt der verallgemeinerten Medialen Kurve zu approximieren. In der durch uns implementierten Programmibibliothek wurde tatsächlich nicht das Standard-Newtonverfahren eingesetzt. Unsere Experimente wurden mit Hilfe zweier Routinen der NAG-Bibliothek durchgeführt, die eine Modifikation der sogenannten Hybridmethode nach Powell (siehe [Pow70]) realisieren. Die beiden Varianten unterscheiden sich darin, daß in einer der beiden die partiellen Ableitungen der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  nicht benötigt werden, was in manchen Fällen eine Ersparnis an Rechenzeit bedeutet. Eine sehr gute Übersicht über die einsetzbaren iterativen Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme bietet das Buch von Ortega und Rheinboldt [OR70].

Iterative Verfahren wie die Newtonmethode benötigen ihrerseits Startwerte. Um die Konvergenz der Folge der Iterierten zu garantieren, muß der Startwert bekanntermaßen hinreichend nahe an der zu approximierenden Wurzel liegen. Diese Tatsache zusammen mit dem noch nicht gelösten Problem der Wahl der Vorzeichen  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  führt uns zu der Notwendigkeit, nach einer weiteren Möglichkeit zu suchen, eine einzelne Wurzel der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  zu approximieren. Die Näherungsgenauigkeit einer solchen Methode darf dabei gering sein, da das Ergebnis als Startwert der eben erwähnten iterativen Verfahren benutzt werden soll.

Im folgenden wollen wir das von uns favorisierte Verfahren für den Fall zweier Progenitorkurven  $\alpha$  und  $\beta$  erläutern. In wesentlichen Teilen funktioniert es für die restlichen Konfigurationen (Kurve/Punkt, Punkt/Kurve, Punkt/Punkt) analog. Auf die existierenden Unterschiede werden wir weiter unten eingehen. Ausgehend von dem gewählten Kurvenpunkt  $\alpha(t_0)$  der ersten Progenitorkurve betrachten wir die bogenlängenparametrisierte Geodätische  $\gamma_{t_0}(\sigma_\alpha s)$ , die orthogonal zur Kurventangente  $\alpha'(t_0)$  startet. Welche der beiden möglichen Richtungen, d.h. welches Vorzeichen  $\sigma_\alpha$ , hierbei gewählt werde, ist dabei willkürlich. Zu einem vom Benutzer zu bestimmenden inkrementellen Abstandswert  $\Delta s$  wird nun der Punkt  $\mu_1 := \gamma_{t_0}(\sigma_\alpha s_1)$  im Abstand  $s_1 := \Delta s$  auf der Geodätischen Kurve bestimmt. Dieser Punkt werde nun als Mittelpunkt von Geodätischen Kreisen  $A_1 := B_{s_1}(\mu_1)$  und  $B_1 := B_{b(t_0)s_1}(\mu_1)$  mit Radien  $s_1$  bzw.  $b(t_0)s_1$  gewählt. Der Geodätische Kreis  $A_1$  hat nach Konstruktion die Eigenschaft, daß er die erste Progenitorkurve  $\alpha$  im vorgegebenen Punkt  $\alpha(t_0)$  berührt. Die zugehörige Tangente des Geodätischen Kreises ist kollinear zu  $\alpha'(t_0)$ , da beide orthogonal zu der Tangente  $\gamma'_{t_0}(0)$  der Geodätischen Kurve sind.

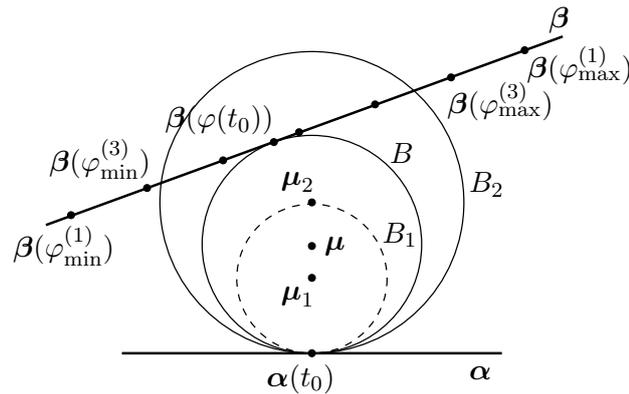


Abbildung 4.8: Initialisierung des Bisektionsverfahrens

Die eben konstruierte Situation ist in Abbildung 4.8 anhand des Beispiel zweier Geraden in der Euklidischen Ebenen zu  $b(t) = 1$  skizziert. Hier gilt  $A_k = B_k$ , so daß lediglich die Kreise  $B_k$  eingezeichnet wurden. Nachdem die  $uv$ -Parameter des Punktes  $\mu_1$  mit Hilfe der Geodätischen Differentialgleichung bestimmt sind, können wir eine gewisse Anzahl  $n$  von Punkten des Geodätischen Kreises  $B_1$  bestimmen. Dies entspricht einem  $n$ -maligen Aufruf des numerischen Verfahrens, welches die Geodätische Differentialgleichung integriert. Wir erhalten damit einen geschlossenen Polygonzug im  $uv$ -Parameterraum der Fläche  $S$ , der einer linearen Approximation der Kreislinie entspricht. Ferner werden die  $uv$ -Parameterwerte  $(m+1)$  äquidistanter Kurvenpunkte  $\beta(\varphi_i^{(k)})$  mit  $\varphi_i^{(k)} := \varphi_{\min}^{(k)} + \frac{i}{m}(\varphi_{\max}^{(k)} - \varphi_{\min}^{(k)})$  zu  $i = 0, 1, \dots, m$  berechnet. Das Ausgangsintervall  $[\varphi_{\min}^{(1)}, \varphi_{\max}^{(1)}]$  kann vom Benutzer vorgegeben werden. Als Standardwerte werden die Grenzen des Parameterintervalls von  $\beta$  vorgeschlagen. Damit erhält man einen Polygonzug, der die Kurve  $\beta$  (teilweise) linear interpoliert.

Das vorgeschlagene Bisektionsverfahren beruht auf der Tatsache, daß der Geodätische Kreis  $B := B_r(\mu)$  um einen Medialen Punkt  $\mu := \gamma_{t_0}(\sigma_\alpha s(t_0))$  und Radius  $r := b(t_0)s(t_0)$  die zweite Progenitorkurve  $\beta$  in einem Punkt  $\beta(\varphi(t_0))$  berührt. Wir deuten die im Laufe des Verfahrens betrachteten Geodätischen Kreise  $B_k$  als Näherungen des gesuchten Kreises  $B$ , welcher ebenfalls in Abbildung 4.8 eingezeichnet ist. Entsprechend sind die zugehörigen Werte  $s_k$  Approximationen des gesuchten Medialen Abstands  $s(t_0)$ , sowie die Bereiche  $[\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$  Einschlußintervalle von  $\varphi(t_0)$ . Um die Güte dieser Näherungen zu beurteilen, soll  $B_k$  auf vorhandene Schnitte mit der zweiten Progenitorkurve  $\beta$  überprüft werden. Hierzu werden die linearen Interpolierenden von  $B_k$  und  $\beta$  benutzt. Für jeden Kurvenpunkt  $\beta(\varphi_i^{(k)})$  wird nun getestet, ob sich sein  $uv$ -Parameterpaar im Inneren des geschlossenen Polygonzugs von  $B_k$  befindet. Falls das zweite Progenitorobjekt ein Flächenpunkt ist, wird überprüft, ob die zugehörigen  $uv$ -Parameter diese Bedingung erfüllen. Auf Einzelheiten zum Innen-/Außentest werden wir an dieser Stelle nicht eingehen. Wir bemerken jedoch, daß dieser mit linearem Aufwand (bezüglich der Anzahl der Eckpunkte des geschlossenen Polygonzugs) durchgeführt werden kann. Benutzt haben wir die Implementation von Friese, die im Rahmen einer Studienarbeit am Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover erstellt wurde. Einzelheiten können seiner schriftlichen Ausarbeitung [Fri98] entnommen werden.

Falls bei den sequentiell durchgeführten Innen-/Außentests keiner der Kurvenpunkte  $\beta(\varphi_i^{(k)})$  im Inneren des Polygonzugs zu  $B_k$  liegt, bleibt das Intervall unverändert, d.h.  $[\varphi_{\min}^{(k+1)}, \varphi_{\max}^{(k+1)}] := [\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$ . Für den nächsten Durchgang des Verfahren wird der betrachtete Abstand erhöht.

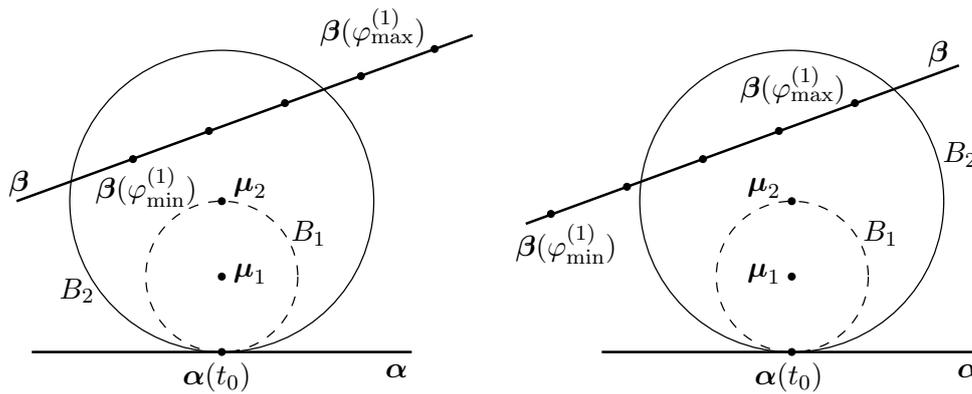


Abbildung 4.9: Kurvenbereich beginnt bzw. endet im initialen Geodätischen Kreis

In der Initialisierungsphase, in der wir uns solange befinden, bis ein Kreis  $B_k$  gefunden wurde, der  $\beta$  schneidet, geschieht dies durch Inkrementieren mit  $\Delta s$ . Im Beispiel von Abbildung 4.8 schneidet  $B_1$  die zweite Progenitorkurve nicht. Solche Kreise seien durch gestrichelte Kreislinien gekennzeichnet. Der Geodätische Abstand für den zweiten Durchgang ergibt sich daher aus  $s_2 := s_1 + \Delta s$ . Der neue Versuch mit  $B_2$  ergibt nun Schnittpunkte mit der Progenitorkurve  $\beta$ . In einem solchen Fall möchte man  $\varphi_{\min}^{(k+1)}$  auf den ersten Schnittpunkt von  $\beta$  mit der Kreislinie von  $B_k$  setzen. Dieser Wert entspricht dem Parameter, zu dem die Kurve in den betrachteten Kreis eintritt. Die obere Intervallgrenze  $\varphi_{\max}^{(k)}$  würde entsprechend auf den ersten Parameter von  $\beta$  gesetzt werden, der größer als  $\varphi_{\min}^{(k)}$  ist, und der ebenfalls einen Schnittpunkt mit  $B_k$  induziert. Mit dieser Wahl wäre  $\varphi_{\max}^{(k)}$  der zu  $\varphi_{\min}^{(k)}$  gehörige Austrittsparameter von  $\beta$  bzgl.  $B_k$ . Im Beispiel von Abbildung 4.8 wäre mit dem zweiten Durchgang die Initialisierungsphase beendet.

Die Schnitte von  $\beta$  mit  $B_k$  werden jedoch von uns gar nicht berechnet. Dies hat zwei Gründe. Zum einen wäre der Rechenaufwand für eine solche Berechnung sehr hoch. Zum anderen liegt uns der Geodätische Kreis lediglich in prozeduraler Form vor, d.h. in Form eines Geodätischen Offsets des betrachteten Mittelpunkts. Wie erläutert entspricht dies dem  $n$ -maligen numerischen Lösen der Geodätischen Differentialgleichung. Der Kreis  $B_k$  ist demnach in der Praxis als  $n$ -elementige Punktmenge gegeben. Daher findet bei unserem Vorschlag ein Innen-/Außentest Anwendung. Bezeichnet  $\varphi_j^{(k)}$  den ersten kleinsten Parameter mit  $1 \leq j \leq m$ , für den der Innen-/Außentest ergab, daß sich  $\beta(\varphi_j^{(k)})$  im Inneren von  $B_k$  befindet, so muß die Kurve  $\beta$  im Zeitraum zwischen  $\varphi_{j-1}^{(k)}$  und  $\varphi_j^{(k)}$  den Polygonzug von  $B_k$  schneiden. Als untere Abschätzung des Schnittparameters können wir daher  $\varphi_{\min}^{(k+1)} := \varphi_{j-1}^{(k)}$  neu setzen. Als obere Abschätzung des Austrittsparameters wird ferner  $\varphi_{\max}^{(k+1)}$  auf  $\varphi_l^{(k)}$  gesetzt, wobei  $j < l \leq m$  minimal gewählt werde, so daß  $\beta(\varphi_l^{(k)})$  außerhalb von  $B_k$  liegt.

Weder die Anzahl  $m$  der im Innen-/Außentest geprüften Kurvenpunkte  $\beta(\varphi_i^{(k)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  noch die Abtastrate  $n$  der betrachteten Geodätischen Kreise darf vom Benutzer zu gering gewählt werden. Sonst besteht die Gefahr, einen Schnitt von  $\beta$  mit  $B_k$  zu übersehen. Im Laufe des Verfahrens werden die Intervalle  $[\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$  mit zunehmendem  $k$  immer kleiner werden, so daß die Abtastdichte von  $\beta$  zunehmen wird. Allerdings ist zu beachten, daß die Kurve im allgemeinen nicht nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sein wird. Die äquidistante Abtastung des Parameterintervalls korrespondiert also in der Regel nicht mit einer äquidistanten Abtastung des Kurvenverlaufs. Dies spricht ebenfalls dafür, eine großzügige Anzahl  $m$  an Kurvenpunkten zu untersuchen.

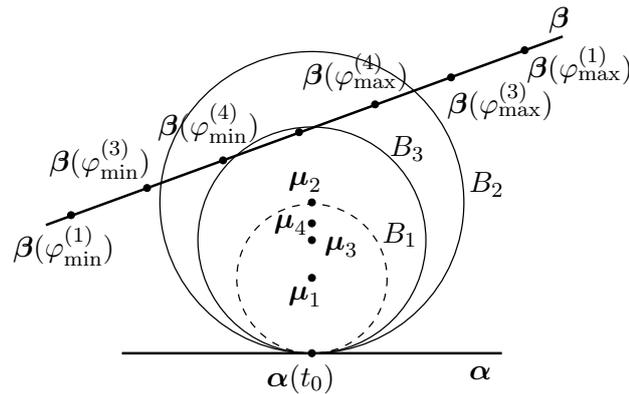


Abbildung 4.10: Einzelschritt des Bisektionsverfahrens

Wird in der Initialisierungsphase ein Schnitt mit dem betrachteten Geodätischen Kreis  $B_k$  gefunden, so ist nicht gewährleistet, daß es nur diesen einen Schnitt von  $\beta$  mit  $B_k$  gibt. Dies entspricht in etwa einer Situation, wie sie in Abbildung 4.6 betrachtet wird. In unserer Formulierung des Algorithmus wird nur der erste gefundene Schnitt berücksichtigt. Insbesondere kann also die berechnete Approximation einer Wurzel von  $G_{t_0}$  zu einem Punkt der Medialen Kurve gehören, der unserer Intuition widerspricht. Will man dies vermeiden, so müssen in jedem Schritt des Verfahrens alle Schnittintervalle gefunden und weiter untersucht werden. Dies führt jedoch im allgemeinen zu einem dramatischen Anstieg der Rechenzeit.

Wenn bereits der erste getestete Kurvenpunkt  $\varphi_{\min}^{(k)}$  innen liegt, oder wenn nach Auffinden eines inneren Punktes  $\varphi_j^{(k)}$  der letzte betrachtete Kurvenpunkt  $\varphi_{\max}^{(k)}$  ebenfalls innen liegt, so ist das Ausgangsintervall  $[\varphi_{\min}^{(1)}, \varphi_{\max}^{(1)}]$  zu klein gewählt, bzw. hat der betrachtete Kreis  $B_k$  einen zu großen Radius  $b(t_0)s_k$ . Beide Situationen sind in Abbildung 4.9 skizziert worden. Das Ausgangsintervall ist hier so gewählt worden, daß der zugehörige Kurvenabschnitt von  $\beta$  während des zweiten Durchgangs im betrachteten Geodätischen Kreis  $B_2$  beginnt bzw. endet. Unabhängig davon hat die Initialisierungsphase einen Schnitt finden können. Da im Laufe des Algorithmus die betrachteten Kreise einen kleineren Radius haben werden, kann man das Auftreten solcher Ausgangssituationen zulassen. Im ersten Fall ist  $\varphi_{\min}^{(k+1)} := \varphi_{\min}^{(1)}$  zu wählen. Falls der Kurvenabschnitt in  $B_k$  endet, ist  $\varphi_{\max}^{(k+1)} := \varphi_{\max}^{(1)}$  zu setzen.

Nachdem die Initialisierungsphase der Bisektion nach  $(k-1)$  Schritten abgeschlossen ist, kennt man mit  $[\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$  einen Parameterbereich, in dem  $\beta$  den zuletzt betrachteten Geodätischen Kreis  $B_{k-1}$  schneidet. Da dieser Kreis der erste mit dieser Eigenschaft ist, also insbesondere  $B_{k-2}$  keinen Schnitt mit  $\beta$  besitzt, muß der gesuchte Mediale Abstand  $s(t_0)$  aus Stetigkeitsgründen im Intervall  $[s_{\min}^{(k)}, s_{\max}^{(k)}] := [s_{k-2}, s_{k-1}]$  enthalten sein. Falls bereits im ersten Durchgang ( $k-1=1$ ) der Initialisierung ein Schnitt gefunden wurde, ist hierbei  $s_{k-2} := 0$  zu setzen. Ferner muß der exakte Parameter  $\varphi(t_0)$  des zu  $B$  tangentialen Kurvenpunkts  $\beta(\varphi(t_0))$  im Intervall  $[\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$  liegen. Das Bisektionsverfahren wird im Anschluß an die Initialisierung versuchen, beide Intervalle sukzessive zu verkleinern. Hierfür wird jeder folgende Durchgang mit einem Geodätischen Abstand  $s_k$  durchgeführt, der der Intervallmitte  $s_k := (s_{\min}^{(k)} + s_{\max}^{(k)})/2$  entspricht. In Abhängigkeit davon, ob der  $k$ -te Schritt einen Schnitt von  $\beta$  mit  $B_k$  findet, werden die neuen Intervalle für den  $(k+1)$ -ten Schritt gewählt. Wird ein Schnitt gefunden, so wird anschließend das Intervall  $[s_{\min}^{(k+1)}, s_{\max}^{(k+1)}] := [s_{\min}^{(k)}, s_k]$  betrachtet, andernfalls  $[s_k, s_{\max}^{(k)}]$ . Im Hinblick auf das Intervall  $[\varphi_{\min}^{(k+1)}, \varphi_{\max}^{(k+1)}]$  ist die Vorgehensweise identisch zu der in der Initialisierungsphase. Damit be-

halten beide Intervalle die oben erläuterten Einschlußeigenschaften. Der erste Bisektionsschritt nach der Initialisierung in dem hier besprochenen Beispiel ist in Abbildung 4.10 skizziert. Der Schnitttest von  $\beta$  mit  $B_3$  war hier positiv. Die resultierenden Intervalle für den Durchgang  $k = 4$  wurden durch Einzeichnen der Punkte  $\beta(\varphi_{\min}^{(4)})$ ,  $\beta(\varphi_{\max}^{(4)})$  und  $\mu_4$  angedeutet.

Insgesamt werden drei Abbruchkriterien geprüft, um das Verfahren der sukzessiven Halbierung der Intervallbreite  $[s_{\min}^{(k)}, s_{\max}^{(k)}]$  zu beenden. Zum einen ist der Benutzer aufgefordert, eine maximale Anzahl  $N$  von Schritten zu benennen. Das Verfahren wird spätestens nach dem Durchgang  $k = N$  beendet, unabhängig vom Erfolg der bis dahin durchgeführten Schnitttests. Allerdings wird in der vorliegenden Implementation unterschieden, ob sich das Verfahren zu dieser Zeit in der Initialisierungsphase oder bei einem Bisektionsschritt befand. Im ersten Fall muß davon ausgegangen werden, daß kein Medialer Punkt auf der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}(\sigma_\alpha s)$  existiert, d.h. die untersuchte Richtung  $\sigma_\alpha$  schlecht gewählt wurde. Bei einem solchen Abbruch in der Initialisierungsphase des Algorithmus haben die zuletzt betrachteten Radien von  $A_N$  bzw.  $B_N$  die Werte  $N\Delta s$  bzw.  $b(t_0)N\Delta s$ . Vorausgesetzt der Benutzer hat die Routine mit nicht zu kleinen Werten für  $N$  und  $\Delta s$  aufgerufen, liefert eine Initialisierungsphase ohne Schnitt von  $\beta$  mit  $B_N$  den Grund, von einer falsch gewählten Richtung  $\sigma_\alpha$  auszugehen. Entsprechend sollte das Verfahren mit dem Vorzeichen  $-\sigma_\alpha$  erneut aufgerufen werden. Falls  $k = N$  nach einem Bisektionsschritt zum Abbruch der Routine führt, liegt dies daran, daß die im folgenden beschriebenen Abbruchkriterien nicht erfüllt wurden. Die bisher berechneten Einschlußintervalle sind dennoch gültig und können für folgende Berechnungen weiter genutzt werden.

Neben der maximalen Anzahl der durchzuführenden Schritte hat der Benutzer die Möglichkeit, Genauigkeitsanforderungen  $\delta_s$  und  $\delta_\varphi$  an die beiden zu nähernden Parameter  $s(t_0)$  und  $\varphi(t_0)$  zu stellen. Die Routine wird beendet, falls für die Hälften der neu bestimmten Einschlußintervallbreiten

$$\frac{1}{2} \left( s_{\max}^{(k+1)} - s_{\min}^{(k+1)} \right) \leq \delta_s \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \left( \varphi_{\max}^{(k+1)} - \varphi_{\min}^{(k+1)} \right) \leq \delta_\varphi$$

gilt. In diesem Fall dienen die Intervallmitten  $s_{k+1} := (s_{\min}^{(k+1)} + s_{\max}^{(k+1)})/2$  und  $\varphi_{k+1} := (\varphi_{\min}^{(k+1)} + \varphi_{\max}^{(k+1)})/2$  als Approximationen der gesuchten Werte. Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$|s(t_0) - s_{k+1}| \leq \delta_s \quad \text{und} \quad |\varphi(t_0) - \varphi_{k+1}| \leq \delta_\varphi.$$

Sollte die Routine nach dem Schritt  $k = N$  ohne Erreichen der gewünschten Fehlergenauigkeit abgebrochen werden, genügen die entsprechenden Intervallmitten den Abschätzungen

$$|s(t_0) - s_{N+1}| \leq \frac{1}{2} \left( s_{\max}^{(N+1)} - s_{\min}^{(N+1)} \right) \quad \text{und} \quad |\varphi(t_0) - \varphi_{N+1}| \leq \frac{1}{2} \left( \varphi_{\max}^{(N+1)} - \varphi_{\min}^{(N+1)} \right).$$

Die erreichten Genauigkeiten werden dem Benutzer zurückgeliefert, so daß dieser entscheiden kann, ob sie seinen Anforderungen genügen. Da sich das Einschlußintervall von  $\varphi(t_0)$  im allgemeinen mit einem durchgeführten Bisektionsschritt nicht halbiert, sollte man die zugehörige Genauigkeitsanforderung  $\delta_\varphi$  nicht zu klein wählen. Insbesondere wenn das Verhältnis  $b(t_0)$  einen großen Wert aufweist, ist keine hohe Approximationsgüte bzgl.  $\varphi(t_0)$  zu erwarten, da kleine Intervalle  $[s_{k-1}, s_k]$  keine kleinen Radiusintervalle  $[b(t_0)s_{k-1}, b(t_0)s_k]$  der Kreise  $B_k$  mit sich bringen. Als bessere Strategie, um genaue Näherungen zu erhalten, erwies sich in unseren Tests, mit einem nachgeschalteten iterativen Verfahren, wie es eingangs dieses Abschnitts beschrieben wurde, die Präzision der Approximation zu erhöhen.

Wie bereits oben erläutert, liegen die Probleme bei der Anwendung eines iterativen Verfahrens einerseits in der Wahl eines geeigneten Startwerts der Iteration, sowie andererseits in der

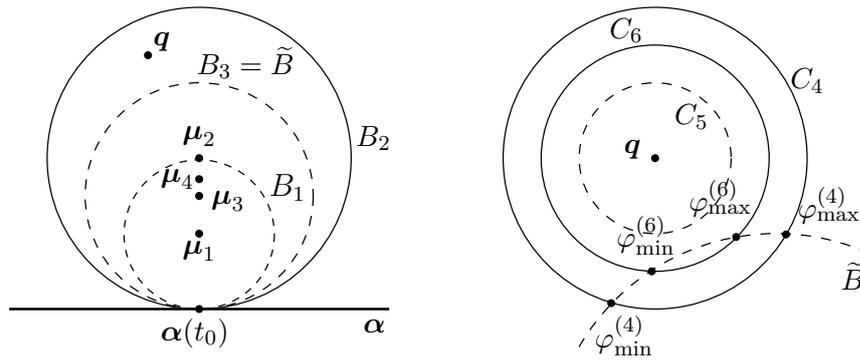


Abbildung 4.11: Erweiterung des Bisektionsverfahrens im Fall von Progenitorpunkten

Festlegung der korrekten Vorzeichen  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$ . Beide Probleme kann man wie gesehen durch vorheriges Durchführen der vorgeschlagenen Bisektionsmethode in den Griff bekommen. Das noch zu bestimmende Vorzeichen  $\tilde{\sigma}$  kann man schließlich durch Vergleich der Residuen

$$\tilde{\mathcal{O}}(b(t_0) s_{k+1}, \varphi_{k+1}) - \mathcal{O}(\sigma s_{k+1}, t_0) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{O}}(-b(t_0) s_{k+1}, \varphi_{k+1}) - \mathcal{O}(\sigma s_{k+1}, t_0)$$

festlegen. Ist der erste Einsetzfehler der Funktion  $\mathbf{G}_{t_0}$  kleiner, so wähle man  $\tilde{\sigma} := 1$ , andernfalls  $\tilde{\sigma} := -1$ .

Der Algorithmus kann beinahe unverändert für den Fall benutzt werden, daß es sich bei dem ersten Progenitorobjekt um einen Flächenpunkt  $\mathbf{p}$  handelt. Der konstante Parameter  $t_0$  repräsentiert hierbei den Startwinkel der Geodätischen aus dem Punkt  $\mathbf{p}$ , gemessen in der Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}(S)$ . Betrachtet man jedoch anstelle von  $\beta$  einen Flächenpunkt  $\mathbf{q}$  als zweites Progenitorobjekt, so muß das Verfahren erweitert werden, um den korrespondierenden tangentialen Winkel  $\varphi(t_0)$  zu approximieren. Der Schnittest reduziert sich in diesem Fall im  $k$ -ten Schritt auf einen einzelnen Innen-/Außentest: „Liegt  $\mathbf{q}$  im Inneren des Geodätischen Kreises  $B_k$ ?“. Das Bisektionsverfahren wird nun solange durchgeführt, bis die Intervallbreite des Einschlußintervalls  $[s_{\min}^{(k+1)}, s_{\max}^{(k+1)}]$  bzgl.  $s(t_0)$  nach dem  $k$ -ten Schritt den Genauigkeitsanforderungen genügt. Dies geschieht in analoger Weise zu dem Fall, daß es sich bei dem zweiten Progenitorobjekt um eine Kurve handelt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man hierbei keine Einschlußintervalle  $[\varphi_{\min}^{(k)}, \varphi_{\max}^{(k)}]$  betrachten kann.

Um ein solches Intervall zu berechnen, und damit zu einer Näherung von  $\varphi(t_0)$  zu gelangen, ist das Verfahren in folgender Form zu erweitern. Nach Konstruktion gilt für die untere Intervallgrenze  $s_{\min}^{(k+1)}$  des berechneten Einschlußintervalls, daß das zweite Progenitorobjekt  $\mathbf{q}$  nicht im Inneren des Kreises  $\tilde{B} := B_r(\tilde{\mu})$  um den Mittelpunkt  $\tilde{\mu} := \gamma_{t_0}(\sigma_{\alpha} s_{\min}^{(k+1)})$  und Radius  $r := b(t_0) s_{\min}^{(k+1)}$  liegt. Dieser Kreis  $\tilde{B}$  stellt damit eine Näherung von  $B$  dar, für die die Inklusion  $\tilde{B} \subset B$  gilt; er wird wie gewohnt durch einen geschlossenen Polygonzug bestehend aus  $n$  Punkten approximiert. Ferner betrachten wir den Initialkreis  $C_{k+1} := B_{\rho_{k+1}}(\mathbf{q})$  um den Progenitorpunkt  $\mathbf{q}$  mit dem Radius  $\rho_{k+1} := b(t_0)(s_{\max}^{(k+1)} - s_{\min}^{(k+1)})$ . Dieser Kreis hat die Eigenschaft, daß er  $\tilde{B}$  schneiden muß.

Um die Schnittpunkte eines Kreises  $C_l = B_{\rho_l}(\mathbf{q})$  für  $l = k+1, k+2, \dots$  mit  $\tilde{B}$  zu nähern, führen wir den Innen-/Außentest sequentiell für die Punkte des Geodätischen Kreises  $C_l$  durch, die den Winkeln  $\varphi_i^{(l)} := \varphi_{\min}^{(l)} + \frac{i}{m}(\varphi_{\max}^{(l)} - \varphi_{\min}^{(l)})$  zu  $i = 0, 1, \dots, m$  entsprechen. Für den ersten Durchgang  $l = k+1$  ist hierzu  $[\varphi_{\min}^{(k+1)}, \varphi_{\max}^{(k+1)}] := [0, 2\pi]$  zu wählen. Das Intervall  $[\varphi_{\min}^{(l+1)}, \varphi_{\max}^{(l+1)}]$

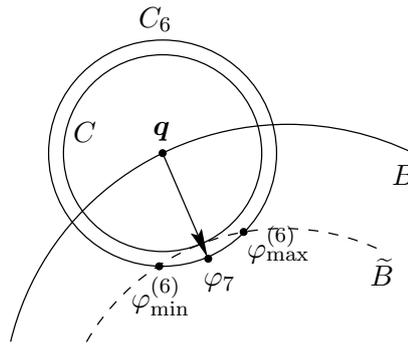


Abbildung 4.12: Approximation des Tangentialwinkels am 2. Progenitorpunkt

für den nachfolgenden Durchgang ist anschließend so zu wählen, daß  $\varphi_{\min}^{(l+1)}$  der letzte Winkel vor Eintritt und  $\varphi_{\max}^{(l+1)}$  der erste Winkel nach Austritt der Kreislinie  $C_l$  aus  $\tilde{B}$  entspricht. Falls jedoch aufgrund des Innen-/Außentests kein Schnitt diagnostiziert wurde, wird das Intervall unverändert aus dem  $l$ -ten Schritt übernommen. Der nächste zu betrachtende Radius des Geodätischen Kreises  $C_{l+1}$  ist durch  $\rho_{l+1} := b(t_0)(\rho_{\min}^{(l)} + \rho_{\max}^{(l)})/2$  gegeben. Hierzu ist initial  $[\rho_{\min}^{(k+1)}, \rho_{\max}^{(k+1)}] := [0, \rho_{k+1}]$  zu setzen. Für die folgenden Durchgänge  $l > k$  ist  $[\rho_{\min}^{(l+1)}, \rho_{\max}^{(l+1)}]$  auf  $[\rho_{\min}^{(l)}, \rho_l]$  zu setzen, falls ein Schnitt gefunden wurde. Sonst gilt  $[\rho_{\min}^{(l+1)}, \rho_{\max}^{(l+1)}] := [\rho_l, \rho_{\max}^{(l)}]$ .

Die beschriebene Vorgehensweise wurde in Abbildung 4.11 an einem Beispiel skizziert. Die Initialisierungsphase konnte hierbei mit dem Kreis  $B_2$  abgeschlossen werden, da  $\mathbf{q}$  in diesem Kreis enthalten ist. Der erste Bisektionsschritt führte zwar zu dem Ergebnis, daß  $\mathbf{q}$  nicht in  $B_3$  enthalten ist, die gewünschte Genauigkeit  $\delta_s$  sei aber für dieses Beispiel mit diesem Schritt bereits erreicht worden. Damit entspricht  $B_3$  dem zu betrachtenden Kreis  $\tilde{B}$  (vgl. linke Hälfte von Abbildung 4.11). In der rechten Bildhälfte ist die gleiche Situation vergrößert dargestellt. Der initiale Kreis  $C_4$  um den Progenitorpunkt  $\mathbf{q}$  schneidet  $\tilde{B}$  in zwei Punkten. Die zugehörigen Winkel  $\varphi_{\min}^{(4)}$  und  $\varphi_{\max}^{(4)}$  wurden an den entsprechenden Schnittpunkten vermerkt. Der anschließend betrachtete Kreis  $C_5$  besitzt keine Schnittpunkte mit  $\tilde{B}$ , so daß dieser gestrichelt eingezeichnet wurde. Erst  $C_6$  besitzt solche Schnittpunkte, deren zugehörige Winkel  $\varphi_{\min}^{(6)}$  und  $\varphi_{\max}^{(6)}$  eine Verkleinerung des Winkelintervalls bedeuten.

Ein Abbruch erfolgt spätestens nach dem Durchgang  $l = N$ , wobei  $N$  die vom Benutzer anzugebende maximale Anzahl durchzuführender Schritte bezeichnet. Er kann jedoch auch früher erfolgen, falls die Hälfte der Intervallbreite von  $[\varphi_{\min}^{(l+1)}, \varphi_{\max}^{(l+1)}]$  der Abschätzung

$$\frac{1}{2} (\varphi_{\max}^{(l+1)} - \varphi_{\min}^{(l+1)}) \leq \delta_\varphi$$

zu der vom Benutzer definierten Genauigkeitsanforderung  $\delta_\varphi$  genügt. In beiden Fällen dient die Intervallmitte  $(\varphi_{\min}^{(l+1)} + \varphi_{\max}^{(l+1)})/2$  als Approximation des tangentialen Winkels  $\varphi(t_0)$ .

Voraussetzung für die soeben beschriebene Erweiterung des Bisektionsverfahrens ist die Annahme, daß der betrachtete Kreis  $\tilde{B}$  eine hinreichend gute Approximation von  $B$  darstellt, also dem Kreis, der den Progenitorpunkt  $\mathbf{q}$  auf seiner Kreislinie enthält. Damit verlaufen die untersuchten Geodätischen Kreise  $C_l$  sehr eng um  $\mathbf{q}$  herum und bilden damit als Offsetkurve eine gute Näherung des Punktes selbst. Diese Näherungseigenschaft wurde bereits in Hilfssatz 2.4.2 mathematisch beschrieben. Der gesuchte Wert  $\varphi(t_0)$  ist der tangentiale Winkel, mit dem die Geodätische Radiuskurve von  $B$  in  $\mathbf{q}$  hinein verläuft. Das vorgeschlagene Verfahren nähert den

<b>Mediale Differentialgleichung</b> (siehe Gleichung (4.8) auf Seite 88)	
Methode:	Differentialgleichungssystem erster Ordnung aus 2 Gleichungen.
Voraussetzung:	$C^3$ -stetige Fläche, ggf. $C^3$ -stetige Flächenkurve(-n).
Anfangswerte:	Durch einen eigenen Algorithmus zu bestimmen (vgl. Abschnitt 4.5).
Teilprobleme:	Jacobi Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 3.6, Tabelle 3.2).
Ergebnisse:	
$s(t)$	Medialer Abstand bezüglich des Parameters $t$ des ersten Progenitorobjekts.
$\varphi(t)$	Geschleppter Parameter bezüglich des zweiten Progenitorobjekts.
$\boldsymbol{\mu}(t)$	Medialer Punkt zum Parameter $t$ durch Einsetzen der Lösung in Geodätische Differentialgleichung $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\gamma}_t(s(t)) = \boldsymbol{r}(\mathcal{O}(s(t), t))$ .
$s'(t)$	Wachstumsverhalten des Medialen Abstands als linke Seite der Medialen Differentialgleichung.
$\varphi'(t)$	Wachstumsverhalten des geschleppten Parameters als linke Seite der Medialen Differentialgleichung.

Tabelle 4.1: Anforderungen und Ergebnisse der Medialen Differentialgleichung

zugehörigen Winkel des Berührungspunktes eines Kreises  $C$  um  $\boldsymbol{q}$ , der den Geodätischen Kreis  $\tilde{B}$  berührt (siehe Abbildung 4.12). Unter der Voraussetzung, daß  $\tilde{B}$  hinreichend nahe an  $B$  verläuft, wird daher  $\varphi_{l+1}$  eine gute Näherung von  $\varphi(t_0)$  darstellen.

## 4.6 Beispiele zur Berechnung Medialer Kurven

In diesem Abschnitt wollen wir die Methode zur Berechnung Medialer Kurven in ähnlicher Form wie zum Ende von Kapitel 3 zusammenfassen und anhand einiger numerischer Experimente konkretisieren. Zur Lösung der Medialen Differentialgleichung wurde das Verfahren nach Adams (vgl. [HW76]) in der Implementation der Numerical Algorithm Group [NAG89] eingesetzt.

Um die partiellen Ableitungen der Offsetfunktionen  $\partial_s \mathcal{O}$  und  $\partial_t \mathcal{O}$  zur Verfügung zu haben, muß für jeden Schritt des Differentialgleichungslösers die Jacobi Differentialgleichung (siehe Gleichung 3.68 auf Seite 77) gelöst werden. Daraus ergibt sich die formale Forderung nach einer  $C^3$ -stetigen Flächengeometrie, sowie nach einer  $C^3$ -stetigen Progenitorcurve.

Im folgenden ist für jede mögliche Konfiguration von Progenitorobjekten mindestens ein Beispiel einer verallgemeinerten Medialen Kurve berechnet worden. Wir beginnen mit der Medialen Kurve zweier Flächenkurven. In Abbildung 4.13 wird die gleiche  $C^2$ -stetige BSpline-Fläche betrachtet wie in Abschnitt 3.6. Als Progenitorcurven wurden ebenfalls BSpline-Kurven verwendet, beide vom Grad 3, beide zum Knotenvektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1)$ , was eine Aufteilung beider Parameterintervalle in zwei Segmente zur Folge hat. An dem Segmentübergang sind beide

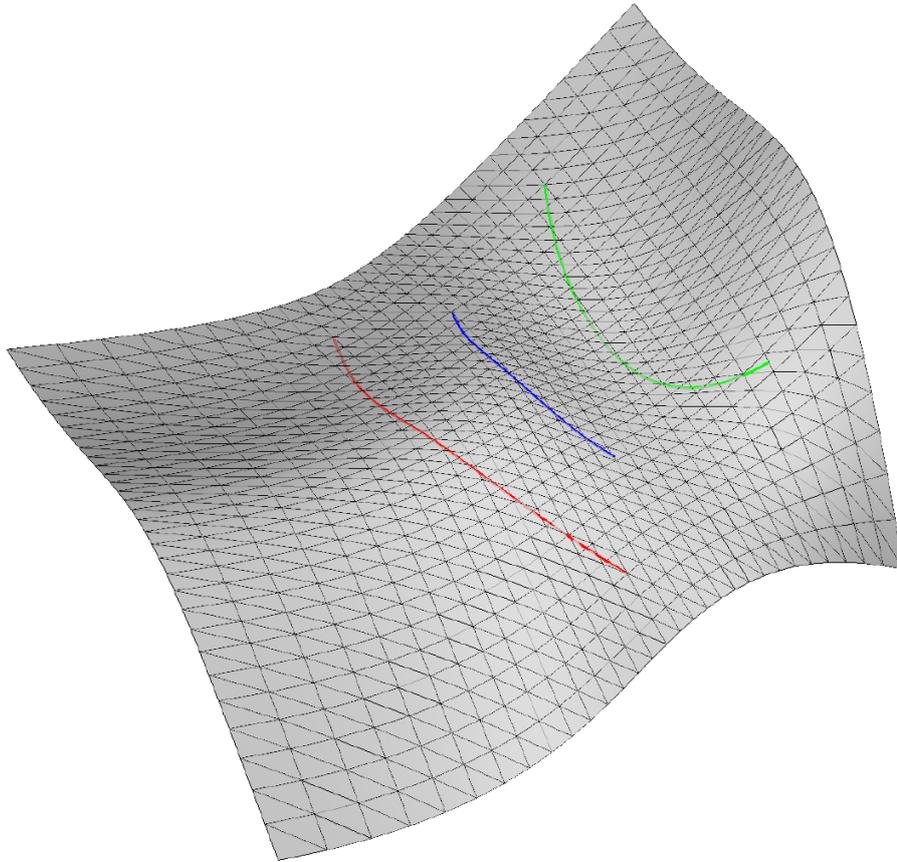


Abbildung 4.13: Mediale Kurve zweier Progenitorkurven auf einer  $C^2$ -stetigen Nurbs-Fläche

Kurven krümmungsstetig. Ihre deBoor-Kontrollpunkte sind gegeben durch

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.55 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.8 \end{pmatrix} && \text{1. Progenitorkurve (rot)} \\ & \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.6 \\ 1.8 \end{pmatrix} && \text{2. Progenitorkurve (grün).} \end{aligned}$$

Die resultierende Mediale Kurve ist in den Abbildungen 4.13 und 4.14 (zugehörige Parameterintervallkurven) in blau eingezeichnet worden. Diese Mediale bezieht sich auf das Kurvenparameterintervall  $[0.1, 0.9]$  der ersten Progenitorkurve. Obwohl es sich bei der betrachteten Fläche lediglich um eine  $C^2$ -stetige Fläche handelt, konnte die Mediale Differentialgleichung über die Segmentgrenzen der Flächen hinaus gelöst werden.

In den nächsten Beispielen werden wir die Fläche betrachten, die durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(u, v) := (u, v, \cos(u) \sin(v))^T$$

gegeben ist. Es handelt sich hierbei um eine wellenförmige Fläche, deren Gaußkrümmung in periodischen Abständen das Vorzeichen wechselt. Die folgenden Abbildungen 4.15 und 4.17 zeigen den Verlauf dieser Fläche. In allen Beispielen wurde als Parameterraum  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  gewählt. Wir betrachten zunächst weiter den Fall zweier Progenitorkurven. Zusätzlich wollen wir nun verallgemeinerte Mediale Kurven berechnen, d.h. ein anderes Abstandsverhältnis als

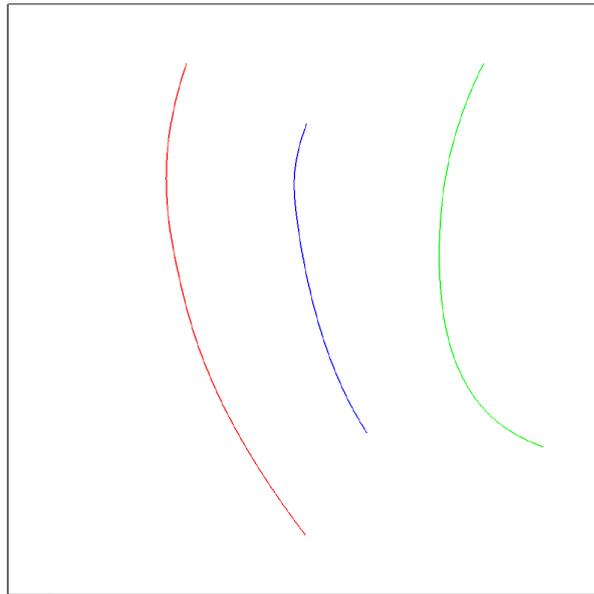


Abbildung 4.14: Parameterraumkurven der Medialen Kurve aus Abbildung 4.13

$b(t) = 1$  wählen, wie dies in Abbildung 4.13 der Fall ist. Darüberhinaus wollen wir die Genauigkeit der benutzten Methode dokumentieren. Eine Methode besteht darin, zwei sich schneidende Progenitorkurven zu betrachten. Jede verallgemeinerte Mediale Kurve muß natürlich durch diesen Schnittpunkt verlaufen. Wählt man als Anfangswert der Medialen Differentialgleichung einen Medialen Punkt, der sich hinreichend weit von dem Schnittpunkt entfernt befindet, so kann man — zumindest heuristisch — die Güte des betrachteten Verfahren daran messen, wie genau der Schnittpunkt tatsächlich gefunden wurde.<sup>3</sup>

In Abbildung 4.15 ist eine solche Konfiguration abgebildet. Die Berechnungen basieren auf zwei Flächenkurven  $\alpha$  und  $\beta$ , deren Parameterraumkurven BSpline-Kurven vom Grad 3 sind. Beide besitzen die gleichen Charakteristika, wie die in Abbildung 4.13 gezeigten Progenitorkurven. Insbesondere handelt es sich bei beiden um  $C^2$ -stetige Splines. Ihr Knotenvektor lautet wieder  $T = (0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1)$ , so daß beide zugehörigen Parameterintervalle in zwei Segmente  $[0, 1/2]$  und  $[1/2, 1]$  unterteilt werden. Ihre deBoor-Kontrollpunkte lauten

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2.2 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} && \text{1. Progenitorkurve } \alpha \text{ (rot)} \\ & \begin{pmatrix} -2.5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \end{pmatrix} && \text{2. Progenitorkurve } \beta \text{ (grün).} \end{aligned}$$

Ausgehend von diesen beiden Progenitorkurven wurden insgesamt drei Mediale Kurven zu unterschiedlichen konstanten Verhältnissen berechnet. Die blaue Flächenkurve entspricht der Medialen Kurve mit  $b = 1$ . Die Kurve in der Farbe Magenta besitzt ein Abstandsverhältnis von  $1 : 2$  zwischen erster und zweiter Progenitorkurve. Für die letzte verallgemeinerte Mediale wurde schließlich  $b = 4$  gewählt; sie wurde durch einen pinkfarbenen Verlauf gekennzeichnet. Diese

<sup>3</sup>Tatsächlich stellt die Überprüfung der berechneten Größen ein generelles Problem dieser Verfahren dar. Denn einerseits stehen Geodätische Kurven in den seltensten Fällen als geschlossene Formeln zur Verfügung. Andererseits erfolgt die Längenmessung auf Flächen längs Geodätischer Kurven, so daß eine exakte Fehlerevaluation nur mit Hilfe numerisch berechneter Geodätischer erfolgen könnte.

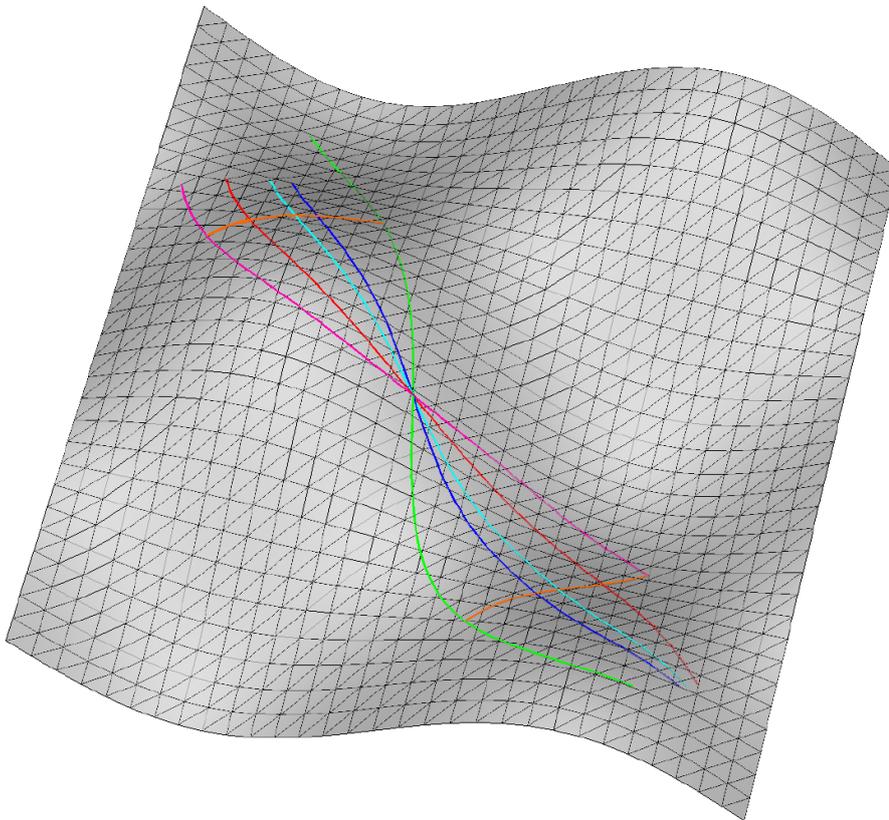


Abbildung 4.15: Verallgemeinerte Mediale Kurve zweier Kurven auf einer wellenförmigen Fläche

Farbgebung wurde in Abbildung 4.16 beibehalten, die die gesamte Situation in dem zugehörigen Parameterraum darstellt. Der Durchlaufsinne der ersten Progenitorkurve  $\alpha$  wurde (aus einem noch zu klärenden Grund) bei diesem Beispiel umgekehrt, so daß sich der Parameter  $t$  von Eins nach Null bewegt.

Zunächst fällt der scheinbar falsche Verlauf der letztgenannten, pink gefärbten Kurve auf. Sie scheint nicht nur auf der „falschen“ Seite bezüglich der ersten Progenitorkurve zu verlaufen, die Berechnung der Kurve ist auch beim Parameterwert  $t_1 = 0.175$  der ersten Progenitorkurve abgebrochen. (Dies erklärt auch die Umkehrung des Durchlaufsinns: die berechnete pinkfarbene Kurve wäre andernfalls nicht mehr durch den Schnittpunkt beider Progenitorkurven verlaufen, was jedoch Sinn dieses Beispiels war.) Zur Aufklärung des merkwürdigen Verhaltens dieser Medialen sind in den Abbildungen 4.15 und 4.16 noch vier weitere, orangefarbige Kurven vermerkt. Alle vier stellen Geodätische Kurven dar, die orthogonal zu einer der beiden Progenitorkurven starten. Das erste Paar Geodätischer startet im Punkt  $\alpha(t_0)$  bzw.  $\beta(\varphi(t_0))$ , wobei  $t_0 = 0.9$  gewählt wurde. Als zugehörigen Wert des geschleppten Parameters wurde  $\varphi(t_0) = 0.863194723460359$  numerisch ermittelt. Als Bogenlänge wurde im Fall der Geodätischen ausgehend von  $\alpha$  ein Abstand von  $s_\alpha(t_0) = 0.39972210001916$ , ausgehend von  $\beta$  jedoch  $s_\beta(t_0) = 1.5988884 \doteq 4 s_\alpha(t_0)$  gewählt.

Auf den ersten Blick erkennt man in Abbildung 4.15 kaum, daß es sich bei den hinteren orangefarbenen Kurven tatsächlich um zwei verschiedene Geodätische handelt. Dies verrät erst der Blick auf die Darstellung des Parameterraums (Abbildung 4.16). Für das zweite Paar Geodätischer wurden die Werte der Abbruchparameter  $t_1 = 0.175$  und  $\varphi(t_1) = 0.225438316067409$ ,

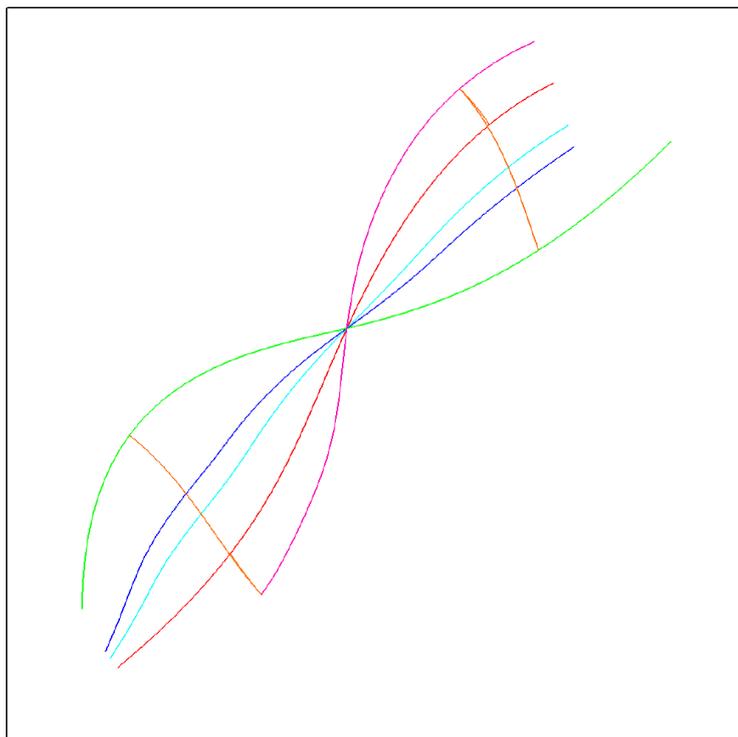


Abbildung 4.16: Parameterraumkurven der Medialen Kurve aus Abbildung 4.15

sowie die Abstände  $s_\alpha(t_1) = -0.487735210446540$  und  $s_\beta(t_1) = 4 s_\alpha(t_1)$  gewählt. Das negative Vorzeichen resultiert aus dem Durchlauf der verallgemeinerten Medialen durch den Schnittpunkt beider Progenitorkurven.

Man erkennt dreierlei. Erstens ist der Verlauf der pinkfarbenen Medialen keineswegs fehlerhaft. Das Abstandsverhältnisse  $1 : 4$  zu den Progenitorkurven  $\alpha$  und  $\beta$  stimmt in jedem Punkt der berechneten Medialen. Die berechneten Werte von  $s$  und  $\varphi$  wurden zur Überprüfung dieser Aussage benutzt, um, wie bei den beiden orange eingezeichneten Kurven, mehrere solcher Geodätischen zu berechnen, und die beiden resultierenden  $uv$ -Parametertupel zu vergleichen. Das Ergebnis war im Mittel eine Fehlernorm, die etwa bei  $10^{-7}$  lag.

Wenn man bei dieser berechneten Kurve von einem Fehler sprechen will, so liegt dieser bei der „falschen“ Wahl des Anfangswertes der Medialen Kurve. Dies die zweite angekündigte Beobachtung. Offenbar resultiert der Verlauf der pinkfarbenen Medialen aus einem medialen Startwert, welcher nicht zwischen der roten und der grünen Progenitorkurve liegt. Daß dieser gefundene Anfangswert jedoch problemgerecht gewählt wurde, also im eigentlichen Sinne nicht als falsch bezeichnet werden darf, haben wir ja bereits im letzten Absatz gezeigt. Vielmehr ist die Formulierung, daß der Startwert nicht „zwischen den beiden Progenitorobjekten liegt“ als zu menschlich (im Sinne von zu intuitiv) zu bezeichnen. Denn erstens ist es nicht trivial, dieses intuitive Verstehen von „dazwischen“ innerhalb der vorgegebenen Geometrie algorithmisch umzusetzen. Und zweitens liegt die pinkfarbene Kurve ebenfalls „zwischen“ der roten und der grünen Flächenkurve, nur eben zwischen weiter entfernten Ästen. Anhand dieses Beispiels erkennt man daher die Problematik der automatischen Anfangswertsuche. Eine sicherlich sehr gute Methode, dieser mißlichen Situation zu entfliehen, ist Benutzerinteraktion, bei der der Bedienende einen groben Anfangswert vorgeben könnte.

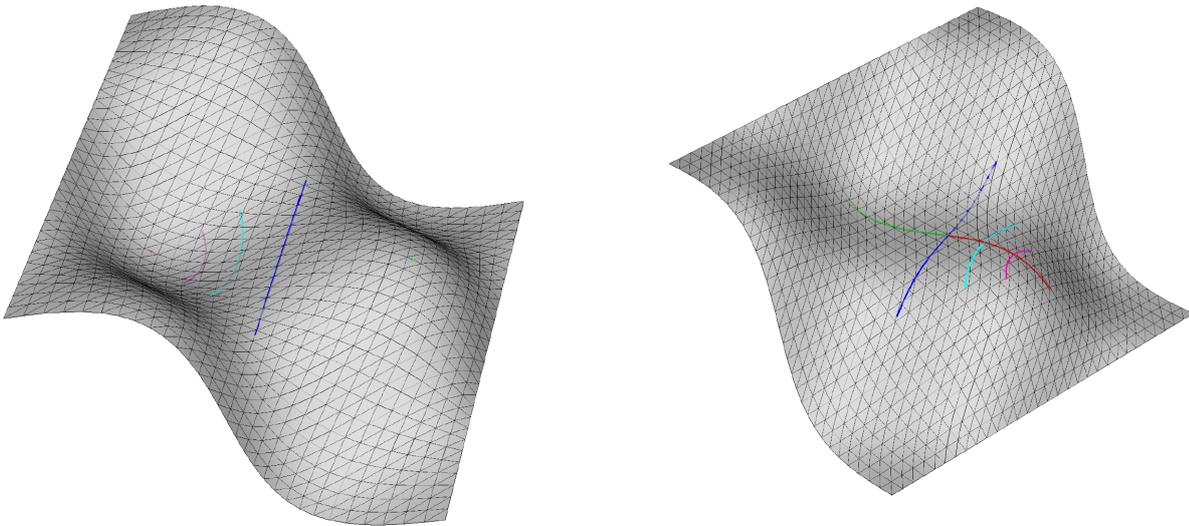


Abbildung 4.17: Mediale Kurven zweier Progenitorpunkte auf einer wellenförmigen Fläche

Die dritte Beobachtung, die mit Hilfe der orangefarbenen Geodätischen gemacht werden kann, betrifft den Grund für den Abbruch der Berechnungen. Betrachtet man das zweite Paar Geodätischer zu den Parameterwerten  $t_1$  bzw.  $\varphi(t_1)$  in Abbildung 4.16, so erkennt man, daß die Geodätischen hier (teilweise) deckungsgleiche Spuren besitzen. Nach Satz 4.1.2 ist dies allerdings eine auszuschließende Situation, da sonst die Matrix der Medialen Differentialgleichung singulär ist, die Differentialgleichung demnach nicht länger regulär bleibt. Dies ist auch der Grund für den Abbruch der Berechnungen.

Schließlich wollen wir anhand des letzten Beispiels noch die Situation im Schnittpunkt der beiden Progenitorkurven betrachten, was die eigentliche Absicht der betrachteten Konfiguration darstellte. Augenscheinlich verlaufen alle drei berechneten verallgemeinerten Medialen Kurven durch den vorgegebenen Schnittpunkt. Die berechneten numerischen Werte für den Medialen Abstand erreichen ihren kleinsten Wert mit etwa  $s = 4 \cdot 10^{-4}$  bei dem Parameterwert  $t = 0.552$ . Dies bezieht sich auf eine Auflösung von 1000 berechneten Medialen Punkten. Würde man die Anzahl der auszugebenden Medialen Punkte erhöhen, könnte man entsprechend bessere Ergebnisse erzielen. Diese Zahl bestimmt nämlich, in wieviele äquidistante Teilintervalle das Parameterintervall von  $\alpha$  unterteilt wird.

Für unsere nächsten Beispiele wollen wir die gleiche Fläche betrachten, diesmal jedoch zwei Progenitorpunkte wählen. Im ersten Fall (linke Hälfte von Abbildung 4.17) wurden die Punkte  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0, -\pi/2)$  (roter Punkt) und  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(0, \pi/2)$  (grüner Punkt) symmetrisch zueinander gewählt. Wieder sollten insgesamt vier verallgemeinerte Mediale Kurven in den Abstandsverhältnissen  $b = 1$  (blau),  $b = 2$  (magenta) bzw.  $b = 4$  (pink) berechnet werden. Der Bereich, in dem sich der tangentielle Winkel aus Sicht des ersten Progenitorpunktes bewegen sollte, wurde auf das Intervall  $[\pi/4, 3\pi/4]$  festgelegt. In dem Fall der Medialen Kurve mit  $b = 1$  erwarten wir aus Symmetriegründen eine zugehörige Parameterraumkurve, die exakt auf der  $u$ -Achse verläuft, für die also  $v = 0$  erfüllt ist (vgl. linke Hälfte von Abbildung 4.18). Unsere numerischen Experimente bestätigten auch in diesem Fall die vorgeschlagene Methode zur Berechnung Medialer Kurven. Die resultierenden  $v$ -Parameter wiesen alle einen Betrag kleiner als  $10^{-7}$  auf.

Im zweiten Beispiel zur Berechnung verallgemeinerter Medialer Kurven zwischen zwei Progenitorpunkten (rechte Hälfte von Abbildung 4.17 bzw. 4.18 wurde die gleiche Fläche betrachtet. Nun wurde eine nicht symmetrische Situation mit den Punkten  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(-0.8, -1.7)$  (rot) und

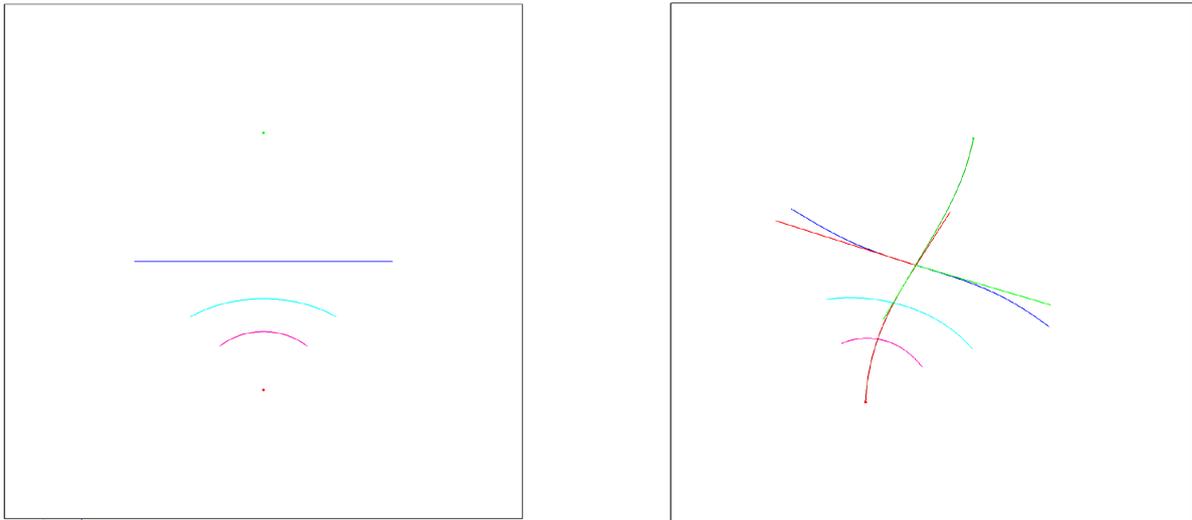


Abbildung 4.18: Parameterraumkurven der Medialen Kurven aus Abbildung 4.17

$\mathbf{q} = \mathbf{r}(0.5, 1.5)$  (grün) gewählt. Die vorgegebenen Abstandsverhältnisse betragen wieder  $b = 1$ ,  $b = 2$  und  $b = 4$ , die zu berücksichtigenden Winkelintervalle waren jeweils als  $[\pi/6, 2\pi/3]$  vereinbart. Darüberhinaus wurden in Abbildung 4.17 und 4.18 zusätzlich zwei Geodätische Kurven eingezeichnet, die, von den zugehörigen Progenitorpunkten ausgehend, in den Farben Rot bzw. Grün eingezeichnet wurden. Ihre Ausgangswinkel waren mit  $t_0 = 1.45$  bzw.  $\varphi(t_0) = 4.525$  so gewählt worden, daß sie in etwa den Parametern entsprechen, die einen minimalen Wert des Medialen Abstands induzieren (bei einer Auflösung von nur 40 berechneten Medialen Punkten). Trotz dieser sehr groben Auflösung suggeriert der visuelle Eindruck in Abbildung 4.18, daß die rote und grüne Kurve Teil der selben Geodätischen Parameterraumkurve sind, da die zugehörigen Tangenten im Medialen Punkt (bis auf ihr Vorzeichen) identisch sind. Beide Teile zusammen ergeben damit die kürzeste Verbindung zwischen den Flächenpunkten  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$ .

Als letztes Beispiel zur Berechnung Medialer Kurven betrachten wir die Situation einer Progenitorcurve und eines Progenitorpunktes in Abbildung 4.19. Die zugrundeliegende Fläche ist ein Katenoid, der durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(u, v) := (\cos(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v), v)^T \quad \text{für } 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1.$$

gegeben ist. Das erste Progenitorobjekt (rot) ist der Flächenpunkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(1, -1/2)$ . Als Flächenkurve (grün) betrachten wir zum Knotenvektor  $T = (0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1)$  die BSpline-Kurve vom Grad 3 mit den deBoor-Kontrollpunkten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -0.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.2 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Diesmal wurden die Medialen Kurven zu den Abstandsverhältnissen  $b = 1$  und  $b = 2$  berechnet. Der Winkelparameter bezüglich  $\mathbf{p}$  variiert zwischen  $\pi/12$  und  $5\pi/12$ . Die resultierenden Kurven in dem zugehörigen Parameterraum sind in Abbildung 4.20 zu erkennen.

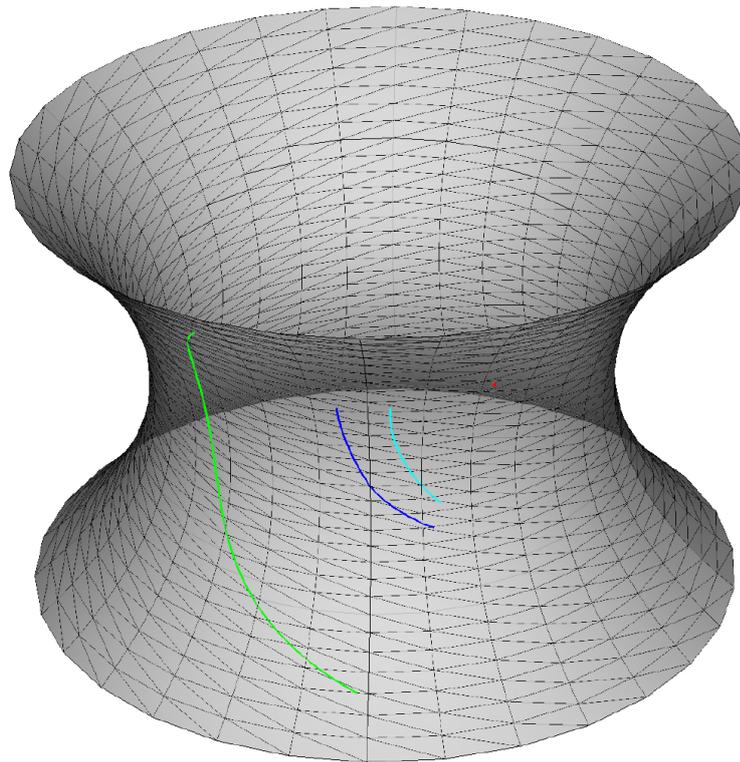


Abbildung 4.19: Mediale Kurven zu einem Flächenpunkt und einer  $\gamma$ -kurve auf einem Katenoid



Abbildung 4.20: Parameterraumkurven der Medialen Kurven aus Abbildung 4.19

## 4.7 Mediale Kurven und Geodätische Verbindungskurven

In diesem Abschnitt wollen wir kurz darüber berichten, wie das Kalkül der Medialen Kurve und des zugehörigen Medialen Abstands dazu benutzt werden kann, eine geodätische Verbindung zwischen zwei Progenitorobjekten numerisch zu bestimmen. Die einfachste Konfiguration besteht in der Vorgabe zweier Flächenpunkte  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ . In diesem Fall möchte man idealerweise die kürzeste Verbindungskurve auf der betrachteten Fläche bestimmen, die etwa in  $\mathbf{p}$  starten und im Punkt  $\mathbf{q}$  enden soll.

Die Existenz einer solchen Verbindungskurve ist im allgemeinen *nicht* gewährleistet. Hierfür betrachte man die „gelochte“ Einheitskugel, die durch Entfernen eines einzigen Punktes (etwa des Nordpols) aus der Kugel entsteht. Zur Konstruktion einer regulären Parametrisierung dieser Fläche kann übrigens die Umkehrabbildung der unter dem Namen *stereographische Projektion*

bekannten Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi : \left\{ (x, y, z)^T \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \Pi : (x, y, z)^T &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{1 - \operatorname{sign}(z)\sqrt{1-x^2-y^2}}{y} \\ \frac{y}{1 - \operatorname{sign}(z)\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

benutzt werden. Zu beliebigem  $z_0 > 0$  (nördliche Hemisphäre) ist die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten  $\mathbf{p} := (-x_0, -y_0, z_0)^T$  und  $\mathbf{q} := (x_0, y_0, z_0)^T$  im Fall der (nicht-gelochten) Sphäre das Segment des zugehörigen Großkreises, das den Nordpol enthält. Dieser gehört aber in unserem Beispiel nicht zu der betrachteten gelochten Sphäre. Das Infimum der Längen aller Verbindungskurven entspricht jedoch der Länge dieser „nicht erlaubten“, durch den Nordpol verlaufenden Flächenkurve. Da jede andere Verbindungskurve eine größere Bogenlänge besitzt, wird das Infimum durch keine Verbindungskurve der gelochten Sphäre angenommen, folglich existiert keine bogenlängenminimale, verbindende Flächenkurve.

Selbst wenn man die Existenz der kürzesten Verbindungskurve annimmt, muß diese im allgemeinen keine Geodätische Kurve sein. Betrachtet man z.B. die Flächenparametrisierung

$$\mathbf{r}(u, v) := \left( u, 1 + v u^2, 0 \right)^T \quad \text{für } -2 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1,$$

so erhält man als Fläche den Bereich der Euklidischen Ebene zwischen der  $u$ -Achse und der Parabel  $(u, 1 + u^2)^T$  für  $-2 \leq u \leq 2$ . Da dieser Bereich nicht konvex ist, gibt es Punkte, deren kürzeste Verbindung kein Geradenstück sind. Tatsächlich wird in diesem Fall die Verbindungskürzeste aus Geradenstücken und einem Abschnitt der Parabel (also des Randes der Fläche) bestehen. Man muß nun einwenden, daß es sich bei der betrachteten Fläche nicht um eine *reguläre* Fläche handelt, da der Definitionsbereich der Fläche keine offene Menge ist (vielmehr handelt es sich hierbei um eine 2-Mannigfaltigkeit mit Rand). Die resultierende Fläche bei Betrachten des Inneren des vorgegebenen Definitionsbereiches hat jedoch den gleichen Mangel wie die oben besprochene gelochte Sphäre: hier gibt es Punkte, deren Verbindungskürzeste nicht komplett innerhalb der Fläche verlaufen,

Vom mathematischen Standpunkt vermeidet man die eben angesprochenen Probleme, indem man sogenannte *vollständige* Flächen betrachtet (siehe z.B. [dC76], S. 325 ff.). Für eine vollständige Fläche kann nämlich gezeigt werden, daß für jedes Punktepaar eine bogenlängenminimale Verbindungskurve existiert, die eine Geodätische Kurve sein muß (Satz von Hopf–Rinow, z.B. in [dC76], S 333 ff.). Wie bereits zu Beginn von Abschnitt 2.2 erläutert, stellt diese Klasse parametrischer Flächen jedoch nicht die für die Anwendungen im Computer Aided Geometric Design relevante dar. Daher schwächen wir unser Ziel ab, indem wir lediglich nach Geodätischen Kurven suchen wollen, die die gegebenen Progenitorobjekte verbinden.

Handelt es sich bei der Berechnung von Geodätischen Kurven um ein Anfangswertproblem unter Vorgabe des Startpunktes und einer Startrichtung, so entspricht die Berechnung einer Geodätischen Kurve, die die Punkte  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  verbindet, dem Lösen eines Randwertproblems, wobei die Randbedingungen durch die Lage der Flächenpunkte bestimmt sind. Bekanntlich sind Randwertprobleme i.a. nicht eindeutig lösbar. Dies deckt sich auch mit unserer geometrischen Vorstellung, nach der eine solche Verbindungsgeodätische zu zwei Punkten nicht eindeutig bestimmt sein muß. Das Problem der numerischen Bestimmung der Verbindungsgeodätischen zu zwei gegebenen Flächenpunkten wurde zuletzt von Maekawa in [Mae96] untersucht. Dort wurde die Methode der Finiten Differenzen zur Lösung des zugehörigen Randwertproblems benutzt.

Die zuletzt genannte Methode beschränkt sich jedoch auf Geodätische Kurven zwischen zwei Flächenpunkten. In [KAB95] wird das Problem durch Betrachten der Niveaulinien des Geodätischen Abstands angegangen. Hierbei werden sowohl Flächenpunkte als auch abgeschlossene Teilmengen der Fläche zugelassen. Dies entspricht bereits im wesentlichen der von uns angestrebten Benutzung von Offsetkurven. Die dort weiter vorgeschlagene Methode ist jedoch auf Flächen der Form

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))^T$$

beschränkt. Ferner werden Offsetkurven nicht explizit benutzt. Sie dienen hierbei als theoretisches Hilfsmittel, um (in unserer Sprechweise) das Vektorfeld der Gradienten der Abstandsfunktion in der  $uv$ -Ebene in Abhängigkeit des Progenitorparameters und des Geodätischen Abstands auszudrücken.

Das von uns vorgeschlagene Verfahren könnte als Vertreter der *Shooting Methoden* zur Lösung des vorliegenden Randwertproblems betrachtet werden. Bei solchen Ansätzen löst man das zugehörige Anfangswertproblem, das sich in unserem Fall durch die Position eines der beiden Progenitorpunkte, sowie durch Vorgabe einer beliebigen Startrichtung der Geodätischen ergibt. In der Regel wird die so berechnete Lösung nicht in dem zweiten Progenitorpunkt enden, so daß die zweite Randwertbedingung verletzt wird. In diesem Fall ist der Prozeß zu iterieren, wofür eine neue Startrichtung zu bestimmen ist. Die Schwierigkeiten bei dieser Vorgehensweise liegen in der unbestimmten Länge der in jeder Iteration zu berechnenden Geodätischen und in dem Mangel guter Kriterien zur Anpassung der neuen Startrichtung (siehe auch [Mae96]). Ferner ist eine Verallgemeinerung für beliebige Progenitorobjekte keineswegs offensichtlich. Daher scheint bislang kein überzeugender Vertreter dieser Art von Algorithmus zur Berechnung Geodätischer Verbindungssegmente formuliert worden zu sein.

Mit Hilfe der Medialen Kurve und ihrer in Abschnitt 4.2 gezeigten Eigenschaften können die eben genannten Mängel behoben werden. Da wir Mediale Kurven nicht nur für Progenitorpunkte, sondern auch für Progenitorcurven berechnen können, läßt sich unser Verfahren auch zur Bestimmung Geodätischer Verbindungskurven zwischen Punkten und Kurven oder zwischen zwei Kurven benutzen. Unsere Methode basiert im wesentlichen auf dem folgenden Satz.

#### Satz 4.7.1

*Gegeben seien zwei Progenitorobjekte der regulären parametrischen Fläche  $S$ . Die induzierte Mediale Kurve verlaufe durch keinen Fokelpunkt bezüglich eines der Progenitorobjekte. Die bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve  $\gamma_{t_0}(\sigma s)$  (die im Fall einer Progenitorcurve in orthogonaler Richtung vom ersten Progenitorobjekt startet) endet genau dann im zweiten Progenitorobjekt (im Fall einer Progenitorcurve in zur Kurventangente orthogonaler Richtung), wenn für die Funktion des Medialen Abstands  $s'(t_0) = 0$  gilt. Die resultierende Verbindungskurve hat in diesem Fall die Länge  $2s(t_0)$ .*

#### Beweis:

Falls der Punkt der Geodätischen  $\gamma_{t_0}(\sigma L)$  Element des zweiten Progenitorobjekts ist und im Fall einer Progenitorcurve  $\sigma \gamma'_{t_0}(\sigma L)$  orthogonal zur korrespondierenden Kurventangente ist, so ist offensichtlich  $\gamma_{t_0}(\sigma L/2)$  Element der Medialen Kurve. Die zugehörige Geodätische ausgehend vom zweiten Progenitorobjekt  $\tilde{\gamma}_{\varphi(t_0)}(\tilde{\sigma} s)$  besitzt die gleiche Spur wie  $\gamma_{t_0}$  und „schneidet“ diese daher im Medialen Punkt in einem Winkel von  $\pi$ , d.h. es gilt

$$\sigma \gamma'_{t_0}(\sigma L/2) = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t_0)}(\tilde{\sigma} L/2).$$

Nach Hilfssatz 4.2.3 folgt daher  $s'(t_0) = 0$ . Ferner gilt für den Medialen Abstand  $s(t_0) = L/2$ .

Gilt umgekehrt  $s'(t_0) = 0$  für die Ableitung der Funktion des Medialen Abstands, so erhält man nach Lemma 4.2.3  $\sigma \gamma'_{t_0} = -\tilde{\sigma} \tilde{\gamma}'_{\varphi(t_0)}$ , was die Kollinearität der beteiligten Tangenten der Geodätischen Kurven im Medialen Punkt liefert. Da (bogenlängenparametrisierte) Geodätische eindeutig bestimmt sind, stimmen die Spuren beider Kurven überein und somit ist  $\gamma_{t_0}$  ein Geodätisches Verbindungssegment der Länge  $2s(t_0)$  zwischen dem ersten und dem zweiten Progenitorobjekt. ■

Der letzte Satz liefert natürlich sofort eine Idee, wie ein Algorithmus zur Bestimmung von Geodätischen Verbindungskurven formuliert werden kann. Da die Ableitung der Funktion des Medialen Abstands als rechte Seite der Medialen Differentialgleichung (4.7) berechnet werden kann, wird man die Nullstellen dieser Ableitung etwa durch ein Bisektionsverfahren bestimmen wollen. Hat man schließlich mehrere Nullstellen gefunden, so wählt diejenige aus, deren Funktionswert  $s(t_0)$  minimal ist, um so eine kürzeste Geodätische Verbindungskurve zu erhalten. Da wir eben an der kürzesten Verbindungsgeodätischen interessiert sind, erscheint es jedoch günstiger, den Medialen Abstand zu minimieren. Hierfür stehen in der Programmbibliothek der Numerical Algorithm Group [NAG89] etablierte Verfahren zur Verfügung, die im übrigen die Information der ersten Ableitung  $s'(t)$  des Medialen Abstands ausnutzen können. Eine ausführliche Übersicht bestehender Algorithmen zur Minimierung gegebener Funktionen findet man in [Fle80]. In unserer Implementation haben wir auf eine Routine der NAG zurückgegriffen, die die Methode kubischer Interpolation (ausgehend von Wert und Ableitung der betrachteten Funktion) zur approximativen Lösung des Minimierungsproblems zur Funktion  $s(t)$  in einem vorzugebendem Intervall  $a \leq t \leq b$  einsetzt (siehe auch [GM74]).

Zur Initialisierung des Verfahrens ist zunächst zu einem beliebigen Parameter  $t_0 \in [a, b]$  bezüglich des ersten Progenitorobjekts ein Tupel  $(s(t_0), \varphi(t_0))$  bestehend aus Medialem Abstand  $s(t_0)$  und geschlepptem Parameter  $\varphi(t_0)$  zu bestimmen. Dies kann, wie in Abschnitt 4.5 erläutert, mit einem Bisektionsverfahren mit anschließender Nachiteration (z.B. durch ein Newton-Verfahren) geschehen. Neben den so ermittelten Werten  $s(t_0)$  und  $\varphi(t_0)$  können durch Einsetzen in die Mediale Differentialgleichung auch die Ableitungen  $s'(t_0)$  und  $\varphi'(t_0)$  berechnet werden.

Im  $i$ -ten Iterationsschritt des Minimierers wird der Funktionsverlauf von  $s(t)$  durch kubische Interpolation geschätzt. Hierfür werden zu einem neu festzulegenden Parameter  $t_i$  die Werte  $s(t_{i-1})$ ,  $s'(t_{i-1})$ ,  $s(t_i)$  und  $s'(t_i)$  benutzt. Daher erwartet die Routine in jedem Iterationsschritt Wert und Ableitung des Medialen Abstands zum Parameter  $t_i$ . Diese Werte könnten durch Lösen der Medialen Differentialgleichung im Bereich von  $t_{i-1}$  bis  $t_i$  numerisch bestimmt werden. Um den Rechenaufwand so gering wie möglich zu gestalten, haben wir jedoch einen anderen Weg beschritten. Da mit  $s(t_{i-1})$  und  $\varphi(t_{i-1})$  Werte für den Medialen Abstand bzw. den geschleppten Parameter zum Progenitorparameter  $t_{i-1}$  vorliegen, können diese als grobe Näherungen der gesuchten Werte  $s(t_i)$  und  $\varphi(t_i)$  betrachtet werden. Daher werden sie in unserer Implementation als Startwerte der iterativen Approximation der Wurzeln von  $\mathbf{G}_{t_i}$  aus Gleichung 4.27 mit Hilfe eines Newton-Verfahrens benutzt. Sollte diese Vorgehensweise scheitern, kann anschließend versucht werden,  $s(t_i)$  und  $\varphi(t_i)$  durch Lösen der Medialen Differentialgleichung zu nähern. Die Ableitung  $s'(t_i)$  ergibt sich bei Erfolg durch Einsetzen von  $s(t_i)$  und  $\varphi(t_i)$  in das Gleichungssystem (4.7). In Tabelle 4.2 wurde das soeben vorgestellte Verfahren zusammengefaßt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch einige Beispiele unserer Berechnungen präsentieren. Da alle Berechnungen Medialer Kurven aus Abschnitt 4.6 auch als Tests der hier erläuterten Methode verstanden werden können, wollen wir uns hier auf drei Beispiele beschränken. Insbesondere in Abbildung 4.17 auf Seite 116 haben wir bereits eine Verbindungsgeodätische zwischen zwei Punkten kennengelernt, die durch einen Punkt der Medialen Kurve induziert wurde.

<b>Geodätische Verbindungskurve</b>	
Methode:	Minimierung des Medialen Abstands.
Voraussetzung:	$C^3$ -stetige Fläche, ggf. $C^3$ -stetige Flächenkurve(-n).
Anfangswerte:	Algorithmus zur Bestimmung eines einzelnen Tupels $(s(t_0), \varphi(t_0))^T$ aus Medialem Abstand und geschlepptem Parameter (vgl. Abschnitt 4.5).
Teilprobleme:	Iteratives Verfahren zur Bestimmung einer Wurzel von $\mathbf{G}_{t_i}$ (vgl. Abschnitt 4.5) Mediale Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 4.1).
Ergebnisse:	
$t_g$	Parameter bezüglich des ersten Progenitorobjekts, so daß $\gamma_{t_g}$ eine Verbindungsgeodätische ist.
$\varphi(t_g)$	Zugehöriger geschleppter Parameter bezüglich des zweiten Progenitorobjekts.
$2s(t_g)$	Länge des verbindenden Geodätischen Segments.

Tabelle 4.2: Anforderungen und Ergebnisse der Bestimmung Geodätischer Verbindungskurven

Alle Berechnungen dieses Abschnitts finden auf der zuletzt in den Beispielen von Abschnitt 4.6 betrachteten, wellenförmigen Fläche

$$\mathbf{r}(u, v) := (u, v, \cos(u) \sin(v))^T$$

statt. Wir beginnen in Abbildung 4.21 mit der Bestimmung einer Geodätischen Kurve, die zwei Flächenpunkte miteinander verbindet. In diesem Fall wurde als Parameterraum der betrachteten Fläche  $[-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$  gewählt. Die Flächenpunkte besitzen die  $uv$ -Koordinaten  $\mathbf{p} := (-\pi, -\pi/2)^T$  (roter Punkt) und  $\mathbf{q} := (\pi, -\pi/2)^T$  (grüner Punkt). Mit dieser Wahl befinden sich die Punkte auf benachbarten „Hügelspitzen“ der Fläche, so daß die gewählte Situation eine gewisse Symmetrie besitzt.

Entsprechend konnte unser Verfahren gleich zwei Verbindungsgeodätische bestimmen. In Abbildung 4.21 wurden diese in Blau und Magenta eingezeichnet. Der ermittelten Medialen Abstände betragen 3.75141544415561 bzw. 3.75141546445884, was eine Übereinstimmung bis zur siebten Nachkommastelle bedeutet. Verfolgt man eine resultierende Geodätische bis zu einer Bogenlänge, die dem Doppelten des ermittelten zugehörigen Medialen Abstands entspricht, so erreicht man idealerweise den zweiten Progenitorpunkt. Als Gütemaß des erzielten Ergebnisses haben wir daher die Differenz zwischen exakten  $uv$ -Koordinaten des zweiten Progenitorpunkts und den ermittelten Koordinaten des Endpunkts des Geodätischen Verbindungssegments betrachtet. Im Beispiel der blauen Kurve ergibt sich eine Fehlernorm von etwa  $3 \cdot 10^{-9}$ , für die magentafarbene  $7 \cdot 10^{-8}$ .

Da man ferner die jeweiligen geschleppten Parameter bezüglich des zweiten Progenitorobjekts durch unser Verfahren berechnet, kann man die zugehörigen Verbindungsgeodätischen betrachten, die von dem zweiten Flächenpunkt ausgehen. Da es sich bei dem geschleppten Parameter ebenfalls um eine approximierete Größe handelt, ist hierbei jedoch eine größere Abweichung zu

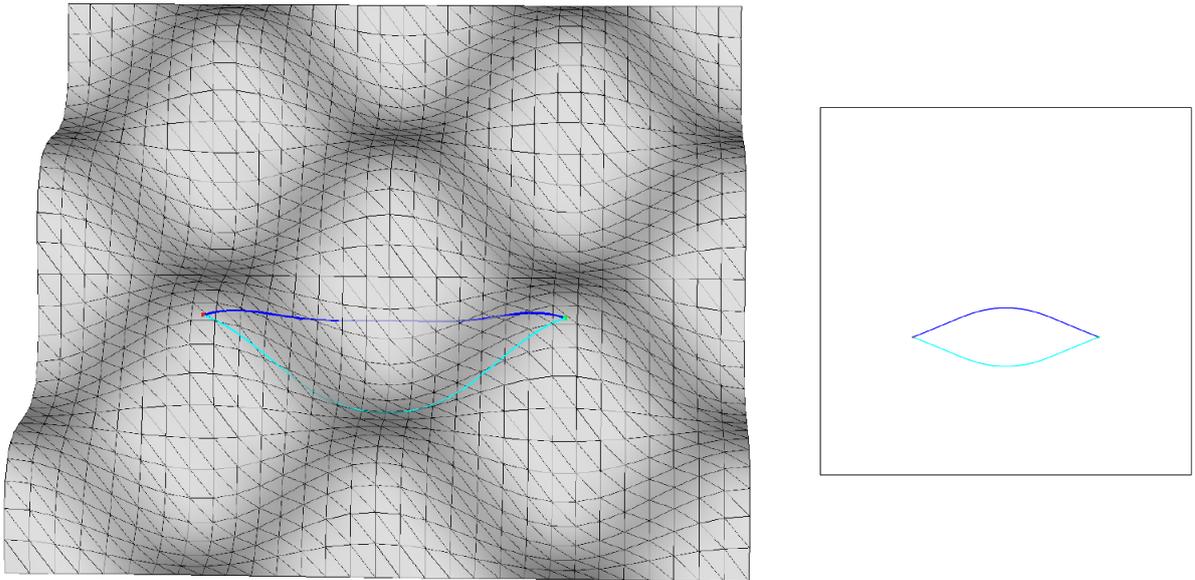


Abbildung 4.21: Verbindende Geodätische Kurve zweier Flächenpunkte

erwarten. So wundert es nicht, daß die zugehörige Fehlernorm von etwa  $10^{-7}$  im Fall der blauen Kurve etwas größer ist. Bemerkenswert ist schließlich die erfreulich geringe Anzahl der in diesem Beispiel benötigten Iterationen der Minimierungsroutine. So mußten lediglich 7 Durchläufe verwandt werden, um die Minimierung in der vorgegebenen Genauigkeit durchzuführen. (In unserem Beispiel wurde der NAG-Routine eine relative Fehlergenauigkeit von  $10^{-12}$  vorgeschrieben.) Folglich mußten insgesamt acht Tupel  $(s(t_i), \varphi(t_i))^T$  als Wurzel der Funktion  $\mathbf{G}_{t_i}$  mit Hilfe der in Abschnitt 4.5 beschriebenen Methode genähert werden.

Im nächsten Beispiel demonstrieren wir die Verwendung des beschriebenen Verfahrens zur Bestimmung von Verbindungsgeodätischen zwischen einer Flächenkurve und einem Flächenpunkt.

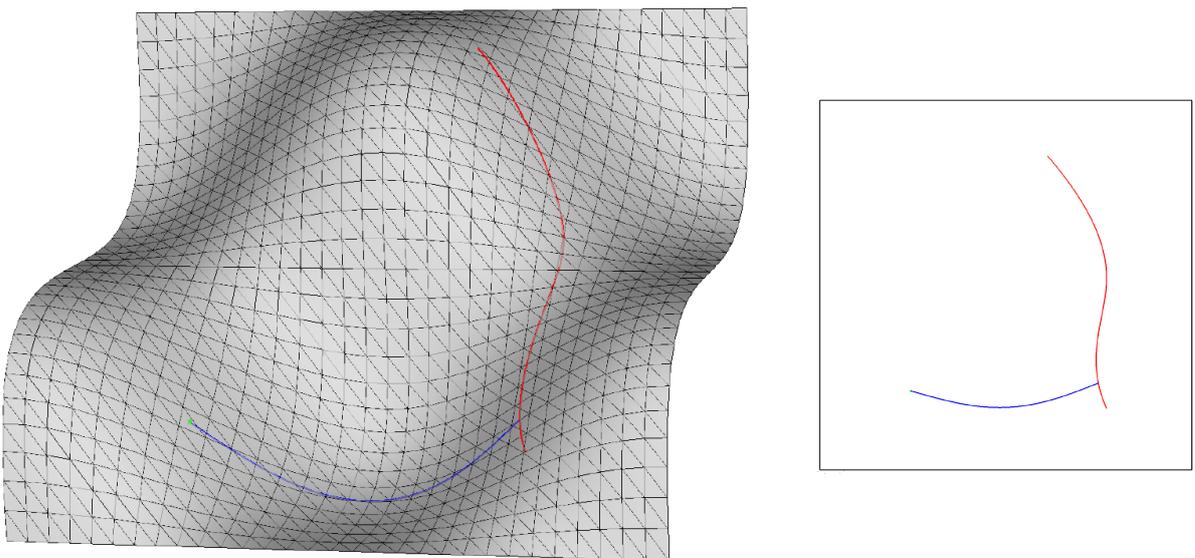


Abbildung 4.22: Verbindende Geodätische Kurve zwischen Flächenpunkt und -kurve

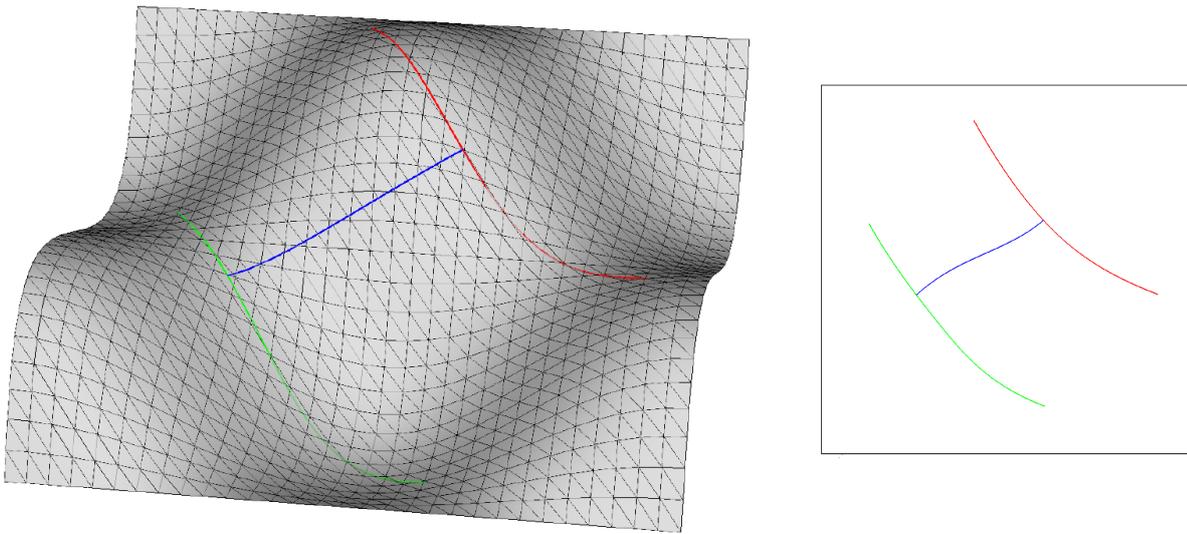


Abbildung 4.23: Verbindende Geodätische Kurve zweier Flächenkurven

Die Berechnung fand erneut auf der wellenförmigen Fläche statt, diesmal wurde als Parameterraum der Fläche  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  gewählt. Der in Abbildung 4.22 in grüner Farbe eingezeichnete Flächenpunkt besitzt die zugehörigen  $uv$ -Koordinaten  $(-1.6, -1.8)^T$ . Als erstes Progenitorobjekt (rot) wurde eine BSpline-Kurve vom Grad 3 mit Knotenvektor  $(0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1)$  und deBoor-Kontrollpunkten

$$\begin{pmatrix} 1.7 \\ -2.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

gewählt. Die berechnete Verbindungsgeodätische ist in Abbildung 4.22 in Blau eingezeichnet worden.

Als letztes Beispiel betrachten wir die in Abbildung 4.23 dargestellte Situation zweier Progenitorcurven  $\alpha$  und  $\beta$ . Wie im letzten Beispiel wurde die wellenförmige Fläche zum Parameterraum  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  betrachtet. Die Flächenkurven sind BSpline-Kurven vom Grad 3 zum Knotenvektor  $(0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1)$ . Ihre deBoor-Kontrollpunkte sind im Fall der ersten Progenitorcurve  $\alpha$  (rote Farbe) durch

$$\begin{pmatrix} 2.54558441 \\ -0.42426407 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.62634560 \\ -0.07071068 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.56568542 \\ 0.70710678 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -0.21213203 \\ 1.90918831 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.56568542 \\ 2.54558441 \end{pmatrix}$$

und für die zweite, in grün eingezeichnete Kurve  $\beta$  durch

$$\begin{pmatrix} -2.33345238 \\ 0.77781746 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.97989899 \\ 0.14142136 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.13137085 \\ -0.98994949 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -0.28284271 \\ -1.97989899 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.63639610 \\ -2.33345238 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die ermittelte Verbindungsgeodätische wurde in Abbildung 4.23 mit blauer Farbe gekennzeichnet. Die oben beschriebene Fehlernorm betrug ca.  $8 \cdot 10^{-8}$  für die Geodätische ausgehend vom ersten Progenitorobjekt und  $10^{-7}$  im Fall der von der zweiten Kurve startenden.

# Kapitel 5

## Fokalkurven

In Kapitel 4 haben wir als weitere Anwendung des Konzepts der Offsetfunktion die Möglichkeit kennengelernt, Mediale Kurven numerisch zu bestimmen. Dabei haben Fokalfunktionen der Progenitorobjekte eine entscheidende Rolle gespielt, da das Auftreten fokaler Situationen die betrachtete Differentialgleichung singular werden läßt. In diesem Kapitel wollen wir uns nun eingehender mit Fokalfunktionen befassen. Insbesondere interessiert uns eine Möglichkeit, die Menge der Fokalfunktionen zu berechnen. Dafür wird sich es als nützlich erweisen, daß wir mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 3.5 in der Lage sind, die partielle Ableitung  $(\partial/\partial t)y$  der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y(s, t)$  der Offsetkurventangenten zu bestimmen. Die Ableitung  $(\partial/\partial s)y$  ergab sich ja bereits durch Lösen der Jacobi Differentialgleichung (vgl. Satz 3.3.5).

### 5.1 Differentialgleichung Fokaler Kurven

In Definition 3.3.2 wurde bereits der Fokale Abstand eines Progenitorpunktes  $\mathbf{p}$  bzw. einer Progenitor Kurve  $\alpha$  und eines Winkel- bzw. Kurvenparameters  $t$  als der Geodätische Abstand  $s_0$  eingeführt, für den die zugehörige Offsetkurve  $\alpha_{s_0}$  im Parameter  $t$  einen singulären Punkt besitzt, d.h. für den  $\alpha'_{s_0}(t) = \mathbf{0}$  gilt. Wie bereits im Anschluß an Definition 3.3.2 erläutert, gibt es Progenitorobjekte, die keine Fokalfunktionen besitzen. Betrachtet man etwa eine Flächengeometrie, für die die Gaußkrümmung überall nicht positiv ist ( $K \leq 0$ ), so ist die Menge der Fokalfunktionen bezüglich eines beliebigen Flächenpunkts leer (siehe z.B. [dC76], S. 365 ff.).

Will man den Fokalen Abstand in einer funktionalen Abhängigkeit des Parameters  $t$  betrachten, so handelt es sich dabei also nur um eine partiell definierte Funktion. Fixiert man ferner einen Parameter  $t_0$  des Progenitorobjekts, und nimmt man ferner an, daß es einen Fokalfunktion zu diesem Parameter gibt, so ist dieser im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Auf der Einheitskugel ist etwa der zu einem beliebigen Punkt  $\mathbf{p}$  antipodische Flächenpunkt ein Fokalfunktion von  $\mathbf{p}$ . Als Fokaler Abstand kommt jedoch neben  $\pi$  jedes ungerade Vielfache von  $\pi$  in Frage. Um diesen beiden Problemen zu begegnen und den Fokalen Abstand als Funktion des Parameters des Progenitorobjekts zu betrachten, definiert man:

#### Definition 5.1.1

Sei  $\alpha(t)$  mit  $t \in I \subset \mathbb{R}$  eine Progenitor Kurve bzw.  $\mathbf{p} \in S$  ein Progenitorpunkt der gegebenen Fläche  $S$ . Die Funktion  $s_f^+ : I \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  bzw.  $s_f^+ : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ , die durch

$$s_f^+(t) := \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha'_s(t) \neq \mathbf{0} \text{ für alle } s > 0 \\ \min \{s > 0 \mid \alpha'_s(t) = \mathbf{0}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, heißt Funktion des rechtsseitigen Fokalen Abstands *des gegebenen Progenitorobjekts*  $\alpha$  bzw.  $p$ . Analog definiert man im Fall einer Progenitorcurve  $\alpha$  durch

$$s_f^-(t) := \begin{cases} -\infty & \text{falls } \alpha'_s(t) \neq \mathbf{0} \text{ für alle } s < 0 \\ \max \{s < 0 \mid \alpha'_s(t) = \mathbf{0}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

die Funktion des linksseitigen Fokalen Abstands bzgl.  $\alpha$ .

Die Unterscheidung zwischen links- und rechtsseitigem Fokalen Abstand ist natürlich nur im Fall von Progenitorkurven sinnvoll, da Geodätische Offsets von Flächenpunkten keine vernünftige Unterscheidung zwischen links- und rechtsseitigem Offsetting zulassen. Um eine bessere Intuition für die Funktion des Fokalen Abstands zu entwickeln, wollen wir zunächst die Situation in der Euklidischen Ebene betrachten. Hierfür beweisen wir den folgenden einfachen Hilfssatz.

### Lemma 5.1.2

Sei  $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, reguläre Kurve der Euklidischen Ebene. Für die Tangenten  $\alpha'_s(t)$  der zugehörigen Offsetkurven im Abstand  $s$  gilt die Identität

$$\alpha'_s(t) = (1 + k(t) s) \alpha'(t),$$

wobei  $k(t)$  die (vorzeichenbehaftete) Krümmung der Ausgangskurve  $\alpha$  bezeichnet (vgl. (2.3), Seite 22).

### Beweis:

Die (vorzeichenbehaftete) Tangentenlänge  $y_t(s)$  der Offsetkurve  $\alpha_s$  zum Parameter  $t$  genügt der Jacobi Differentialgleichung (3.31) von Seite 62. Da für die Gaußkrümmung der Ebene  $K = 0$  gilt, ergibt sich für Ebene Kurven die Differentialgleichung  $y_t'' = 0$  zu den Anfangswerten

$$y_t(0) = \|\alpha'(t)\| \quad \text{und} \quad y_t'(0) = k(t) \|\alpha'(t)\|$$

(vgl. Satz 3.3.7, Seite 64). Diese Differentialgleichung hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$y_t(s) = \|\alpha'(t)\| + k(t) \|\alpha'(t)\| s.$$

Da die Offsetkurventangente im Euklidischen Fall kollinear zu der Progenitorkurventangente des korrespondierenden Parameters ist, gilt die Identität

$$\alpha'_s(t) = y_t(s) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

aus der sich die behauptete Formel unmittelbar ergibt. ■

Nach Lemma 5.1.2 verschwindet die Offsetkurventangente  $\alpha'_s$  einer ebenen Progenitorcurve für den Abstand  $-1/k(t)$ . Für eine positive Krümmung  $k(t)$ , die bei einer Linkskurve von  $\alpha$  auftritt, liegt der Fokalfunkt daher auf der linken Seite von  $\alpha$ . Für  $k(t) < 0$  befindet sich der Fokalfunkt auf der rechten Seite der Progenitorcurve. Für ebene Kurven steht der Fokale Abstand aus Definition 5.1.1 also in einem direkten Zusammenhang mit der Kurvenkrümmung, den wir wie folgt zusammenfassen können:

$$\begin{aligned} s_f^+(t) = \infty \quad \text{und} \quad s_f^-(t) = -\frac{1}{k(t)} & \quad \text{falls } k(t) > 0 \text{ (Linkskurve),} \\ s_f^+(t) = -\frac{1}{k(t)} \quad \text{und} \quad s_f^-(t) = -\infty & \quad \text{falls } k(t) < 0 \text{ (Rechtskurve).} \end{aligned}$$

An dieser Stelle wundert man sich vielleicht über das negative Vorzeichen. Dieses ergibt sich als Konsequenz aus der Konvention, nach dem das System  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$ ,  $\mathbf{N}$  im Fall einer Progenitorcurve positiv orientiert sein soll. Unter dieser Voraussetzung einspricht rechtsseitiges Offsetting einem positiven Abstandswert  $s$ . Interpretiert man Offsetting bezüglich eines Progenitorpunktes (bei mathematisch positivem Durchlaufsinne der tangentialen Startrichtung  $t$ ) als Offsetbildung bezüglich eines Kreises mit Radius Null, so entspricht dies ebenfalls einem rechtsseitigen Offsetting. Daher ist die gewählte Orientierung von  $\gamma'_{t_0}(0)$ ,  $\alpha'(t_0)$  und  $\mathbf{N}$  zwingend, um eine Unterscheidung zwischen Progenitorkurven und Progenitorpunkten zu vermeiden.

Im Fall ebener Kurven betrachtet man zu einem Kurvenpunkt  $\alpha(t_0)$  den sogenannten *Krümmungskreis*. Sein Mittelpunkt entspricht gerade dem zugehörigen Fokalkreis  $\alpha_{s_f^+(t_0)}(t_0)$  bzw.  $\alpha_{s_f^-(t_0)}(t_0)$ , als Radius wählt man den Betrag des Fokalen Abstands  $s_f^+(t_0)$  bzw.  $-s_f^-(t_0)$ . Bekanntlich haben Kreisbögen in der Euklidischen Ebene eine konstante Krümmung, die dem Reziproken ihres Radius entspricht. Daher besitzen Krümmungskreise gerade die Krümmung  $|k(t)|$ , also (bis auf das Vorzeichen) dieselbe Krümmung, wie die betrachtete Kurve im Punkt  $\alpha(t_0)$ . In Abschnitt 5.2 werden wir feststellen, daß es im Fall beliebiger Flächen eine Analogie zu dieser Situation gibt (siehe Satz 5.2.2).

Für Wendepunkte ebener Kurven ( $k(t) = 0$ ) gilt offensichtlich  $|s_f^+(t)| = \infty = |s_f^-(t)|$ , da sich das Krümmungszentrum von  $\alpha(t)$  in diesem Fall im unendlich fernen Punkt befindet und somit kein Fokalkreis existiert. Nach Lemma 5.1.2 können wir also insbesondere für den Euklidischen Fall feststellen, daß bezüglich eines Nicht-Wendepunktes  $\alpha(t)$  *entweder* ein links- *oder* ein rechtsseitiger Fokalkreis existiert.

Für allgemeine Flächengeometrien stimmt diese Aussage nicht. Wir werden weiter unten das Beispiel der Erzeugendenkurve des Torus und der zugehörigen Menge der Fokalkreise betrachten. In diesem Fall existieren sowohl links- als auch rechtsseitige Fokalkreise bezüglich eines Kurvenpunktes. Zur Vereinfachung der Notation werden wir im folgenden Kontext dennoch immer dann auf die Unterscheidung zwischen  $s_f^+(t)$  und  $s_f^-(t)$  verzichten, wenn es nicht auf eine Differenzierung zwischen rechts- und linksseitigem Offset ankommt. Statt dessen schreiben wir  $s_f(t)$  und meinen damit eine der beiden Fokalen Abstandsfunktionen.

Um mit der in Definition 5.1.1 eingeführten Funktion des Fokalen Abstands  $s_f(t)$  besser umgehen zu können, wollen wir zunächst die Situation für einen einzelnen Fokalen Abstandswert  $s_f$  analysieren. Nach Definition 3.3.2 ist ein Fokaler Punkt eines Progenitorobjekts im Geodätischen Abstand  $s_f$  durch die Eigenschaft charakterisiert, daß die Tangente der zugehörigen Offsetkurve für den Parameterwert  $t_0$  verschwindet, d.h. daß  $\alpha'_{s_f}(t_0) = \mathbf{0}$  gilt. In Termen der vorzeichenbehafteten Längenfunktion ist dies äquivalent zu der Bedingung  $y(s_f, t_0) = 0$ . Nach Satz 3.3.8 wissen wir ferner, daß die Änderung der Tangentenlänge der Geodätischen Offsetkurven bei Variation des Geodätischen Abstands in Fokalkreisen nicht trivial ist. Mit anderen Worten sind für alle Fokalen Abstandswerte  $s_f$  die beiden Bedingungen

$$y(s_f, t_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial s} y(s_f, t_0) \neq 0$$

erfüllt. Nach dem Satz über Implizite Funktionen kann man daher den Fokalen Abstand  $s_f$  in funktionaler Abhängigkeit des Parameters  $t$  des Progenitorobjekts schreiben. Damit ist also die Existenz einer Funktion  $s(t)$  gewährleistet, für die

$$s(t_0) = s_f \quad \text{und} \quad y(s(t), t) = 0 \tag{5.1}$$

für alle  $t$  in einer gewissen Umgebung von  $t_0$  gilt. Die Funktion  $s(t)$  besitzt ferner dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie  $y$ . Setzen wir beispielsweise voraus, daß es sich bei der

betrachteten Fläche mindestens um eine  $C^2$ -stetige parametrisierte Fläche handelt, und daß im Fall einer Progenitorkurve  $\alpha$  diese ebenfalls zweimal stetig differenzierbar ist, so ist  $s(t)$  nach Satz 3.3.4 in einer Umgebung von  $t_0$  stetig. Um zu gewährleisten, daß  $s(t)$  stetig differenzierbar ist, müssen wir sowohl von der Flächenparametrisierung als auch von der Progenitorkurve dreimal stetige Differenzierbarkeit verlangen.

Fordern wir schließlich, daß der betrachtete Fokale Abstandswert  $s_f$  der betragsmäßig kleinste Fokale Abstand zum Parameter  $t_0$  ist, also  $s_f(t_0) = s_f$  erfüllt sei, so stimmt die implizit definierte Funktion  $s(t)$  aus Gleichung (5.1) lokal mit der Funktion des Fokalen Abstands aus Definition 5.1.1 überein. Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir im Gegenteil an, daß es für alle  $\varepsilon > 0$  einen Parameter  $t_0 - \varepsilon < \tau := \tau(\varepsilon) < t_0$  gibt, so daß  $|s(\tau)| > |s_f(\tau)|$  gilt, die Funktion  $s(t)$  also einen (betragsmäßig) größeren Fokalen Abstand für  $t = \tau$  liefert als der (betragsmäßig) minimale Fokale Abstand  $s_f(\tau)$ . (Daß wir in der Formulierung dieser Annahme  $\tau < t_0$  setzen, geschieht ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da man andernfalls den Durchlaufsinne des Parameterintervalls des Progenitorobjekts umkehren kann.) Für jeden Parameter  $\tau$  mit dieser Eigenschaft erhalten wir wieder eine durch Gleichung (5.1) implizit definierte Funktion  $s_\varepsilon$ , die dieselben Eigenschaften wie  $s(t)$  besitzt. Da nach Minimalitätsvoraussetzung  $s_f(t_0) = s_f = s(t_0)$  gegeben ist, muß für jedes hinreichend klein gewählte  $\varepsilon$  aufgrund der Stetigkeit von  $s$  und  $s_\varepsilon$  die Identität  $s_\varepsilon(t_0) = s_f = s(t_0)$  erfüllt sein. Mit anderen Worten ist  $s_f(t)$  stetig in einer Umgebung von  $t_0$  und es gilt  $\lim_{\tau \nearrow t_0} s_f(\tau) = s(t_0)$ .

Denkbar wäre nun noch die Existenz einer Funktion  $s_\varepsilon(t)$ , die  $s(t)$  in  $t_0$  schneidet, oder gar daß  $s(t_0)$  einen Bifurkationspunkt der Menge aller Fokalpunkte induziert. Beide Möglichkeiten können aber mit Hilfe des Satzes über Implizite Funktionen ausgeschlossen werden. Dieser garantiert für alle  $t$  der Umgebung, in der  $s(t)$  definiert ist, daß  $s(t)$  die einzige Lösung von  $y(s, t) = 0$  in einer Umgebung von  $s_f$  ist. (Die hier benutzte Formulierung des Satzes über Implizite Funktionen findet man z.B. in [Heu95], S. 292 ff.) Im Widerspruch zur Annahme stimmt daher für jedes hinreichend klein gewählte  $\varepsilon$  die Funktion  $s_\varepsilon(t)$  mit  $s(t)$  überein. Damit haben wir insbesondere gezeigt, daß unter der Voraussetzung einer zweimal stetig differenzierbaren Fläche (und Progenitorkurve)  $s_f(t) = s(t)$  stetig ist.

Interessant ist auch der Definitionsbereich der Funktion  $s(t)$ . Betrachtet man die Menge aller Parameter  $t$  des Progenitorobjekts, für die ein links- bzw. rechtsseitiger Fokalpunkt existiert (d.h. für die  $|s_f(t)| < \infty$  gilt), so stellt man fest, daß es sich hierbei um die Vereinigung mehrerer disjunkter Teilintervalle des Parameterintervalls von  $\alpha$  (oder im Fall eines Progenitorpunktes  $\mathbf{p}$  von  $[0, 2\pi]$ ) handeln kann. Ist nun  $t_0$  ein beliebiger Parameter, für den ein Fokalpunkt existiert, so liefert der Satz über Implizite Funktionen die Existenz der stetig differenzierbaren Darstellung  $s(t)$  von  $s_f(t)$  zunächst nur in einer Umgebung von  $t_0$ . Da jedoch  $(\partial/\partial s)y(s(t), t)$  nach Satz 3.3.8 nicht verschwindet, kann  $s(t)$  auf der ganzen Zusammenhangskomponente von  $t_0$  fortgesetzt werden. Damit ist der Definitionsbereich von  $s(t)$  das komplette Teilintervall, das  $t_0$  enthält. Mit anderen Worten gilt die Darstellung der Funktion des (links- bzw. rechtsseitigen) Fokalen Abstands  $s_f(t) = s(t)$  als durch Gleichung 5.1 implizit definierte Funktion für alle Parameter  $t$ , für die ein Fokalpunkt existiert ( $|s_f(t)| < \infty$ ).

Die Bemerkungen des letzten Absatzes sollten jedoch nicht mißverstanden werden. Zwar schließt der Satz über Implizite Funktionen zusammen mit Satz 3.3.8 die Existenz isolierter Parameterwerte  $t_0$  mit  $|s_f(t_0)| < \infty$  aus. Mit anderen Worten existiert für jeden Parameter  $t_0$ , für den ein Fokalpunkt existiert, eine Umgebung  $I$ , so daß  $|s_f(t)| < \infty$  für alle  $t \in I$  gilt. Der zugehörige Fokalpunkt kann allerdings durchaus ein isolierter Punkt sein, wie das oben beschriebene Beispiel der Sphäre zeigt. Wir fassen die bislang erzielten Resultate zunächst in dem folgenden Hilfssatz zusammen.

**Lemma 5.1.3**

Sei  $S$  eine mindestens zweimal bzw. dreimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $\mathbf{p} \in S$  ein gegebener Progenitorpunkt bzw.  $\alpha \subset S$  eine  $C^2$ - bzw.  $C^3$ -stetige Progenitorkurve. Sei  $t_0$  ein Parameter des Progenitorobjekts, für den ein links- bzw. rechtsseitiger Fokalfunkt existiert, d.h. für den  $s_f^+(t_0) < \infty$  bzw.  $s_f^-(t_0) > -\infty$  erfüllt ist. Ferner bezeichne  $I \ni t_0$  das maximale Teilintervall des Definitionsbereichs des Progenitorobjekts, so daß  $s_f^+(t) < \infty$  bzw.  $s_f^-(t) > -\infty$  für alle  $t \in I$  erfüllt ist. Dann existiert eine in ganz  $I$  definierte, stetige bzw. stetig differenzierbare Funktion  $s(t)$ , die Gleichung (5.1) genügt. Diese implizit definierte Funktion  $s(t)$  stimmt für alle  $t \in I$  mit  $s_f(t)$  überein.

Zur Berechnung der Ableitung der Funktion des Fokalen Abstandes differenzieren wir Gleichung (5.1) nach dem Progenitorparameter  $t$ . Mit Hilfe der Kettenregel erhält man so

$$\frac{d}{dt} \left[ y(s(t), t) \right] = s'(t) \frac{\partial}{\partial s} y(s(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} y(s(t), t).$$

Zu beachten bei der letzten Gleichung ist allerdings, daß man die Existenz einer stetigen partiellen Ableitung  $(\partial/\partial t)y$  nur unter der Annahme garantieren kann, daß die Parametrisierungen der betrachteten Fläche  $S$  und der Progenitorkurve  $\alpha$   $C^3$ -stetig sind. Wählt in dieser Gleichung als Anfangswert  $s(t_0) = s_f(t_0)$ , also den (links- oder rechtsseitigen) Fokalen Abstand des Progenitorparameters  $t_0$ , so garantiert Satz 3.3.8  $(\partial/\partial s)y(s(t), t) \neq 0$ , da die Veränderung der Tangentenlänge von Offsetkurven in Richtung der Geodätischen Kurve für alle Fokalfunkte von Null verschieden ist. Daher gewinnt man aus der letzten Gleichung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s'_f(t) = - \frac{\frac{\partial}{\partial t} y(s_f(t), t)}{\frac{\partial}{\partial s} y(s_f(t), t)}, \quad (5.2)$$

die für alle  $t \in I$  des in Lemma 5.1.3 definierten Teilintervalls  $I$  um den Anfangsparameter  $t_0$  gültig ist. Mit den in Kapitel 3, insbesondere Abschnitt 3.5 erläuterten Techniken sind wir in der Lage, die partiellen Ableitungen  $(\partial/\partial s)y$  und  $(\partial/\partial t)y$  der vorzeichenbehafteten Funktion der Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven durch Lösen der gestörten Jacobi Differentialgleichung zu berechnen (siehe auch Abschnitt 3.6). Daher kann man die Differentialgleichung (5.2) durch etablierte numerische Verfahren behandeln. Die Berechnung der partiellen Ableitung  $(\partial/\partial t)y$  mit Hilfe der gestörten Jacobi Differentialgleichung verlangt allerdings von  $S$  wie von  $\alpha$  eine viermal stetige Differenzierbarkeit.

Um die Funktion des Fokalen Abstandes  $s_f$  lokal als Lösung der Differentialgleichung (5.2) zu erhalten, ist es essentiell, als Anfangswert  $s(t_0) = s_f(t_0)$  zu wählen. Für einen beliebigen Anfangswert  $s(t_0) = s_0$  ergibt sich eine Lösungsfunktion  $s(t)$ , für die  $y(s(t), t) = y_0 := y(s_0, t_0)$  gelten würde. Eine solche Lösung entspricht einer Niveaulinie der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y(s, t)$ . Daher muß man für die numerische Behandlung der Differentialgleichung (5.2) zunächst den Fokalen Abstand zu einem gegebenen Parameter  $t_0$  approximieren. Dieses Problem wird in Abschnitt 5.3 behandelt.

Mit Hilfe der Fokalen Abstandsfunktion können wir die zugehörige induzierte Flächenkurve

$$\omega(t) := \omega_{t_0}(t) := \mathbf{r}(\mathcal{O}(s_f(t), t)) \quad (5.3)$$

eingeführen und (nach Lösen von (5.2)) berechnen. Für eine  $C^2$ -stetige Fläche und Progenitorkurve ist die Funktion des Fokalen Abstandes  $s_f(t)$  nach Lemma 5.1.3 stetig, so daß  $\omega$  unter

dieser Voraussetzung eine stetig parametrisierte Kurve ist. Definitionsgemäß durchläuft diese Kurven zum Zeitpunkt  $t$  einen Fokalpunkt des Progenitorobjekts, falls  $s_f(t) < \infty$  gilt. Daher nennen wir  $\omega$  die (lokale) Fokalkurve des betrachteten Progenitorobjekts in einer Umgebung des Fokalpunkts  $\mathbf{r}(\mathcal{O}(s_f(t_0), t_0))$ . Streng genommen handelt sich hierbei um zwei voneinander zu unterscheidende Fokalkurven: Einer rechtsseitigen ( $s_f(t) = s_f^+(t)$ ) und einer linksseitigen ( $s_f(t) = s_f^-(t)$ ). Dennoch werden wir häufig von der Fokalkurve einer Progenitorkurve reden, um die Sprechweise möglichst einfach zu halten. Da  $s_f(t)$  unter der Voraussetzung einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche (und Progenitorkurve) stetig differenzierbar ist, ergibt sich die Tangente der Fokalkurve durch die Beziehung

$$\begin{aligned}\omega'(t) &= (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \left\{ s_f' \partial_s \mathcal{O} + \partial_t \mathcal{O} \right\} \\ &= s_f'(t) \gamma_t'(s_f(t)) + \alpha'_{s_f(t)}(t) \\ &= s_f'(t) \gamma_t'(s_f(t)),\end{aligned}\tag{5.4}$$

da nach Definition 3.3.2  $\alpha'_{s_f(t)}(t) = \mathbf{0}$  gilt. Die Geodätische Kurve  $\gamma_t$  berührt demnach die Fokalkurve im Fokalpunkt  $\omega(t)$ . Diese und weitere Eigenschaften der Fokalkurve  $\omega(t)$  fassen wir in den nachfolgenden Hilfssätzen zusammen.

#### Lemma 5.1.4

Sei  $S$  eine  $C^2$ - bzw.  $C^3$ -stetige, parametrische Fläche. Die durch (5.3) gegebene lokale Fokalkurve  $\omega(t)$  bezüglich eines Progenitorpunkts  $\mathbf{p} \in S$  bzw. einer (zwei- bzw. dreimal stetig differenzierbaren) Progenitorkurve  $\alpha \subset S$  ist für alle  $t \in I$  eine stetige bzw. stetig differenzierbare Kurve. Ihre Tangente ist durch Gleichung (5.4) gegeben. Daher ist  $\omega(t)$  genau dann ein singulärer Punkt der Fokalkurve, wenn  $s_f'(t) = 0$  gilt. Ein singulärer Punkt  $\omega(t_e)$  ist genau dann eine Spitze der Fokalkurve, wenn  $s_f(t_e) = s_f^+(t_e)$  ein lokales Minimum bzw.  $s_f(t_e) = s_f^-(t_e)$  ein lokales Maximum des fokalen Abstands ist.

#### Beweis:

Es verbleibt, die Eigenschaften singulärer Punkte von  $\omega$  zu zeigen. Offenbar liegt nach Gleichung (5.4) genau dann ein singulärer Punkt  $\omega(t)$  vor, wenn  $s_f'(t) = 0$  gilt. Mit  $s_f(t_e)$  liegt genau dann ein lokales Extremum vor, wenn in  $t_e$  ein Vorzeichenwechsel der Ableitung  $s_f'$  stattfindet. Für das Vektorfeld der normierten Tangenten der Fokalkurve gilt in diesem Fall aufgrund der Stetigkeit des Vektorfeldes  $\gamma_t'(s_f(t))$  der Geodätischen Tangenten

$$\begin{aligned}\lim_{t \nearrow t_e} \frac{\omega'(t)}{\|\omega'(t)\|} &= \left( \lim_{t \nearrow t_e} \text{sign}(s_f'(t)) \right) \gamma_t'(s_f(t_e)) \\ &= - \left( \lim_{t \searrow t_e} \text{sign}(s_f'(t)) \right) \gamma_t'(s_f(t_e)) = - \lim_{t \searrow t_e} \frac{\omega'(t)}{\|\omega'(t)\|}.\end{aligned}$$

Daher ist  $\omega(t_e)$  genau dann eine Spitze der Fokalkurve, wenn für  $s_f'(t_e) = 0$  gleichzeitig ein Vorzeichenwechsel von  $s_f'$  auftritt. ■

#### Lemma 5.1.5

Für den Parameter  $t_0$  gelte  $s_f'(t_0) \neq 0$ . Dann entspricht der Betrag der Funktion des fokalen Abstands  $s_f(t)$  in einer Umgebung von  $t_0$  dem Bogenlängenparameter der zugehörigen Fokalkurve  $\omega(t)$ .

**Beweis:**

Da nach Voraussetzung  $s'_f(t_0) \neq 0$  gilt, gibt es aufgrund der Stetigkeit von  $s'_f$  ein offenes Intervall  $t_0 \in I$ , so daß für alle  $t \in I$  ebenfalls  $s'_f(t) \neq 0$  erfüllt ist. Für alle  $t \in I$  besitzt das Segment der Fokalkurve  $\omega$  von  $\omega(t_0)$  bis  $\omega(t)$  nach (5.4) die Bogenlänge

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|\omega'(\tau)\| d\tau &= \int_{t_0}^t |s'_f(\tau)| \|\gamma'_\tau(s_f(\tau))\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^t |s'_f(\tau)| d\tau \\ &= \|s_f(t) - s_f(t_0)\| \end{aligned} \quad (5.5)$$

Daher entspricht der Betrag der Differenz der Fokalen Abstände der Bogenlänge des betrachteten Segments. ■

## 5.2 Fokalfunkte und Geodätische Krümmungskreise

Bevor wir uns in den nachfolgenden Abschnitten eingehender mit der Berechnung von Fokalcurven beschäftigen, soll in diesem Abschnitt eine Analogie der Geodätischen Krümmung einer Flächenkurve mit der (vorzeichenbehafteten) Krümmung einer Kurve der Euklidischen Ebene herausgearbeitet werden. Um die angestrebten Ergebnisse möglichst mit den bislang benutzten Methoden zu erzielen und so ein besseres Verständnis für die geometrische Situation zu erhalten, wollen wir uns erneut mit der Jacobi Differentialgleichung aus Satz 3.3.5, Seite 62 befassen.

**Lemma 5.2.1**

Sei  $y$  eine Lösung der Jacobi Differentialgleichung  $y'' + Ky = 0$  zu einer gegebenen, nicht trivialen Funktion  $K := K(s)$  der reellen Veränderlichen  $s$ , die  $y \neq 0$  genügt. Dann gilt

- (a) Es gibt ein nicht-leeres Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , für das  $y(s) \neq 0$  für alle  $s \in I$  gilt. In diesem Intervall ist die Funktion

$$z(s) := \frac{y'(s)}{y(s)}$$

definiert und genügt der Differentialgleichung

$$z' = z^2 - K. \quad (5.6)$$

- (b) Es gibt ein nicht-leeres Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ , so daß  $y'(s) \neq 0$  für alle  $s \in J$  erfüllt ist. Ferner ist die Funktion

$$\zeta(s) := \frac{y(s)}{y'(s)}$$

für alle  $s \in J$  definiert und genügt der Differentialgleichung

$$\zeta' = K\zeta^2 + 1. \quad (5.7)$$

**Beweis:**

Da  $y$  nach Voraussetzung nicht die triviale Funktion ist, gibt es ein Intervall  $I$ , in dem  $y$  keine Nullstelle besitzt. Unter der zusätzlichen Annahme, daß die Funktion  $K(s)$  nicht trivial ist, kann die Funktion  $y$  als Lösung der Jacobi Differentialgleichung nicht konstant sein. Daher gibt es ein Intervall  $J$ , für das  $y'(s) \neq 0$  für alle  $s \in J$  erfüllt ist.

Für die oben definierte Funktion  $z$  gilt nach der Quotientenregel

$$z' = \frac{d}{ds} \left[ \frac{y'}{y} \right] = \frac{y'' y - (y')^2}{y^2}.$$

Da  $y$  nach Voraussetzung Lösung der Jacobi Differentialgleichung ist, gilt  $y'' = -Ky$ . Daher erhält man

$$z' = -\frac{Ky^2 + (y')^2}{y^2} = -K + \left( \frac{y'}{y} \right)^2 = z^2 - K.$$

Analog ergibt sich durch Differenzieren der Definition der Funktion  $\zeta$

$$\zeta' = \frac{d}{ds} \left[ \frac{y}{y'} \right] = \frac{(y')^2 - y y''}{(y')^2} = K \zeta^2 + 1,$$

womit Teil (b) der Aussage bestätigt wurde. ■

Für unsere Zwecke ist Lemma 5.2.1 natürlich im Zusammenhang mit Offsetkurven und ihren Tangentenlängen von Interesse. Hier entspricht  $K(s)$  der Gaußkrümmung der betrachteten Fläche  $S$  entlang einer Geodätischen Kurve, die von einem Progenitorobjekt ausgeht. Mit Ausnahme von ebenen Bereichen, die eine triviale Gaußkrümmung induzieren, bedeutet die Annahme  $K \not\equiv 0$  keine Einschränkung. Für  $K \equiv 0$  ergibt sich eine (affin-) lineare Lösungsfunktion  $y$  der Jacobi Differentialgleichung, was (wie wir weiter unten sehen werden) dem Verhalten der Längenfunktion  $y$  im Fall der Euklidischen Ebene entspricht. Daher kann die Funktion  $\zeta$  in den meisten für uns interessanten Fällen betrachtet werden kann. Nach Satz 3.3.7 entspricht der Wert der Funktion  $z(s)$  der Geodätischen Krümmung der Geodätischen Offsetkurve im Abstand  $s$  (falls rechtsseitige Offsets betrachtet werden).

Die rechte Seite der Differentialgleichungen (5.6) bzw. (5.7)

$$f(s, z) := (z(s))^2 - K(s) \quad \text{bzw.} \quad g(s, \zeta) := K(s) (\zeta(s))^2 + 1$$

genügen in  $I \times \mathbb{R}$  bzw.  $J \times \mathbb{R}$  einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl.  $z$  bzw.  $\zeta$ , falls wir etwa voraussetzen, daß die Funktion  $K(s)$  beschränkt ist. Für unsere Anwendung entspricht  $K(s)$  der Gaußkrümmung der Fläche  $S$  entlang  $\gamma_{t_0}$ . Aus diesem Grund stellt die Forderung der Beschränktheit von  $K$  bei den in unseren Untersuchungen betrachteten Flächen keine Einschränkung dar, da  $S$  stets beschränkt ist.

In der Formulierung von Lemma 5.2.1 bezeichnet  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges offenes Intervall; im Hinblick auf unsere Anwendung können wir  $I$  bereits als Teilintervall des Parameterbereichs von  $\gamma_{t_0}$  deuten. Aufgrund der lokalen Lipschitzbedingung können wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $z$  des zu (5.6) gehörigen Anfangswertproblems folgern (vgl. [Wal93], S. 60 ff.). Zu beachten ist, daß dies eine lokale Existenzaussage ist. In der Tat erwarten wir aus unserer Sichtweise eine Polstelle der Funktion  $z$  für Fokalfunkte der Progenitor Kurve. Beim Auftreten einer solchen Polstelle kann die Differentialgleichung (5.6) natürlich nicht weiter betrachtet werden; die (lokale) Lösung  $z(s)$  für  $s \in I$  kann nicht über eine Polstelle hinaus fortgesetzt werden.

Die Jacobi Differentialgleichung hat im Vergleich zu der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (5.6) den Vorteil, daß sie auch in einer Fokalen Situation Gültigkeit besitzt. Ihre Lösung  $y$  ist auch jenseits eines Parameters  $s$  mit  $y(s) = 0$  definiert. Allerdings gelten analoge Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das zu (5.7) gehörige Anfangswertproblem aus den gleichen Gründen, die oben angeführt wurden. Die Polstellen der Lösungsfunktion  $\zeta$  treten hier für Nullstellen  $y'(s) = 0$  auf.

Da nach Satz 3.3.8  $y'(s) \neq 0$  für Fokalfunkte ( $y(s) = 0$ ) gelten muß, ist es prinzipiell möglich, vor Auftreten einer Fokalen Situation von Differentialgleichung (5.6) zu Gleichung (5.7) zu wechseln. Damit bräuchte man lediglich Differentialgleichungen erster Ordnung zu behandeln, was einem Vorteil in Bezug auf die Komplexität des Problems bedeuten würde. Allerdings müßte für eine solche Strategie die Frage nach dem richtigen Zeitpunkt des Wechsels von (5.6) nach (5.7) (vor einer Nullstelle  $y(s) = 0$ ) bzw. von (5.7) nach (5.6) (vor  $y'(s) = 0$ ) noch geklärt werden.

Die Wahl des richtigen Anfangswerts für Differentialgleichung (5.6) stellt im Zusammenhang mit Geodätischen Offsetkurven von Progenitorkurven  $\alpha$  kein Problem dar. Nach Satz 3.3.7 gilt für alle  $s$  mit  $y_{t_0}(s) \neq 0$

$$y'_{t_0}(0) = \kappa_g(t_0) \|\alpha'(t_0)\|,$$

wobei  $\kappa_g(t_0)$  die Geodätische Krümmung der Progenitorkurve zum Parameter  $t_0$  bezeichnet. Da  $\alpha$  nach Voraussetzung regulär ist, also  $y_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\| \neq 0$  gilt, ergibt sich der Anfangswert von  $z$  im Fall von Progenitorkurven durch

$$z(0) = \frac{y'_{t_0}(0)}{y_{t_0}(0)} = \kappa_g(t_0).$$

Gilt ferner  $\kappa_g(t_0) \neq 0$ , so ist der Anfangswert der Differentialgleichung (5.7) entsprechend  $\zeta(0) = \kappa_g(t_0)^{-1}$  zu wählen. Falls jedoch  $\alpha$  im betrachteten Punkt triviale Geodätische Krümmung besitzt, würde man zunächst nur Gleichung (5.6) behandeln können. Wenn sich im Laufe der numerischen Behandlung von (5.6) die Situation  $z(s) > C_z$  mit einer geeignet zu wählenden Konstanten  $C_z$  einstellt, so ist es möglich  $\zeta(s) = z(s)^{-1}$  als Anfangswert von (5.7) zu übernehmen. Damit könnte dann ein Wechsel von Differentialgleichung (5.6) zu (5.7) stattfinden.

Handelt es sich bei dem betrachteten Progenitorobjekt um einen Flächenpunkt  $\mathbf{p}$ , so gilt nach Hilfssatz 2.4.2 von Seite 32 für die Anfangswerte der Jacobi Differentialgleichung  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$ . In diesem Fall kann also Differentialgleichung (5.6) nicht für  $s = 0$  betrachtet werden, da  $z(0)$  nicht definiert ist. Andererseits kann man zu dem Anfangswert

$$\zeta(0) = \frac{y(0)}{y'(0)} = 0$$

die Differentialgleichung (5.7) numerisch lösen. Gilt später für ein gewisses  $s$   $\zeta(s) > C_\zeta$  mit einer geeigneten Konstante  $C_\zeta$ , so kann wieder ein Wechsel zwischen den betrachteten Differentialgleichungen stattfinden.

Da die Wahl der Konstanten  $C_z$  bzw.  $C_\zeta$  keineswegs offensichtlich ist, also kein kanonisches Kriterium für die Wechsel zwischen den betrachteten Differentialgleichungen vorliegt, haben wir in unserer Implementation auf die klassische Jacobi Gleichung zurückgegriffen, auch wenn dies einen höheren Rechenaufwand bedeutet. Die Umformulierung des Problems durch Differentialgleichung (5.6) bzw. (5.7) wird sich jedoch für theoretische Zwecke als hilfreich erweisen.

### Satz 5.2.2

Sei  $\alpha(t)$  eine mindestens dreimal stetig differenzierbare, reguläre Flächenkurve der  $C^3$ -stetigen, parametrischen Fläche  $S$ . Die Geodätische Kurve  $\gamma_{t_0}(s)$  starte für  $s = 0$  in orthogonaler Richtung zu  $\alpha'(t_0)$ , so daß das System  $\gamma'_{t_0}(0), \alpha'(t_0), \mathbf{N}$  positiv orientiert ist. Der Geodätische Offsetpunkt  $\gamma_{t_0}(s_f)$  ist genau dann ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0)$ , wenn der Geodätische Offset um den Punkt  $\gamma_{t_0}(s_f)$  zum Abstand  $|s_f|$  im gemeinsamen Punkt  $\alpha(t_0)$  die Geodätische Krümmung  $-\text{sign}(s_f) \kappa_g^{(\alpha)}(t_0)$  besitzt (also im wesentlichen die gleiche Krümmung hat wie  $\alpha$ ).

**Beweis:**

Zur Vereinfachung der Argumentation setzen wir zunächst  $s_f > 0$  (rechtsseitiges Offsetting) voraus. Der Beweis für  $s_f < 0$  kann durch Umkehrung des Durchlaufsinns von  $\alpha$  und anschließender rechtsseitiger Offsetbetrachtung auf diesen Fall zurückgeführt werden. Die behauptete Aussage folgt dann aus der Tatsache, daß sich bei der Änderung der Orientierung von  $\alpha$  auch das Vorzeichen der Geodätischen Krümmung ändert.

Wir bezeichnen mit  $y_{t_0}^{(1)}(s)$  die vorzeichenbehaftete Tangentenlänge der Offsetkurve  $\alpha_s$  im Geodätischen Abstand  $s$  zu der Progenitorkurve  $\alpha$  zum Parameterwert  $t_0$ . Für einen festen, aber beliebigen Geodätischen Abstand  $s_f > 0$  sei die Offsetkurve zu dem Flächenpunkt  $\gamma_{t_0}(s_f)$  im Abstand  $\rho > 0$  mit  $\beta_\rho$  bezeichnet. Die Tangentenlänge dieses Offsets sei durch  $y_{t_0}^{(2)}(s)$  beschrieben, wobei der Parameter  $s$  durch  $s = s_f - \rho$  gegeben sei. Mit dieser Wahl von  $s$  beschreiben die Funktionswerte  $y_{t_0}^{(1)}(s)$  und  $y_{t_0}^{(2)}(s)$  die (vorzeichenbehafteten) Tangentlängen von  $\alpha_s$  bzw.  $\beta_\rho$  in demselben Punkt der betrachteten Geodätischen Kurve, nämlich in  $\gamma_{t_0}(s)$ . Ferner sind beide Funktionen nicht-triviale Lösungen der Jacobi Differentialgleichung, im allgemeinen allerdings zu verschiedenen Anfangswerten. In Bezug auf  $y_{t_0}^{(2)}$  gilt aufgrund der Transformation  $s = s_f - \rho$  die Beziehung

$$y_{t_0}^{(2)'}(s) = -y_{t_0}^{(2)'}(\rho), \quad (5.8)$$

so daß die transformierte Längenfunktion den Anfangswerten  $y_{t_0}^{(2)}(s_f) = 0$  und  $y_{t_0}^{(2)'}(s_f) = -1$  genügt.

Wir nehmen zunächst an, daß der Geodätische Abstand  $s_f$  so gewählt wurde, daß der induzierte Punkt  $\gamma_{t_0}(s_f)$  ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha$  ist. Unter dieser Annahme ist definitionsgemäß  $y_{t_0}^{(1)}(s_f) = 0$ . Da nach Satz 3.3.8  $y_{t_0}^{(1)'}(s_f) \neq 0$  gelten muß, existieren in einer Umgebung von  $s_f$  die Funktionen

$$\zeta_{t_0}^{(i)}(s) := \frac{y_{t_0}^{(i)}(s)}{y_{t_0}^{(i)'}(s)}$$

für  $i = 1, 2$ . Beide sind nach Lemma 5.2.1 (lokal) eindeutig bestimmte Lösungen des zur Differentialgleichung (5.7) gehörigen Anfangswertproblems. Für beide Funktionen sind in diesem Fall die zugehörigen Anfangswerte durch  $\zeta_{t_0}^{(i)}(s_f) = 0$  gegeben. Daher sind beide Funktionen in der Nähe von  $s_f$  identisch. Die Funktionen  $\zeta_{t_0}^{(i)}$  sind für alle  $s$  definiert, für die  $y_{t_0}^{(i)'}(s) \neq 0$  erfüllt ist. Wie oben erläutert, kann man vor Erreichen einer Polstelle von Differentialgleichung (5.7) zu (5.6) wechseln. Da das letztgenannte Anfangswertproblem ebenfalls lokal eindeutig lösbar ist, hat man damit die Existenz identischer Funktionen

$$z_{t_0}^{(i)}(s) := \frac{y_{t_0}^{(i)'}(s)}{y_{t_0}^{(i)}(s)}$$

in einer Umgebung von  $s = 0$  bewiesen. Nach Gleichung (5.8) gilt  $z_{t_0}^{(2)}(0) = -\kappa^{(\beta)}(t_0)$ , wobei  $\kappa^{(\beta)}(t_0)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve  $\beta_{s_f}$  im Parameterwert  $t_0$  bezeichnet. Daher gilt die behauptete Identität

$$z_{t_0}^{(1)}(0) = \kappa^{(\alpha)}(t_0) = -\kappa^{(\beta)}(t_0) = z_{t_0}^{(2)}(0).$$

Wir nehmen nun umgekehrt die Gültigkeit der eben bewiesenen Gleichung an. Nach Hilfssatz 5.2.1 sind die Funktionen  $z^{(i)}(s) = y_{t_0}^{(i)'}(s)/y_{t_0}^{(i)}(s)$  für  $i = 1, 2$  in einem Bereich  $I$  um  $s = 0$  definiert und identisch zueinander. Vor Erreichen einer Polstelle können ersatzweise (wie nun

schon mehrfach benutzt) die Funktionen  $\zeta^{(i)}(s) = y_{t_0}^{(i)}(s)/y_{t_0}^{(i)\prime}(s)$  betrachtet werden, die ebenfalls nach Hilfssatz 5.2.1 identisch sind. Insgesamt können wir daher für alle  $0 \leq s \leq s_f$  die Identität

$$y_{t_0}^{(1)\prime}(s) y_{t_0}^{(2)}(s) = y_{t_0}^{(1)}(s) y_{t_0}^{(2)\prime}(s)$$

folgern. Wegen  $y_{t_0}^{(2)}(s_f) = 0$  und  $y_{t_0}^{(2)\prime}(s_f) = -1$  erhält man aus dieser Beziehung für  $s = s_f$  die Gleichung

$$0 = -y_{t_0}^{(1)}(s_f),$$

die besagt, daß  $\gamma_{t_0}(s_f)$  ein Fokalfunkt von  $\alpha$  ist. ■

Nach dem soeben bewiesenen Satz stimmen also die Geodätischen Krümmungen der Progenitorkurve  $\alpha$  einerseits und der Offsetkurve  $\beta_{s_f}$  um einen Fokalfunkt von  $\alpha$  andererseits in ihrem tangentialen Schnittpunkt  $\alpha(t_0)$  (bis auf ihr Vorzeichen) überein. Zu beachten bei der Formulierung des Satzes ist, daß die Aussage für alle Geodätischen Abstände  $s_f$  gilt, für die  $\alpha'_{s_f}(t_0) = \mathbf{0}$  gilt, also nicht nur für die Werte der Funktion des Fokalen Abstands  $s_f^+(t)$  bzw.  $s_f^-(t)$  aus Definition 5.1.1. Die Gleichheit der betrachteten Geodätischen Krümmungen liefert eine Gemeinsamkeit von beliebigen Flächengeometrien  $S$  mit der Situation in der Euklidischen Ebene (vgl. Hilfssatz 5.1.2 und die Bemerkungen im Anschluß an seinen Beweis). In Verallgemeinerung zu Krümmungskreisen in der Ebene wollen wir daher folgenden Begriff einführen.

### Definition 5.2.3

Sei  $\alpha(t)$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, reguläre Flächenkurve der  $C^2$ -stetigen, parametrischen Fläche  $S$ . Für einen Fokalen Abstand  $|s_f(t_0)| < \infty$  heißt der Geodätische Offset um den Flächenpunkt  $\gamma_{t_0}(s_f(t_0))$  und Geodätischem Abstand  $|s_f(t_0)|$  Geodätischer Krümmungskreis von  $\alpha(t_0)$ .

Bei der letzten Definition wurde nun explizit die Funktion des Fokalen Abstands (vgl. Definition 5.1.1) benutzt, die den betragskleinsten Geodätischen Abstand liefert, für den ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0)$  existiert. Da wir  $s_f(t)$  als Abkürzung benutzen, wenn sowohl der rechts- als auch der linksseitige Fokale Abstand  $s_f^+(t)$  bzw.  $s_f^-(t)$  gemeint ist, kann es gemäß Definition 5.2.3 zu einem Kurvenpunkt  $\alpha(t_0)$  zwei verschiedene Geodätische Krümmungskreise geben: einen *rechtsseitigen* und einen *linksseitigen*. Als Beispiel für eine solche Situation werden wir in Abschnitt 5.4 die Fokalkurven der Erzeugenden des Torus kennenlernen. In dieser Eigenschaft unterscheidet sich die Situation auf beliebigen Flächengeometrien von dem Euklidischen Fall. Ferner hat ein Geodätischer Krümmungskreis selbstverständlich keine konstante Geodätische Krümmung — ein weiterer Unterschied zur Situation in der Ebene. Im tangentialen Schnittpunkt  $\alpha(t_0)$  stimmen jedoch nach Satz 5.2.2 die Geodätischen Krümmungen (evt. bis auf ihr Vorzeichen) überein. Dies macht die oben angesprochene Analogie beider Fälle aus, die auch Motivation für die gewählte Namensgebung war.

Obwohl Geodätische Krümmungskreise in  $\alpha(t_0)$  tangential zur Progenitorkurve  $\alpha$  sind und die gleiche Krümmung in dem gemeinsamen Punkt besitzen, können sie durchaus die Kurve schneiden, sowie weitere (transversale) Schnittpunkte zu  $\alpha$  besitzen. Dies ist natürlich bereits in der Ebene der typische Fall, wie das Beispiel der Parabel zeigt (siehe Abbildung 5.1). Betrachten wir  $\alpha(t) := (t, t^2)^T$  als Parametrisierung dieser Kurve, so ist die Funktion des linksseitigen Fokalen Abstands durch

$$s_f^-(t) = -\frac{1}{2} \left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

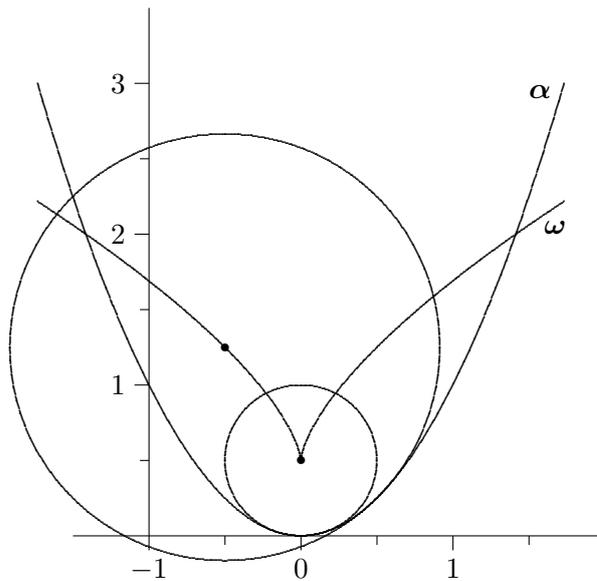


Abbildung 5.1: Fokalkurve und Krümmungskreise der Parabel

für alle Parameter  $t \in \mathbb{R}$  gegeben. Die zugehörige Fokalkurve besitzt folglich die Parametrisierung

$$\omega(t) = \left( 4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2 \right)^T$$

Der betragsmäßig minimale fokale Abstand ergibt sich offenbar für  $t = 0$  durch den Wert  $-1/2$ . Der zugehörige Krümmungskreis hat folglich den Mittelpunkt  $(0, 0.5)^T$  und den Radius  $1/2$ . In Abbildung 5.1 ist ein zweiter Krümmungskreis eingezeichnet, nämlich zum Parameterwert  $t = 1/2$ . Hier ergibt sich ein fokaler Abstand von  $-\sqrt{2}$ , so daß der zugehörige Krümmungskreis  $(-0.5, 1.25)^T$  als Mittelpunkt und  $\sqrt{2}$  als Radius besitzt. Der letztgenannte Krümmungskreis schneidet die Parabel in dem Berührungspunkt transversal, während der Krümmungskreis zum Parameter  $t = 0$  komplett auf der linken Seite der Parabel liegt.

Es ist daher natürlich, danach zu fragen, in welcher Situation sich der (Geodätische) Krümmungskreis lokal auf einer Seite der Ausgangskurve befindet, also kein transversaler Schnitt zu  $\alpha$  vorliegt. Aus dem Beispiel der Parabel aus Abbildung 5.1 gewinnt man vielleicht die Vermutung, daß dies genau für betragsmäßig minimale fokale Abstände der Fall sein könnte. Wie sich herausstellen wird, kommt diese Hypothese der Wahrheit sehr nahe. Der folgende Hilfssatz liefert zunächst ein notwendiges Kriterium für den Fall beliebiger Flächengeometrien.

#### Lemma 5.2.4

Sei  $\alpha$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve der  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$ . Wenn der Geodätische Krümmungskreis um den Fokalkreis  $\mathbf{p} = \gamma_{t_0}(s_f(t_0)) = \omega(t_0)$  in einer Umgebung von  $\alpha(t_0)$  auf der linken Seite (für  $s_f(t_0) = s_f^-(t_0)$ ) bzw. auf der rechten Seite (für  $s_f(t_0) = s_f^+(t_0)$ ) der Progenitorkurve  $\alpha$  liegt und  $s_f$  in  $t_0$  reell analytisch ist, dann ist  $s_f^-(t_0)$  ein lokales Maximum bzw.  $s_f^+(t_0)$  ein lokales Minimum des fokalen Abstands.

Bevor wir den Beweis dieses Hilfssatzes antreten, wollen wir eine mathematisch griffigere Formulierung für „auf der linken/rechten Seite liegen“ liefern. Hierfür wollen wir die Exponentialabbildung (vgl. (2.14) auf Seite 31) um den Fokalkreis  $\mathbf{p}$  von  $\alpha(t_0)$  betrachten. Den tangentialen

Winkel der radialen Geodätischen, deren Spur mit  $\gamma_{t_0}$  übereinstimmt, wollen wir mit  $\theta_0$  bezeichnen. Die bogenlängenparametrisierte radiale Geodätische selbst kennzeichnen wir durch  $\tilde{\gamma}_{t_0}$ .<sup>1</sup>

Aufgrund der Definition des Fokalen Abstands  $s_f(t)$  in 5.1.1 ist  $\mathbf{p}$  der erste Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0)$ , den die zugehörige Geodätische  $\gamma_{t_0}$  für  $0 \leq s \leq s_f^+(t_0)$  bzw.  $0 \geq s \geq s_f^-(t_0)$  erreicht. Mit Hilfe von Hilfssatz 5.2.1 überlegt man sich daher leicht, daß kein Fokalfunkt bezüglich  $\mathbf{p}$  längs der radialen Geodätischen  $\tilde{\gamma}_{\theta_0}$  existieren kann. Wegen der Stetigkeit des Jacobifeldes der Offsetkurventangenten um  $\mathbf{p}$  gibt es positive Konstanten  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , so daß die Exponentialabbildung für alle Winkel  $\theta$  mit der Eigenschaft  $|\theta - \theta_0| \leq \delta_1$  und alle Abstände  $s$  mit  $0 < s \leq |s_f(t_0)| + \delta_2$  definiert ist und keine Fokalfunkte bezüglich  $\mathbf{p}$  im Bild von  $U := [\theta_0 - \delta_1, \theta_0 + \delta_1] \times (0, |s_f(t_0)| + \delta_2]$  existieren. Da die kritischen Punkte der Exponentialfunktion mit den Fokalfunkten von  $\mathbf{p}$  übereinstimmen (siehe z.B. [dC76], S. 365), ist sie ferner im Inneren des angegebenen Bereiches bijektiv und differenzierbar.

Die betrachtete Kurve  $\alpha$  verläuft nun offenbar in einer Umgebung von  $\alpha(t_0)$  in dem Bild von  $U$  der Exponentialfunktion. Präziser ausgedrückt existiert ein  $\bar{\varepsilon} := \bar{\varepsilon}(U) > 0$ , so daß alle Kurvenpunkte  $\alpha(t)$  mit  $|t - t_0| < \bar{\varepsilon}$  durch die radiale Geodätische  $\tilde{\gamma}_t$  erreicht werden (beachte auch Fußnote 1). Die Bogenlänge des verbindenden Geodätischen Segments von  $\mathbf{p}$  nach  $\alpha(t)$  werden wir im folgenden kurz mit  $\ell(\tilde{\gamma}_t)$  umschreiben. Offenbar gilt nach Konstruktion  $\ell(\tilde{\gamma}_{t_0}) = |s_f(t_0)|$ .

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen können wir die Eigenschaft, daß der Geodätische Krümmungskreis von  $\alpha(t_0)$  auf der linken bzw. rechten Seite von  $\alpha$  liegt, wie folgt charakterisieren. Es existiert in diesem Fall ein  $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_1 > 0$ , so daß für alle  $t$  mit  $|t - t_0| < \varepsilon_1$  die Bogenlänge der radialen Geodätischen von  $\mathbf{p}$  nach  $\alpha(t)$  der Ungleichung

$$\ell(\tilde{\gamma}_t) > \ell(\tilde{\gamma}_{t_0}) = |s_f(t_0)| \quad (5.9)$$

genügt. Wir kommen nun zu dem ausstehenden Beweis von Lemma 5.2.4.

**Beweis:**

Zu Beginn erinnern wir an eine Eigenschaft einer in  $t_0$  reell analytischen Funktion  $f$ , nach der  $t_0$  genau dann Häufungspunkt lokaler Extremalstellen ist, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $t_0$  konstant ist. Verschwindet nämlich die Ableitung  $df/dt$  in den Elementen einer gegen  $t_0$  strebenden Folge, so stimmt  $df/dt$  nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (siehe etwa [Heu94], S. 372) in dem Konvergenzintervall mit der Nullfunktion überein.

Zur Vereinfachung unserer Argumentation nehmen wir an, daß  $s_f(t_0) = s_f^+(t_0)$  gelte, daß  $\mathbf{p}$  also ein rechtsseitiger Fokalfunkt ist. Die entsprechende Aussage für linksseitige Fokalfunkte ergibt sich durch Ändern des Durchlaufsinns von  $\alpha$ . Nach Voraussetzung liegt der Geodätische Krümmungskreis von  $\alpha(t_0)$  lokal auf der rechten Seite von  $\alpha$ . Zum Beweis des Hilfssatzes ist in diesem Fall zu zeigen, daß  $s_f^+(t_0)$  ein lokales Minimum der Funktion des rechtsseitigen Fokalen Abstands ist.

Wir nehmen im Gegenteil an, es gäbe in jeder beliebig kleinen Umgebung rechts (oder links) von  $t_0$  einen Parameter  $t$ , so daß  $s_f^+(t) < s_f^+(t_0)$  gilt. In der vorliegenden Situation können wir sogar auf die Existenz einer Konstanten  $\varepsilon_2 > 0$  schließen, so daß für alle  $t$  mit  $0 < t - t_0 < \varepsilon_2$  (bzw.  $0 < t_0 - t < \varepsilon_2$ ) die Ungleichung  $s_f^+(t) < s_f^+(t_0)$  erfüllt ist, da sonst  $t_0$  Häufungspunkt

<sup>1</sup>Um die Beziehung zum Kurvenparameter  $t_0$  von  $\alpha$  kenntlich zu machen, indizieren wir an dieser Stelle absichtlich nicht mit  $\theta_0$ , obwohl dies einen leichten Mißbrauch der bislang benutzten Schreibweise ist. Der Leser sollte sich im folgenden darüber im klaren sein, daß der tangential Winkel  $\theta$  in  $\mathbf{p}$  i.a. in *keinem* linearen Verhältnis zu  $t$  steht.

lokaler Minimalstellen wäre und damit  $s_f^+$  in der Nähe von  $t_0$  konstant. Mit der Wahl von  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$  gilt aufgrund von Gleichung (5.9)

$$s_f^+(t) < s_f^+(t_0) < \ell(\tilde{\gamma}_t)$$

für alle  $0 < t - t_0 < \varepsilon$  (bzw.  $0 < t_0 - t < \varepsilon$ ). Nach den Bemerkungen im Vorfeld dieses Beweises ist das Geodätische Segment  $\tilde{\gamma}_t$  von  $\mathbf{p}$  nach  $\alpha(t)$  im betrachteten Bildbereich der Exponentialfunktion eine lokal kürzeste Verbindung (vgl. auch [dC76], S. 292 ff.). Insbesondere liefert diese radiale Geodätische  $\tilde{\gamma}_t$  eine kürzere Verbindung zwischen  $\alpha(t)$  und  $\mathbf{p} = \omega(t_0)$  als der Pfad, der durch  $\gamma_t$  (Geodätisches Segment ausgehend von  $\alpha(t)$  bis zum Fokalkreis  $\omega(t)$ ) und  $\omega(t)\widehat{\omega}(t_0)$  (Segment der Fokalkurve  $\omega$  von  $\omega(t)$  bis  $\omega(t_0)$ ) beschrieben wird. Mit Hilfe von Lemma 5.1.5, insbesondere Gleichung (5.5), ergibt sich daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} s_f^+(t_0) &< \ell(\tilde{\gamma}_t) \\ &\leq \ell(\gamma_t) + \ell(\omega(t)\widehat{\omega}(t_0)) \\ &= s_f^+(t) + s_f^+(t_0) - s_f^+(t) = s_f^+(t_0), \end{aligned}$$

die die Annahme,  $s_f^+(t_0)$  sei kein lokales Minimum, widerlegt. ■

Wendet man das eben bewiesene Lemma in der Euklidischen Ebene an, so erkennt man, daß die betrachtete Progenitorkurve lokal in  $\alpha(t_0)$  betraglich maximale Krümmung besitzen muß, damit sich der Krümmungskreis lokal auf einer Seite von  $\alpha$  befindet. Die Umkehrung von Hilfssatz 5.2.4 gilt in einer leicht abgeschwächten Form ebenfalls. Dies ist Gegenstand der folgenden Aussage.

### Lemma 5.2.5

*Ist  $\alpha$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve der  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$  und  $s_f^+(t_0)$  ein lokales Minimum des rechtsseitigen Fokalen Abstands bzw.  $s_f^-(t_0)$  ein lokales Maximum des linksseitigen Fokalen Abstands, so liegt der Krümmungskreis von  $\alpha(t_0)$  entweder lokal auf der rechten bzw. linken Seite von  $\alpha$ , oder die Spur von  $\alpha(t)$  stimmt lokal mit der des Krümmungskreises überein.*

#### Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir wieder ausschließlich die Situation für den rechtsseitigen Fokalen Abstand  $s_f^+(t)$ . Ist  $s_f^+(t_0)$  ein lokales Minimum, so gibt es eine Konstante  $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon > 0$ , so daß  $s_f^+(t_0) \leq s_f^+(t)$  für alle  $t$  mit  $|t - t_0| < \varepsilon$  gilt. Aus den gleichen Gründen, die bereits im Beweis zu Hilfssatz 5.2.4 benutzt wurden, ist das durch  $\gamma_t$  induzierte Geodätische Segment von  $\alpha(t)$  nach  $\omega(t)$  eine lokal kürzeste Verbindung. Insbesondere wird die Bogenlänge dieses Segments durch die Summe der Segmentlängen der radialen Geodätischen  $\tilde{\gamma}_t$  von  $\alpha(t)$  nach  $\mathbf{p} = \omega(t_0)$  und der Fokalkurve zwischen  $\omega(t_0)$  und  $\omega(t)$  nach oben abgeschätzt, d.h. es gilt

$$s_f^+(t) = \ell(\gamma_t) \leq \ell(\tilde{\gamma}_t) + \ell(\omega(t_0)\widehat{\omega}(t)) = \ell(\tilde{\gamma}_t) + s_f^+(t) - s_f^+(t_0).$$

Diese Ungleichung ist nun offenbar gleichbedeutend zu

$$\ell(\tilde{\gamma}_t) \geq s_f^+(t_0).$$

Die letzte Abschätzung besagt, daß der Abstand zwischen  $\mathbf{p}$  und  $\alpha(t)$  (gemessen längs der radialen Geodätischen) größer oder gleich dem Fokalen Abstand  $s_f^+(t_0)$  ist. Da  $\tilde{\gamma}_t(s_f^+(t_0))$  für alle  $t$  einem Punkt des Krümmungskreises entspricht, folgt die Behauptung, da bei Gleichheit  $\alpha(t)$  Element des Krümmungskreises ist. ■

### 5.3 Startwerte der Fokalen Differentialgleichung

Satz 3.3.8 kann ebenfalls benutzt werden, um den (links- oder rechtsseitigen) Fokalen Abstand  $s_f(t_0)$  zu einem gegebenen Progenitorparameter  $t_0$  zu nähern. Da nämlich die Funktion der vorzeichenbehafteten Tangentenlänge Geodätischer Offsetkurven genau dann ihr Vorzeichen wechselt, wenn die betrachtete Geodätische Kurve  $\gamma_{t_0}$  durch einen Fokalpunkt des Progenitorobjekts verläuft, kann die Funktion  $y_{t_0}(s)$  keinen Extremwert besitzen, der gleichzeitig Nullstelle ist. Daher bietet sich ein Bisektionsverfahren zur Ermittlung einer Wurzel von  $y_{t_0}$  als sicheres numerisches Verfahren an.

Um einerseits ein Einschlußintervall der betragskleinsten Nullstelle  $s_f$  zu erhalten, sowie andererseits prinzipiell die Existenz einer Wurzel (und damit eines Fokalpunktes zum gegebenen Parameter  $t_0$ ) zu gewährleisten, wird man zunächst einige Funktionswerte  $y_{t_0}(s_i)$  mit Hilfe der Jacobi Differentialgleichung (3.31) aus Satz 3.3.5 auswerten. Als Geodätische Abstände können etwa äquidistante Werte von Null bis zu einem Maximalwert  $s_{\max}$  durch  $s_i := \pm i/Ns_{\max}$  für  $i = 0, 1, \dots, N$  betrachtet werden, wobei  $N$  geeignet zu wählen ist. Im Fall einer Progenitorcurve hängt die Wahl des Vorzeichens davon ab, ob man einen links- oder einen rechtsseitigen Fokalpunkt finden möchte.

Die Berechnung einer solchen Wertetabelle kann beim Auftreten des ersten Vorzeichenwechsels zwischen  $y_{t_0}(s_{i-1})$  und  $y_{t_0}(s_i)$  abgebrochen werden. Mit dem zugehörigen Intervall  $[s_{i-1}, s_i]$  erhält man ein Anfangsintervall für das intendierte Bisektionsverfahren. Tritt kein Vorzeichenwechsel auf, so liegt die Vermutung nahe, daß kein Fokalpunkt zu dem vorgegebenen Parameter  $t_0$  und der gewählten Seite (im Fall von Progenitorcurven) existiert. Die Plausibilität dieser Vermutung hängt natürlich von einer „vernünftigen“ Wahl der Anzahl der Auswertungspunkte  $N$  und des maximal betrachteten Geodätischen Abstands  $s_{\max}$  ab.

Eine erste, grobe Abschätzung des Fokalen Abstands kann unter Verwendung des sogenannten *Vergleichssatzes von Sturm* ermittelt werden. Dieses wohlbekannte Theorem wird üblicherweise benutzt, um den Abstand des konjugierten Punktes eines *Flächenpunktes*  $\mathbf{p}$  abzuschätzen. Da wir darüberhinaus eine Methode benötigen, den Fokalen Abstand bezüglich einer *Progenitorcurve* zu schätzen, geben wir an dieser Stelle eine analoge Aussage inklusive Beweis an. (Für diese Aussage konnte von uns keine Quelle ermittelt werden.)

Bevor wir zur Beschreibung der Aussage kommen können, müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. Gegeben sei also mit  $\mathbf{p}$  bzw.  $\alpha$  ein Progenitorobjekt der parametrischen Fläche  $S$ . In beiden Fällen fixieren wir den Progenitorparameter  $t_0$  und interessieren uns für das Verhalten des Jacobifeldes, welches durch die zugehörigen Offsetkurventangenten längs der Geodätischen Kurve  $\gamma_{t_0}$  gegeben ist. Unser Ziel ist es, die Situation auf der Fläche  $S$  mit der auf einer zweiten Flächengeometrie  $\tilde{S}$  zu vergleichen. Betrachten wir einen Progenitorpunkt  $\mathbf{p}$ , so wählen wir einen Punkt  $\tilde{\mathbf{p}} \in \tilde{S}$ , sowie eine lineare Isometrie  $i : T_{\mathbf{p}}(S) \rightarrow T_{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{S})$  zwischen den beiden zugehörigen Tangentialräumen. Diese Abbildung kann als orthogonale Transformation der Euklidischen Ebene interpretiert werden. Sie wird dazu dienen, das Jacobifeld längs  $\gamma_{t_0} \subset S$  nach  $\tilde{S}$  zu transportieren und damit beide Geometrien vergleichbar zu machen.

Das Bild der Geodätischen Tangente  $i(\gamma'_{t_0}(0))$  ist ein Vektor der Länge Eins im Tangentialraum  $T_{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{S})$ , der eine bogenlängenparametrisierte Geodätische Kurve  $\tilde{\gamma}_{t_0}$  auf der zweiten Fläche  $\tilde{S}$  induziert, die im Flächenpunkt  $\tilde{\mathbf{p}}$  startet. Bezeichnen wir mit  $J_{t_0}(s)$  das orthogonale Vektorfeld der Offsetkurventangenten längs  $\gamma_{t_0}$  bezüglich  $\mathbf{p}$  auf  $S$ , so induziert die Isometrie  $i$  ferner ein Jacobifeld  $\tilde{J}_{t_0}(s)$  längs  $\tilde{\gamma}_{t_0}$ . Beschreibt  $y_{t_0}(s)$  bzw.  $\tilde{y}_{t_0}(s)$  jeweils die vorzeichenbehaftete Länge

des Jacobifeldes  $J_{t_0}(s)$  bzw.  $\tilde{J}_{t_0}(s)$ , so genügen diese Funktionen der Jacobi Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_{t_0}''(s) + K(s)y_{t_0}(s) &= 0 & \text{mit } y_{t_0}(0) = 0 \text{ und } y_{t_0}'(0) = 1 & \text{ bzw.} \\ \tilde{y}_{t_0}''(s) + \tilde{K}(s)\tilde{y}_{t_0}(s) &= 0 & \text{mit } \tilde{y}_{t_0}(0) = 0 \text{ und } \tilde{y}_{t_0}'(0) = 1. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $K(s)$  bzw.  $\tilde{K}(s)$  die Gaußkrümmung der Fläche  $S$  bzw.  $\tilde{S}$  längs der Geodätischen  $\gamma_{t_0}$  bzw.  $\tilde{\gamma}_{t_0}$ .

Im Falle einer Progenitorcurve  $\alpha \subset S$  genügt die Funktion der vorzeichenbehafteten Länge der Offsetkurventangenten ebenfalls der Jacobi Differentialgleichung, allerdings mit den veränderten Anfangsbedingungen

$$y_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\| \quad \text{und} \quad y_{t_0}'(0) = \kappa_g(t_0)y_{t_0}(0),$$

wobei  $\kappa_g(t_0)$  die Geodätische Krümmung der Flächenkurve  $\alpha$  im Punkt  $\mathbf{p} := \alpha(t_0)$  bezeichnet (vgl. Abschnitt 3.3). Um die Geometrien mit Hilfe einer linearen Isometrie  $i: T_{\mathbf{p}}(S) \rightarrow T_{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{S})$  vergleichbar zu machen, bilden wir das Kurvensegment  $\alpha(t)$  für  $|t-t_0| < \varepsilon$  durch die Projektion  $\Pi_N$  längs der Flächennormalen  $\mathbf{N} := \mathbf{N}_{\mathbf{p}}$  nach  $T_{\mathbf{p}}(S)$  ab. Da  $S$  eine reguläre Fläche ist, ist diese Projektion für hinreichend klein gewählte  $\varepsilon$  ein Diffeomorphismus. Nun entspricht die Geodätische Krümmung der Flächenkurve der (vorzeichenbehafteten) Krümmung der zugehörigen ebenen Kurve im Tangentialraum  $T_{\mathbf{p}}(S)$  (vgl. [BL73], S. 196). Die Krümmung einer ebenen Kurve ist invariant unter einer orthogonalen Transformation, so daß die Kurve  $i(\Pi_N(\alpha(t))) \subset T_{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{S})$  für  $t = t_0$  die Krümmung  $\kappa_g(t_0)$  besitzt. Durch Umkehrung der Normalprojektion  $\tilde{\Pi}_{\tilde{N}}$  induziert diese Kurve eine Flächenkurve  $\tilde{\alpha}(t) \subset \tilde{S}$ , die im Punkt  $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\alpha}(t_0)$  die Geodätische Krümmung  $\kappa_g$  besitzt. Um die Diffeomorphismeigenschaft von  $\tilde{\Pi}_{\tilde{N}}$  zu gewährleisten, ist hierbei gegebenenfalls  $\varepsilon$  zu verkleinern.

Mit Hilfe der Konstruktion des letzten Absatzes sind wir in der Lage, auf der Vergleichsfläche  $\tilde{S}$  das zugehörige Jacobifeld von Offsetkurventangenten längs der bogenlängenparametrisierten Geodätischen  $\tilde{\gamma}_{t_0}(s)$  zusammen mit ihrer vorzeichenbehafteten Länge  $\tilde{y}_{t_0}(s)$  zu betrachten. Die Funktion  $\tilde{y}_{t_0}(s)$  genügt wieder der Jacobi Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$\tilde{y}_{t_0}(0) = \|\alpha'(t_0)\| \quad \text{und} \quad \tilde{y}_{t_0}'(0) = \kappa_g(t_0)\tilde{y}_{t_0}(0),$$

da die Isometrie  $i$  die Tangentenlänge von  $\alpha'(t_0)$  nicht verändert. Wir sind nun in der Lage, den Sturmischen Vergleichssatz für beide Progenitorobjekte zu formulieren.

### Satz 5.3.1

Seien  $S$  und  $\tilde{S}$  zwei reguläre parametrische Flächen und  $\mathbf{p} \in S$  bzw.  $\alpha(t) \subset S$  ein gegebenes Progenitorobjekt. Für jeden beliebigen Progenitorparameter  $t_0$  bezeichne  $y_{t_0}(s)$  die vorzeichenbehaftete Längenfunktion der Offsetkurventangenten bezüglich  $\mathbf{p}$  bzw.  $\mathbf{p} := \alpha(t_0)$  längs  $\gamma_{t_0}(s)$ , sowie  $\tilde{y}_{t_0}(s)$  die zugehörige Längenfunktion auf  $\tilde{S}$  längs  $\tilde{\gamma}_{t_0}(s)$  gemäß obiger Konstruktion. Falls für die Gaußkrümmungen  $K(s)$  und  $\tilde{K}(s)$  von  $S$  bzw.  $\tilde{S}$  längs  $\gamma_{t_0}(s)$  bzw.  $\tilde{\gamma}_{t_0}(s)$  die Abschätzung  $K(s) \leq \tilde{K}(s)$  erfüllt ist, so genügen die Längenfunktionen  $y_{t_0}$  und  $\tilde{y}_{t_0}$  der Ungleichung

$$y_{t_0}(s) \geq \tilde{y}_{t_0}(s) \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq b \text{ (bzw. } b \leq s \leq 0), \quad (5.10)$$

wobei  $b$  den (betrags-) kleinsten Geodätischen Abstand bezeichnet, für den  $\tilde{y}_{t_0}(b) = 0$  gilt. Entspricht  $a$  der ersten Nullstelle von  $y_{t_0}(s)$ , so gilt insbesondere  $a \geq b$  (bzw.  $a \leq b$  im Fall von linksseitigem Offsetting bezüglich einer Progenitorcurve).

**Beweis:**

Da beide Längenfunktionen der Jacobi Differentialgleichung genügen, erhält man die Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \left\{ \tilde{y}_{t_0} (y_{t_0}'' + K y) - y (\tilde{y}_{t_0}'' + \tilde{K} \tilde{y}_{t_0}) \right\} d\sigma \\ &= \left. \{ \tilde{y}_{t_0} y_{t_0}' - y_{t_0} \tilde{y}_{t_0}' \} \right|_0^s + \int_0^s (K - \tilde{K}) y_{t_0} \tilde{y}_{t_0} d\sigma \end{aligned} \quad (5.11)$$

für alle Bogenlängenparameter  $s$  der betrachteten Geodätischen. Wir wollen zunächst aus der Voraussetzung  $K(s) \leq \tilde{K}(s)$  folgern, daß die erste Nullstelle von  $y_{t_0}$  nicht vor der ersten Nullstelle von  $\tilde{y}_{t_0}$  auftreten kann. Im Fall einer Progenitorcurve  $\alpha$  betrachten wir nur den Fall von rechtsseitigem Offsetting, da die Argumentation für  $s \leq 0$  völlig analog übernommen werden kann. Seien also  $a$  und  $b$  so gewählt, daß

$$\begin{aligned} y_{t_0}(a) &= 0 \quad \text{und} \quad y_{t_0}(s) > 0 \quad \text{für alle } 0 < s < a \\ \tilde{y}_{t_0}(b) &= 0 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_{t_0}(s) > 0 \quad \text{für alle } 0 < s < b \end{aligned}$$

gilt. Die Positivität von  $y_{t_0}$  und  $\tilde{y}_{t_0}$  vor ihrer ersten Nullstelle folgt direkt aus der Definition der Längenfunktion (siehe Gleichung (3.30), auf Seite 61). Wäre nun  $a < b$  erfüllt, so erhält man aus  $K(s) - \tilde{K}(s) \leq 0$  und  $y_{t_0}(s)\tilde{y}_{t_0}(s) > 0$  für alle  $s \in (0, a)$  zunächst die Ungleichung

$$\int_0^a (K - \tilde{K}) y_{t_0} \tilde{y}_{t_0} d\sigma \leq 0. \quad (5.12)$$

Für den ersten Summanden aus Gleichung (5.11) ergibt sich ferner für  $s = a$

$$\begin{aligned} \left. \{ \tilde{y}_{t_0} y_{t_0}' - y_{t_0} \tilde{y}_{t_0}' \} \right|_0^a &= \tilde{y}_{t_0}(a) y_{t_0}'(a) - \{ \tilde{y}_{t_0}(0) y_{t_0}'(0) - y_{t_0}(0) \tilde{y}_{t_0}'(0) \} \\ &= \tilde{y}_{t_0}(a) y_{t_0}'(a) < 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Der rechte Klammerterm in der ersten Zeile der letzten Umformung ist sowohl im Fall eines Progenitorpunktes als auch für Progenitorcurven trivial. Für Progenitorpunkte gilt nämlich  $y_{t_0}(0) = 0 = \tilde{y}_{t_0}(0)$ , im Fall von Progenitorcurven ergibt sich nach obiger Konstruktion  $\tilde{y}_{t_0}(0) y_{t_0}'(0) = \kappa_g \|\alpha'(t_0)\|^2 = y_{t_0}(0) \tilde{y}_{t_0}'(0)$  (siehe auch Satz 3.3.7). Daß der gesamte Ausdruck in (5.13) damit negativ sein muß, folgt einerseits aus der Annahme  $a < b$ , die  $\tilde{y}_{t_0}(a) > 0$  impliziert. Andererseits muß für die erste Nullstelle von  $y_{t_0}$  nach Satz 3.3.8 die Abschätzung  $y_{t_0}'(a) < 0$  gelten. Die Kombination von Gleichung (5.12) und (5.13) steht jedoch im Widerspruch zu Gleichung (5.11), so daß folglich  $a \geq b$  gelten muß, was den zweiten Teil des Satzes zeigt.

Da, wie eben bewiesen,  $a \geq b$  gilt, erhält man für den zweiten Term in Gleichung (5.11) die Abschätzung

$$\int_0^s (K - \tilde{K}) y_{t_0} \tilde{y}_{t_0} d\sigma \leq 0$$

für alle  $0 \leq s \leq b$ , da beide Längenfunktionen vor Erreichen eines Fokalpunktes positiv sind. Nach Gleichung (5.11) muß folglich der erste Term

$$\left. \{ \tilde{y}_{t_0} y_{t_0}' - y_{t_0} \tilde{y}_{t_0}' \} \right|_0^s = \tilde{y}_{t_0}(s) y_{t_0}'(s) - y_{t_0}(s) \tilde{y}_{t_0}'(s) \geq 0$$

für alle  $0 \leq s \leq b$  genügen. Für alle  $0 < s < b$  ist dies gleichbedeutend zu der Abschätzung

$$\frac{d}{ds} \left[ \ln(y_{t_0}(s)) \right] \geq \frac{d}{ds} \left[ \ln(\tilde{y}_{t_0}(s)) \right],$$

die wir für ein  $0 < s_0 \leq s < b$  zwischen  $s_0$  und  $s$  integrieren. Es ergibt sich

$$\ln(y_{t_0}(s)) - \ln(y_{t_0}(s_0)) \geq \ln(\tilde{y}_{t_0}(s)) - \ln(\tilde{y}_{t_0}(s_0)),$$

was aufgrund der Monotonie des Logarithmus gleichbedeutend zu  $y_{t_0}(s)/\tilde{y}_{t_0}(s) \geq y_{t_0}(s_0)/\tilde{y}_{t_0}(s_0)$  ist. Bezeichnet man mit  $\kappa_g(s)$  bzw.  $\tilde{\kappa}_g(s)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve auf  $S$  bzw.  $\tilde{S}$  im Abstand  $s$ , so gilt nach Satz 3.3.7

$$\lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{y_{t_0}(s_0)}{\tilde{y}_{t_0}(s_0)} = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\tilde{\kappa}(s_0) y'_{t_0}(s_0)}{\kappa(s_0) \tilde{y}'_{t_0}(s_0)} = 1.$$

Offensichtlich geht an dieser Stelle wesentlich die Konstruktion mit Hilfe der linearen Isometrie  $i$  ein, die die Gleichheit der Anfangswerte der Jacobi Differentialgleichung garantiert. Der Grenzübergang gelingt im übrigen für Progenitorpunkte nur durch Betrachten der Ableitungen der Längenfunktionen, da Zähler und Nenner auf der linken Seite der letzten Gleichung gegen Null streben. Mit dieser Grenzwertbetrachtung erhält man insgesamt die Abschätzung

$$\frac{y_{t_0}(s)}{\tilde{y}_{t_0}(s)} \geq \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{y_{t_0}(s_0)}{\tilde{y}_{t_0}(s_0)} = 1,$$

die für alle  $0 < s < b$  gültig ist, und die behauptete Ungleichung  $y_{t_0}(s) \geq \tilde{y}_{t_0}(s)$  für alle  $0 \leq s \leq b$  impliziert. ■

Der eben bewiesene Vergleichssatz 5.3.1 kann in einfacher Weise dazu benutzt werden, um in vielen Fällen ein Intervall Geodätischer Abstände zu bestimmen, in dem sich der (betrags-) kleinste Fokale Abstand befindet. Diese Technik ist Gegenstand des nächsten Korollars.

### Korollar 5.3.2

Sei  $\gamma_{t_0}(s)$  eine Geodätische Kurve der Fläche  $S$ , längs der das Jacobifeld der Offsetkurventangenten eines Progenitorobjekts betrachtet werde. Genügt die Gaußkrümmung  $K(s)$  von  $S$  längs  $\gamma_{t_0}(s)$  der Einschließung  $K_0 \geq K(s) \geq K_1 > 0$  zu zwei positiven Konstanten  $K_0$  und  $K_1$ , so verschwindet das Jacobifeld für einen Geodätischen Abstand  $s_f$ , für den

$$\begin{aligned} s_f &\in \left[ \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}, \frac{\pi}{\sqrt{K_1}} \right] && \text{(Progenitorpunkt)} \\ s_f &\in \left[ \frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_0}}, \frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_1}} \right] && \text{(Progenitorkurve / rechtsseitig)} \\ s_f &\in \left[ -\frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_1}}, -\frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_0}} \right] && \text{(Progenitorkurve / linksseitig)} \end{aligned}$$

gilt. Im Fall von Progenitorkurven bezeichnet  $\kappa_g(t_0)$  die Geodätische Krümmung der Offsetkurve zum betrachteten Parameter  $t_0$ .

### Beweis:

Wir wollen den zweiten Teil von Satz 5.3.1 im Zusammenhang mit den Sphären  $S^2(K_0)$  bzw.  $S^2(K_1)$  mit Radius  $1/K_i$  zum Beweis der Aussage benutzen. Die Jacobi Differentialgleichung

$$y''(s) + K_i y(s) = 0$$

hat für eine konstante Gaußkrümmung  $K_i > 0$  die allgemeine Lösung

$$y(s) = c_1 \cos(\sqrt{K_i} s) + c_2 \sin(\sqrt{K_i} s),$$

wobei die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  durch die Anfangswerte  $c_1 = y(0)$  und  $c_2 = y'(0)$  bestimmt sind. Im Fall eines Progenitorpunktes ( $c_1 = 0$  und  $c_2 = 1$ ) erhält man daher den Fokalen Abstand auf der Fläche  $S^2(K_i)$  als erste Nullstelle von  $y(s) = \sin(\sqrt{K_i} s)$ , d.h. den Wert  $\pi/\sqrt{K_i}$ . Da nach Voraussetzung  $K_0 \geq K(s)$  gilt, hat nach Satz 5.3.1 das Jacobifeld von  $S$  keine Nullstelle im Intervall  $(0, \pi/\sqrt{K_0})$ . Da ferner  $K(s) \geq K_1$  erfüllt ist, ergibt sich ebenfalls aus dem zweiten Teil von Satz 5.3.1 die Abschätzung  $s_f \leq \pi/\sqrt{K_1}$ .

Für eine Progenitorkurve  $\alpha \subset S$  und einen beliebigen Kurvenparameter  $t_0$  erhält man aufgrund der Anfangswerte  $c_1 = y(0) = \|\alpha'(t_0)\|$  und  $c_2 = y'(0) = \kappa_g(t_0) \|\alpha'(t_0)\|$

$$y(s) = \|\alpha'(t_0)\| \left\{ \cos(\sqrt{K_i} s) + \kappa_g(t_0) \sin(\sqrt{K_i} s) \right\}$$

als Lösung der Jacobi Differentialgleichung bezüglich  $S^2(K_i)$ . Die erste positive Nullstelle  $b$  dieser Lösung lautet  $\pi/(2\sqrt{K_i})$  im Fall einer trivialen Geodätischen Krümmung  $\kappa_g(t_0) = 0$ . Für  $\kappa_g(t_0) \neq 0$  erhält man den Wert

$$b = \frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_i}},$$

wobei  $[-\pi/2, \pi/2]$  als Wertebereich der Funktion  $\arctan$  angenommen wird. (Setzt man ferner  $\arctan(\pm\infty) := \pm\pi/2$ , so behält der letzte Ausdruck auch für  $\kappa_g(t_0) = 0$  seine Richtigkeit.) Die Betrachtung der ersten positiven Nullstelle bezieht sich wieder auf ein rechtsseitiges Offsetting. Für linksseitige Offsetkurven ist entsprechend  $-b$  die relevante erste Nullstelle. Mit Hilfe des zweiten Teils von Satz 5.3.1 ergibt sich für den Fokalen Abstand

$$s_f \in \left[ \frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_0}}, \frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_1}} \right] \quad \text{für rechtsseitiges Offsetting bzw.}$$

$$s_f \in \left[ -\frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_1}}, -\frac{\arctan(-(\kappa_g(t_0))^{-1})}{\sqrt{K_0}} \right] \quad \text{für linksseitiges Offsetting,}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. ■

## 5.4 Numerische Beispiele

In diesem letzten Abschnitt des vorliegenden Kapitels soll die numerische Methode zur Bestimmung des Fokalen Abstands und damit zur Berechnung der lokalen Fokalkurven eines Progenitorobjekts zusammengefaßt werden. Ferner werden wir einige Beispiele explizit durchgeführter Testläufe präsentieren, die die Praktikabilität unserer Methode demonstrieren werden. Zur Lösung der Fokalen Differentialgleichung wurde das Verfahren nach Adams (vgl. [HW76]) in der Implementation der Numerical Algorithm Group [NAG89] eingesetzt.

Zur Berechnung der rechten Seite der Fokalen Differentialgleichung benötigen wir die partiellen Ableitungen  $(\partial/\partial s)y$  und  $(\partial/\partial t)y$  der vorzeichenbehafteten Längenfunktion  $y$  Geodätischer Offsetkurventangenten. Daher ist in jedem Schritt des numerischen Verfahrens zur Integration der Differentialgleichung (5.2) die gestörte Jacobi Gleichung zu lösen. Dies geschieht mit der in

<b>Differentialgleichung des Fokalen Abstands</b> (siehe Gleichung (5.2) auf Seite 129)	
Methode:	Differentialgleichung erster Ordnung.
Voraussetzung:	$C^4$ -stetige Fläche, ggf. $C^4$ -stetige Flächenkurve.
Anfangswerte:	Durch ein Bisektionsverfahren unter Verwendung der Jacobi Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 3.6, Tabelle 3.2) zu bestimmen (siehe Abschnitt 5.3).
Teilprobleme:	Gestörte Jacobi Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 3.6, Tabelle 3.3).
Ergebnisse:	<p><math>s_f(t)</math> Links- bzw. rechtsseitiger Fokaler Abstand bezüglich des Parameters <math>t</math> des Progenitorobjekts.</p> <p><math>\omega(t)</math> Links- bzw. rechtsseitiger Fokalfunkt des Progenitorobjekts zum Parameter <math>t</math> durch Einsetzen der Lösung <math>s_f(t)</math> in die Geodätische Differentialgleichung <math>\omega(t) = \gamma_t(s_f(t)) = \mathbf{r}(\mathcal{O}(s_f(t), t))</math>.</p> <p><math>s'_f(t)</math> Wachstumsverhalten der Funktion des Fokalen Abstands als linke Seite der Fokalen Differentialgleichung.</p> <p><math>\omega'(t)</math> Tangente der Fokalkurve durch die Beziehung <math>\omega'(t) = s'_f(t)\gamma_t(s_f(t))</math> (siehe Gleichung 5.4)).</p>

Tabelle 5.1: Anforderungen und Ergebnisse der Fokalen Differentialgleichung

Abschnitt 3.6, Tabelle 3.3 beschriebenen Routine. Aus diesem Grund muß man formal eine  $C^4$ -stetige Flächengeometrie, sowie eine viermal stetig differenzierbare Progenitorcurve fordern. Da es sich bei der gestörten Jacobi Differentialgleichung um ein System aus 8 Gleichungen handelt, ergibt sich ein recht hoher Rechenaufwand zur Bestimmung des Fokalen Abstands.

In Tabelle 5.1 findet man eine Zusammenfassung der berechneten Größen, die man durch Lösen der Fokalen Differentialgleichung erhält. Neben dem Wert des Fokalen Abstands  $s_f(t)$  und dem zugehörigen Fokalfunkt  $\omega(t)$  approximiert das Verfahren die Ableitung  $s'_f(t)$  des Fokalen Abstands, und damit gleichzeitig die Tangentenlänge der Fokalkurve  $\|\omega'(t)\|$ . Dies ist sofern bemerkenswert, da man mit Hilfe der Kenntnis von  $s'_f(t)$  versuchen kann, den *minimalen* rechtsseitigen Fokalen Abstand durch Anwenden einer Intervallschachtelung zu ermitteln. Analog für den Fall linksseitiger Fokalfunkte: Hier ist man an dem maximalen Fokalen Abstand interessiert.

Als erstes Beispiel wollen wir uns mit der Geometrie des Torus beschäftigen. Wie bereits in Abschnitt 3.6 im Zusammenhang mit dem Beispiel aus Abbildung 3.7 (Seite 82) besprochen, wollen wir den Torus als Rotationsfläche parametrisieren. Die Erzeugende ist hier ein Kreis in der  $xz$ -Ebene mit Radius Eins und Mittelpunkt  $(3, 0, 0)^T$ . In Abbildung 5.2 wurde diese erzeugende Kurve in roter Farbe dargestellt. Die grüne Flächenkurve stellt die linksseitige Fokalkurve dar, während die blaue der Fokalkurve hin zur rechten Seite entspricht.

Offenbar sind beide Fokalkurven spiegelsymmetrisch zueinander, wobei die Erzeugende der Spiegelachse entspricht. Dies erkennt man auch anhand von Abbildung 5.3, in der die zugehörigen Parameterraumkurven zu sehen sind. Die erzeugende Kurve befindet sich hier am rechten Rand

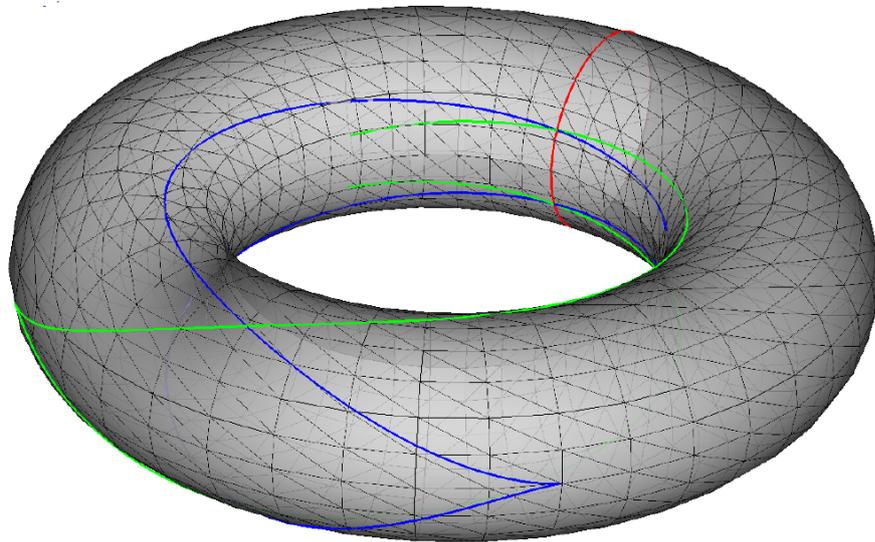


Abbildung 5.2: Links- und rechtsseitige Fokalkurven der Erzeugenden eines Torus

des Parameterraums. Da gegenüberliegende Ränder miteinander zu identifizieren sind, ist der Parameterraum periodisch über diese Ränder hinaus fortzusetzen, um diese Abbildung richtig zu interpretieren. Aufgrund dieser Symmetrie erkennt man, daß es zu einem Progenitorpunkt der Erzeugenden sowohl einen links- als auch einen rechtsseitigen Fokalpunkt geben kann.

Die Betragsminima beider Fokalen Abstände werden in Bezug auf den Progenitorpunkt  $(4, 0, 0)^T$  angenommen. Dieser Punkt (auf der abgewandten Seite von Abbildung 5.2) befindet sich auf dem äußeren Äquator des Torus. Die beiden zugehörigen Fokalpunkte liegen ebenfalls auf diesem Breitenkreis. Die ermittelten betragsminimalen Fokalen Abstände lauten  $\pm 9.42477796076746$ . In Abbildung 5.2 bzw. 5.3 erkennt man den zugehörigen Punkt der Fokalkurve deutlich an der Spitze der blauen bzw. grünen Kurve. Dies deckt sich mit der in Lemma 5.1.4 formulierten Feststellung, daß Extremwerte des Fokalen Abstands Spitzen von  $\omega$  induzieren.

Die zugehörige Rotationsfläche einer Erzeugendenkurve  $(x(v), 0, z(v))^T$  in der  $xz$ -Ebene mit  $x(v) > 0$  ist durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u) x(v), \sin(u) x(v), z(v))^T$$

für  $0 \leq u \leq 2\pi$  gegeben. Man rechnet leicht die Formel

$$K(u, v) = \frac{z'(v) (z'(v) x''(v) - z''(v) x'(v))}{x(v)}$$

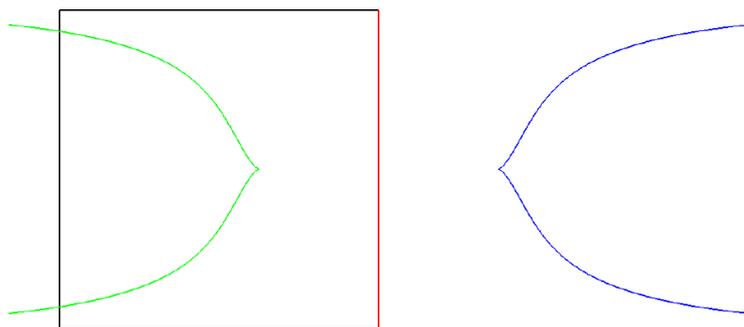


Abbildung 5.3: Parameterraumkurven der Fokalkurven aus Abbildung 5.2

für die Gaußkrümmung einer Rotationsfläche nach. Im Fall des hier betrachteten Torus ist die Erzeugende durch  $(3 + \cos(v), 0, \sin(v))^T$  gegeben, so daß für die Gaußkrümmung

$$K(u, v) = \frac{\cos(v)}{3 + \cos(v)}$$

gilt. Speziell für den Äquator ( $v = 0$ ) erhält man daher die konstante Gaußkrümmung  $K(u, 0) = 1/4$  für alle  $0 \leq u \leq 2\pi$ . Wie bereits in Abschnitt 5.3 im Beweis von Korollar 5.3.2 benutzt, ergibt sich die Lösung der Jacobi Differentialgleichung für eine konstante Gaußkrümmung  $K$  längs der betrachteten Geodätischen durch

$$y(s) = y(0) \cos(\sqrt{K} s) + y'(0) \sin(\sqrt{K} s),$$

in geschlossener Form. Im Fall der hier betrachteten Progenitorkurve sind die Anfangswerte der Jacobi Gleichung durch  $y(0) = 1$  (die Tangentenlänge des erzeugenden Kreises entspricht seinem Radius) und  $y'(0) = -\kappa_g y(0) = 0$  (bogenlängenparametrisierte Erzeugende einer Rotationsfläche sind stets Geodätische Kurven, siehe z.B. [dC76], S. 255 ff.) gegeben. Daher ist die Funktion der vorzeichenbehafteten Tangentenlängen Geodätischer Offsetkurven  $y(s)$  längs des Äquators des betrachteten Torus durch  $y(s) = \cos(s/2)$  gegeben. Die Nullstellen dieser Funktion lauten  $s = (2k + 1)\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

Anhand dieser Rechnung erkennt man gleich mehrere Sachverhalte. Zum einen sind links- bzw. rechtsseitige Fokalfpunkte eines Progenitorobjekts keineswegs eindeutig bestimmt. Wir hatten auf diese Möglichkeit bereits vor der Formulierung von Definition 5.1.1 auf Seite 126 anhand des Beispiels der Kugel hingewiesen. Hier liegt uns nun ein weniger pathologisches Beispiel dieser Tatsache vor, da es sich im Fall des Torus um geometrisch verschiedene Fokalfpunkte handelt. Ferner sehen wir, daß in den bislang besprochenen Abbildungen 5.2 und 5.3 offenbar eine „Fokalkurve“ berechnet wurde, die nicht durch die Funktionen des Fokalen Abstands  $s_f^+(t)$  und  $s_f^-(t)$  aus Definition 5.1.1 induziert wurden. Dies erkennt man daran, daß der ermittelte Extremwert von  $s_f$ , wie oben erwähnt,  $\pm 9.42477796076746$  beträgt, was in etwa  $\pm 3\pi$  entspricht. Wie eben errechnet, beträgt der betragsmäßig minimale Wert jedoch  $\pi$ .

Der Grund für die Berechnung dieser Kurve ist in der Wahl des Anfangswerts der Fokalen Differentialgleichung zu sehen. Dieser wurde so gewählt, daß der zugehörige Fokalfpunkt Element der entfernteren Fokalkurve ist. Tatsächlich wurde diese „falsche“ Wahl des Anfangswerts durch Vorgabe eines Suchintervalls von  $[2\pi, 4\pi]$  für den initialen Fokalen Abstand provoziert. Bemerkenswert ist, daß unsere Methode auch für diese Fokalkurve erfolgreich war. Der zugehörige Wert  $y(s_f)$  eines mit Hilfe der Fokalen Differentialgleichung ermittelten Wertes  $s_f$  entspricht

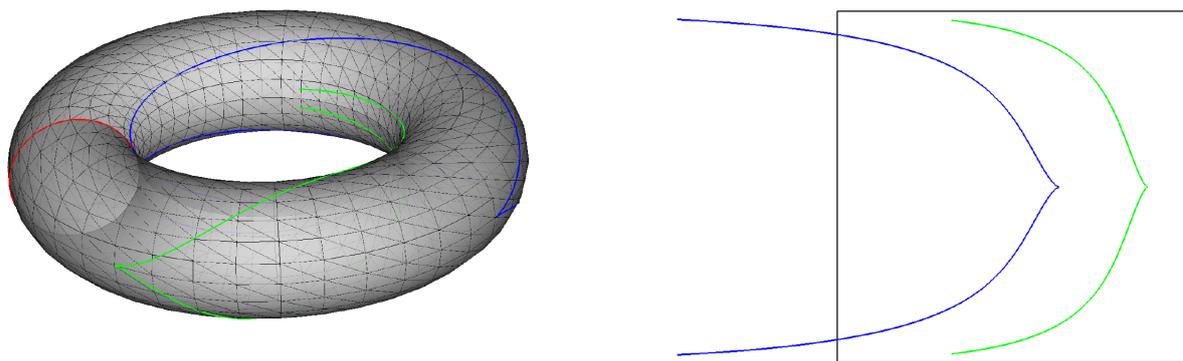


Abbildung 5.4: Linksseitige Fokalkurven der Erzeugenden des Torus

gleichzeitig dem Einsetzfehler von  $s_f$ , da für einen exakten Wert  $y(s_f) = 0$  gelten muß. In dem Beispiel der weiter entfernten Fokalkurve konnte ein maximales Residuum  $5 \cdot 10^{-10}$  erreicht werden. Der mittlere Fehler lag sogar bei lediglich  $10^{-11}$ . Natürlich behält die Fokale Differentialgleichung ihre Gültigkeit für alle gewählten Anfangswerte  $s_0 = s(t_0)$  mit der Eigenschaft  $y(s_0) = 0$ . Beachtlich werden die durch uns erzielten Resultate durch die Tatsache, daß für jeden Schritt des benutzten Differentialgleichungslösers die gestörte Jacobi Differentialgleichung gelöst werden muß. Erwartungsgemäß ist die numerisch ermittelte Lösung einer Differentialgleichung umso fehlerbehafteter, je größer das betrachtete Integrationsintervall ist. Für den Parameter  $t_0$  entspricht dieses Intervall für die gestörte Jacobi Differentialgleichung dem Bereich von Null bis zu dem zuletzt berechneten Wert  $s_f(t_0)$ . Für die im Beispiel von Abbildung 5.2 behandelte ferne Fokalkurve variierte der Fokale Abstand zwischen  $3\pi$  und über  $8.5\pi$ .

In Abbildung 5.4 sind zwei linksseitige Fokalkurven zu sehen. Die grüne Flächenkurve entspricht der „nahen“ Fokalkurve  $\omega$ , die definitionsgemäß durch den Fokalen Abstand  $s_f(t)$  induziert wird. Das exakte Minimum des Fokalen Abstands  $s_f$  beträgt (wie oben erläutert)  $\pi$ . Dieser Wert wurde durch unsere Berechnungen bis auf etwa 12 Nachkommastellen errechnet. Die blaue Kurve entspricht der eben besprochenen „fernen“ Fokalkurve (die ja im eigentlichen Sinn von Definition (5.3) keine Fokalkurve ist), welche bereits in Abbildung 5.2 zu sehen war. Bei der Fokalkurve handelt es sich nicht um eine geschlossene Kurve, wie man auch anhand der zugehörigen Parameterraumkurve erkennt (siehe ebenfalls Abbildung 5.4). Die Krümmung des Torus in einem Streifen um den inneren Äquator ist negativ, so daß die Erzeugende hier keinen Fokalpunkt besitzt. Die Funktion  $s_f$  besitzt folglich eine Polstelle.

Dieses Phänomen ist auch zu beobachten, wählt man auf dem Torus anstelle der Erzeugenden einen Progenitorpunkt, der Element des äußeren Äquators ist. Diese Situation ist in Abbildung 5.5 dargestellt, die zugehörige Situation im Parameterraum des Torus entnimmt man Abbildung 5.6. Der minimale Fokale Abstand wird in Richtung der Geodätischen Kurve angenommen, die dem Äquator entspricht. Wie man leicht nachrechnet, beträgt der exakte Wert  $2\pi$ . Wieder konnte dieser Wert mit einer Genauigkeit von etwa  $10^{-12}$  approximiert werden. Der Verlauf der Fokalkurve des betrachteten Progenitorpunkts sieht dem der Fokalkurve aus Abbildung 5.4 sehr ähnlich.

Abbildung 5.5 läßt erkennen, daß die Flächenkurve gegen Ende der Berechnung nicht mehr auf dem Torus verläuft. Tatsächlich war die berechnete Steigung  $s'_f(t)$  des Fokalen Abstands für einen tangentialen Parameter in der Nähe von  $t = \pm\pi/3$  verhältnismäßig groß (sie lag bei ca. 2000). Der Darstellung aus Abbildung 5.5 benutzt dagegen eine äquidistante Unterteilung des betrachteten Bereiches des Parameters  $t$ , der dem tangentialen Winkel an dem Progenitorpunkt

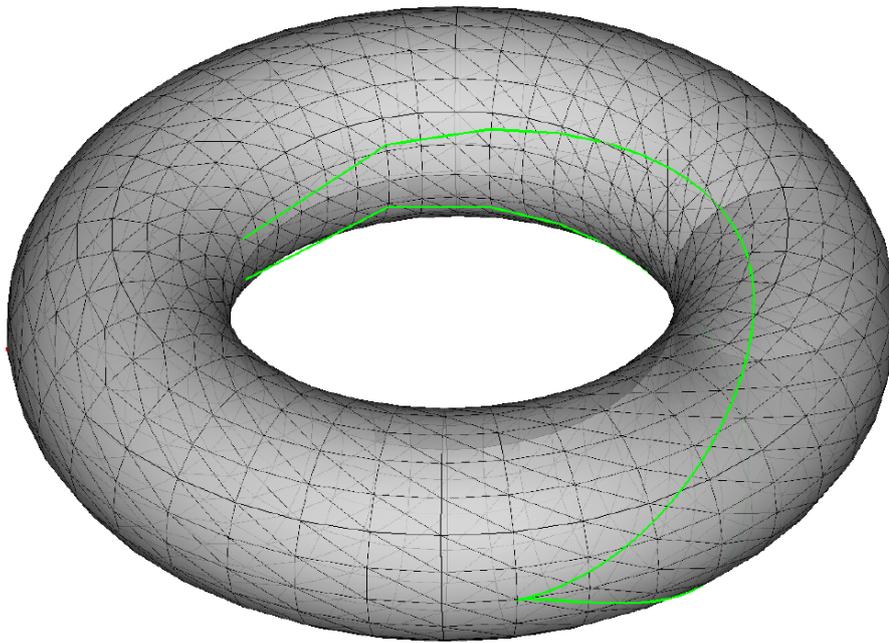


Abbildung 5.5: Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einem Torus

entspricht. Der durch unsere Berechnungen ermittelte zugehörige fokale Abstand dieser äquidistanten Parameter wurde dazu benutzt, um als Näherung der Fokalkurve einen interpolierenden Polygonzug des  $\mathbb{R}^3$  zu ermitteln. Bei schnellem Wachstumsverhalten von  $s_f$  ergibt sich daher das in [Abbildung 5.5](#) zu erkennende Problem eines nicht mehr auf dem Torus verlaufenden Polygonzugs. Eine adaptive Unterteilung des Winkelbereichs würde die Lösung dieses Problems bedeuten.

Darüberhinaus deutet ein großer Wert von  $s'_f$  darauf hin, daß sich der betrachtete Parameter  $t$  in der Nähe einer Polstelle des fokalen Abstands befindet. Eine numerische Behandlung der fokalen Differentialgleichung ist hier nicht mehr möglich. Einerseits steigt die Berechnungszeit in der Nähe einer Polstelle rapide an, da die geodätischen Abstände (betragsmäßig) immer größer werden und damit die in jedem Schritt zu lösende gestörte Jacobi Gleichung mehr Rechenzeit

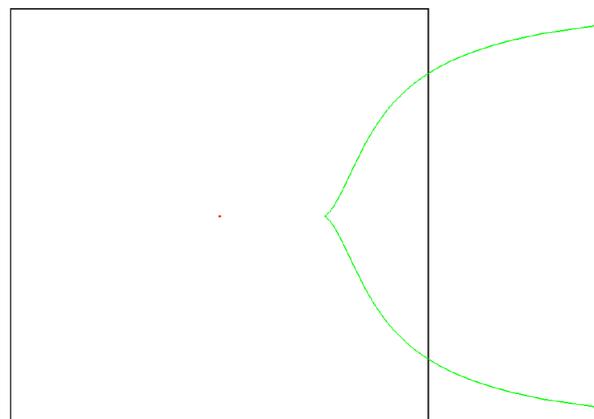


Abbildung 5.6: Parameterraumkurve der Fokalkurve aus [Abbildung 5.5](#)

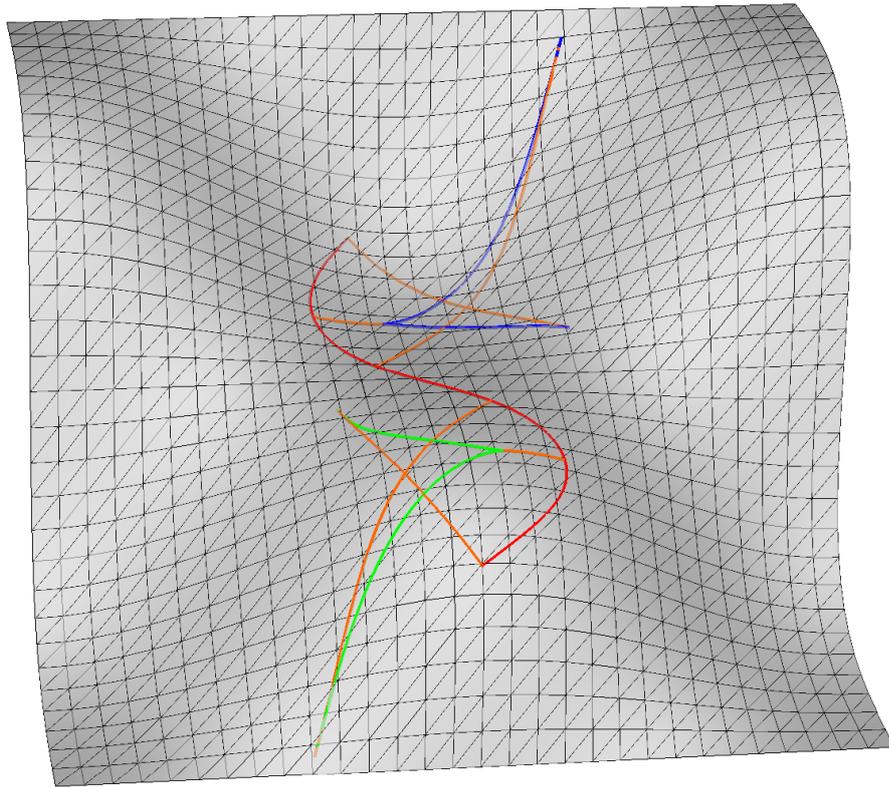


Abbildung 5.7: Fokalkurve einer BSpline-Kurve auf einer wellenförmigen Fläche

beansprucht. Andererseits wird der absolute Fehler der Approximation natürlich größer, so daß die gesamte Berechnung nicht mehr stabil sein kann. Im Beispiel von Abbildung 5.5 erreichte der Einsetzfehler in der Nähe von  $t = 1$  lediglich einen Wert von etwa  $10^{-9}$ , im Gegensatz zu einem mittleren Residuum von ca.  $5 \cdot 10^{-11}$  für  $0 \leq t \leq 0.95$ .

Als nächstes Beispiel wollen wir erneut die Fläche betrachten, die durch die Parametrisierungsabbildung

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \cos(u) \sin(v))^T$$

gegeben ist (vgl. auch Abbildungen 4.15 bis 4.18 in Abschnitt 4.6). Als Progenitorobjekt betrachten wir eine BSpline-Kurve vom Grad 3 zum Knotenvektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1)$  und deBoor-Kontrollpunkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

im Parameterraum der Fläche, welcher als  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  vereinbart wurde. Diese schlangenförmige Progenitorcurve wurde in Abbildung 5.7 und 5.8 in rot eingezeichnet. Die Berechnungen ergaben für diese Konfiguration eine rechtsseitige Fokalkurve (grün), die hier für die Parameterwerte  $0 \leq t \leq 0.4$  eingezeichnet wurde, so wie eine linksseitige, in blauer Farbe gekennzeichnete Fokalkurve, deren zugehöriger Progenitorparameter im Bereich  $0.6 \leq t \leq 1$  liegen.

Die sechs orangefarbenen Kurven repräsentieren Geodätische Kurven, die im rechten Winkel zur Progenitorcurve starten, und bis zum zugehörigen Fokalen Abstand berechnet wurden. Die Kurvenparameter  $t_i$ , an denen die einzelnen Geodätischen starten, betragen 0, 0.2100475, 0.4,

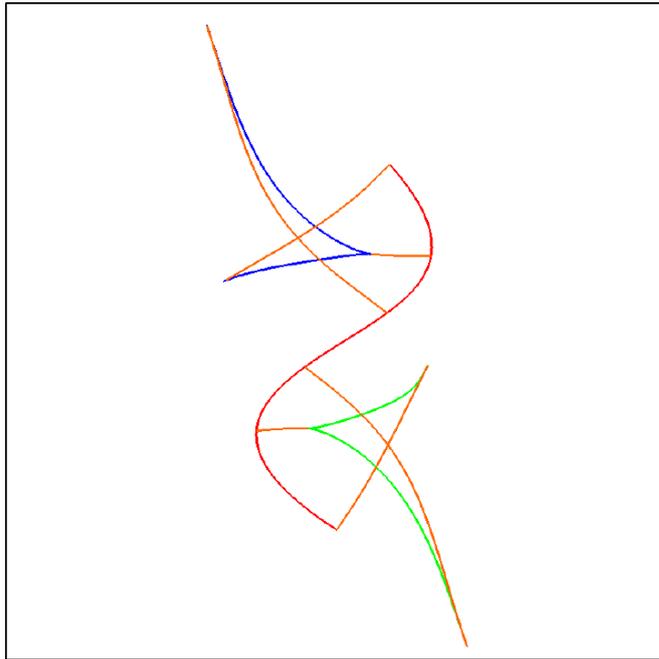


Abbildung 5.8: Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.7

0.6, 0.7939515 und 1. Die Parameter  $t_2 = 0.2100475$  bzw.  $t_5 = 0.7939515$  der zweiten bzw. fünften Geodätischen entsprechen den ermittelten Extrema des links- bzw. rechtsseitigen Fokalen Abstands, die durch die Werte  $s_f^-(t_2) = -0.523502286575703$  bzw.  $s_f^+(t_5) = 0.617495438824385$  genähert werden.

Im Parameterintervall  $(0.4, 0.6)$  der Progenitorcurve fand keine Berechnung statt. Der Grund hierfür ist die Nähe einer Polstelle des Fokalen Abstands. Aus den oben erläuterten Gründen nahm die Rechenzeit für  $t > 0.4$  bei abnehmender Approximationsgenauigkeit erwartungsgemäß enorm zu. Darüberhinaus verläßt die zugehörige Fokalkurve den dargestellten Parameterbereich der Fläche kurz nach Überschreiten dieses Wertes. Für alle sechs in Abbildung 5.7 bzw. 5.8 eingezeichneten Geodätischen Kurven kann man die in Gleichung (5.4) bewiesene Kollinearität der Geodätischen Tangente und der Tangente der Fokalkurve erkennen.

Als letzter Problemklasse wollen wir uns der bereits in Abschnitt 2.4 betrachteten Glockenfläche widmen, die durch die Parametrisierungsabbildung gemäß Gleichung (2.16) zu einem Höhenparameter  $h$  und einer Öffnungsweite  $w$  gegeben ist (siehe auch Abbildung 2.3 bis 2.6 auf Seite 34 ff.). Für Abbildung 5.9 wurden die Parameter  $h = 2$  und  $w = 1$  gewählt. Als Progenitorobjekt wählen wir den Punkt  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0, 2)^T$  des Parameterraums  $[-4.5, 4.5] \times [-6.5, 2.5]$  der Fläche. Die resultierende Approximation der Fokalkurve wurde in Abbildung 5.9 und in 5.10 in blauer Farbe eingezeichnet. Der berücksichtigte Parameterbereich entspricht mit  $[1.3540927, 1.7875]$  einem Intervall, dessen Mitte in etwa  $\pi/2$  entspricht. Aus Symmetriegründen induziert  $t = \pi/2$  ein Minimum des Fokalen Abstands, was man auch anhand der Spitze der Fokalkurve erkennen kann.

Neben der in blau eingezeichneten Fokalkurve erkennt man sowohl in Abbildung 5.9 als auch in 5.10 mehrere Geodätische Offsetkurven um den gewählten Progenitorpunkt. Die zugrundeliegenden Abstände betragen 3.5 (Rot), 4 (Orange) und 4.5 (Grün). Gut zu erkennen sind die Spitzen der Geodätischen Offsetkurven. Sie entsprechen Fokalpunkten des Progenitorobjekts in

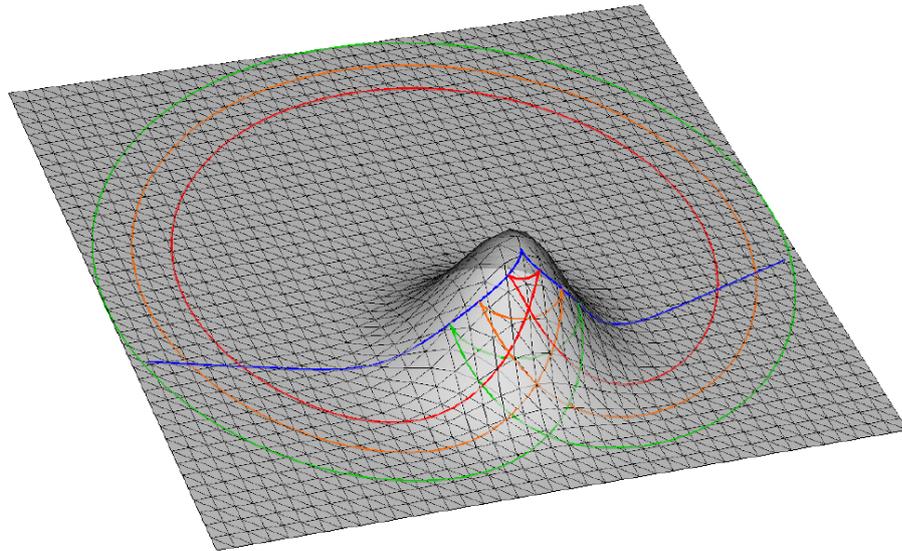


Abbildung 5.9: Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einer Glockenfläche (I)

den jeweiligen Geodätischen Abständen, und liegen daher auf der Fokalkurve. Aufgrund der Selbstüberschneidungen der Geodätischen Offsets erkennt man, daß die Fokalfpunkte mit Hilfe eines Geodätischen Kurvensegments mit  $\mathbf{p}$  zu verbinden sind, dessen Länge kleiner als der Fokale Abstand  $s_f$  ist.

Noch komplizierter gestaltet sich die Situation, wenn der Höhenparameter der Glockenfläche als  $h = 4$  (bei gleicher Öffnungsweite  $w = 1$ ) festgelegt wird. Zur besseren Übersicht wurden mit den Abbildungen 5.11 und 5.12 zwei verschiedene Ansichten der gleichen Situation eingefügt. Den besten Überblick verschafft man sich dennoch mit Hilfe von Abbildung 5.13, in der die zugehörigen Parameterraumkurven zu sehen sind. Als Geodätische Abstände der einzelnen Offsetkurven

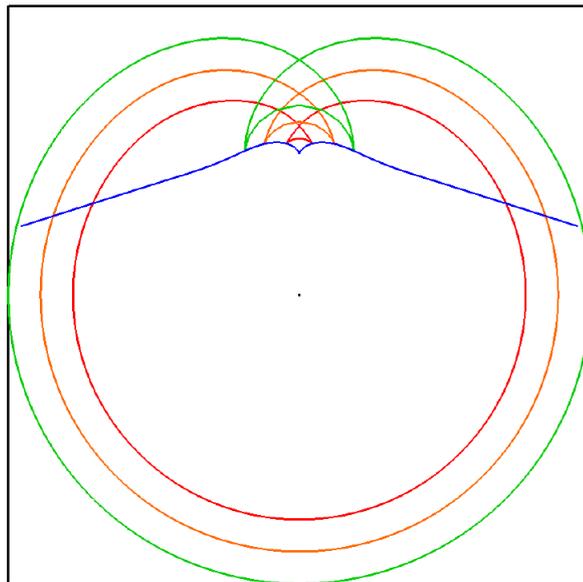


Abbildung 5.10: Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.9

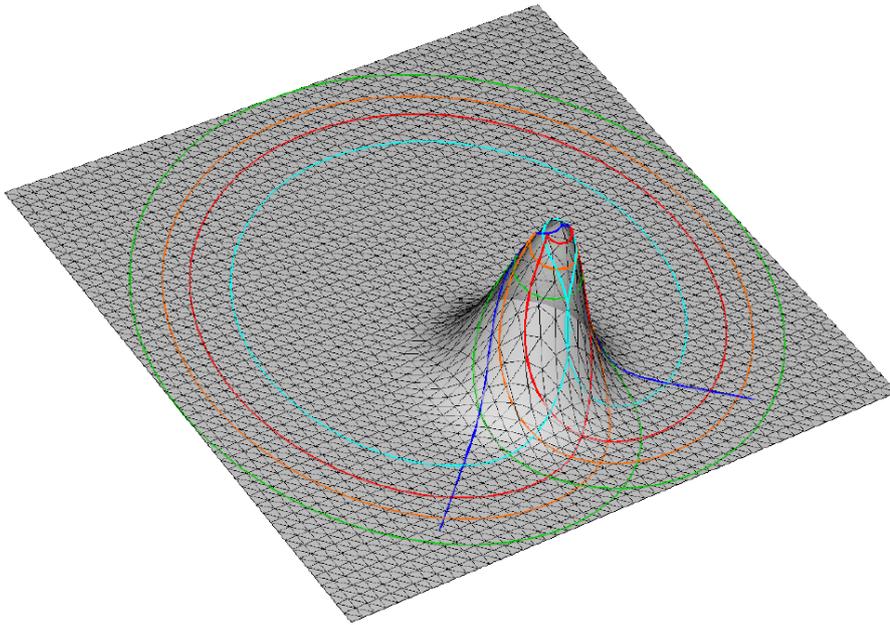


Abbildung 5.11: Fokalkurve eines Progenitorpunktes auf einer Glockenfläche (II)

wurde nun 4.25 (Magenta), 5 (Rot), 5.5 (Orange) und 6.1 (Grün) gewählt. Der magentafarbene Offset besitzt keine Spitze, der Abstand 4.25 induziert daher keinen Fokalkpunkt.

Abbildung 5.13 erscheint deshalb so unübersichtlich, da einerseits der grüne Offset im Abstand 6.1 insgesamt fünf Selbstüberschneidungen hat, andererseits sogar die Fokalkurve (in blau eingezeichnet) einen Doppelpunkt besitzt. Der minimale Fokale Abstand liegt wieder für den Progenitorparameter  $\pi/2$  mit einem Wert von ca. 4.63312889131357 vor. Der zugehörige Fokalkpunkt befindet sich aus Sicht des Progenitorpunktes knapp hinter der Hügelspitze.

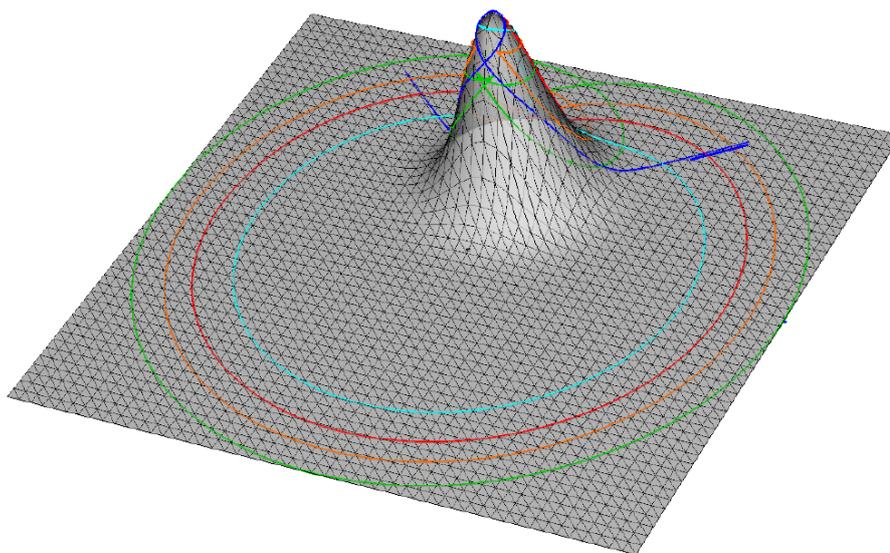


Abbildung 5.12: Zweite Ansicht der Fokalkurve aus Abbildung 5.11

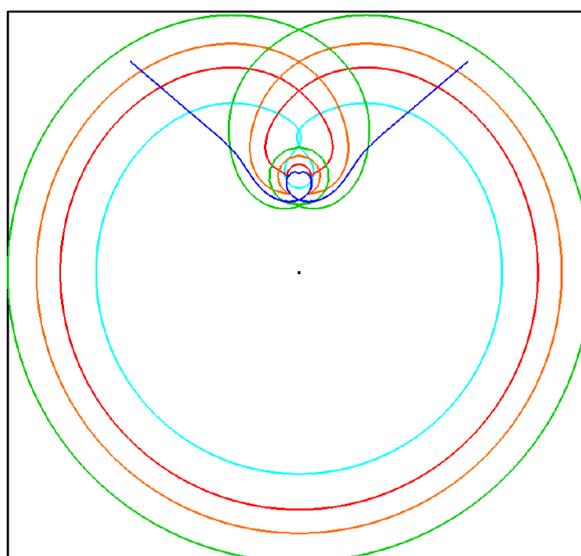


Abbildung 5.13: Parameterraumkurve der Fokalkurve aus Abbildung 5.11 und 5.12



# Kapitel 6

## Mediale Achsen

### 6.1 Cut Locus und Mediale Achse

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Schnittorts und der Medialen Achse in komprimierter Form einführen. Wir folgen hierbei im wesentlichen den Darstellungen in [Wol85], wo der Cut Locus für Riemannsche Mannigfaltigkeiten eingeführt wird. In unserem Kontext beschränken wir uns jedoch auf den Spezialfall regulärer parametrischer Flächen  $S$ . Solange nicht explizit anders gefordert, soll  $S$  mindestens zweimal stetig differenzierbar sein.

#### Definition 6.1.1

*Sei  $A \subset S$  eine abgeschlossene Teilmenge der parametrischen Fläche  $S$ . Ein Punkt  $\mathbf{p} \in (S - \partial S)$  heißt Pica bezüglich  $A$ , wenn es mindestens zwei verschiedene kürzeste Pfade von  $\mathbf{p}$  nach  $A$  gibt, die in  $\mathbf{p}$  unterschiedliche Tangentenrichtungen besitzen.*

Für eine mindestens  $C^3$ -stetige Fläche  $S$  kann gezeigt werden, daß jeder kürzeste Pfad zwischen zwei Punkten, der keine Randpunkte von  $S$  enthält, eine Geodätische Kurve ist (vgl. [dC76], S. 302, oder auch [BL73], S. 196 ff.). Die Existenz von Hindernissen (die etwa bei getrimmten Flächen durch Herauslöcher einer offenen Teilmenge der Ausgangsfläche entstehen) kann dafür verantwortlich sein, daß kürzeste Pfade teilweise auf dem Rand der Fläche verlaufen. Dessen ungeachtet können Picas auch für getrimmte Flächen betrachtet werden, obwohl die Situation hier (insbesondere im Hinblick auf die Berechenbarkeit kürzester Pfade) ungleich schwieriger ist. Daß Randpunkte von  $S$  gemäß Definition 6.1.1 nicht als Picas zugelassen sind, hat vorwiegend technische Gründe, auf die wir weiter unten eingehen werden.

Eine Möglichkeit, den Cut Locus einer abgeschlossenen Menge einzuführen, benutzt implizit den soeben definierten Begriff. Folgende Definition erklärt den Schnittort als den Abschluß der Menge aller Picas.

#### Definition 6.1.2

*Der Cut Locus oder Schnittort  $\mathcal{C}(A)$  einer abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset S$  der regulären parametrischen Fläche  $S$  ist der Abschluß der Menge aller Punkte in  $S$ , die mindestens zwei verschiedene kürzeste Verbindungspfade in  $S$  zu  $A$  besitzen.*

Die Definition des Cut Locus stellt keine weiteren Anforderungen an die betrachtete Menge  $A$ . Um gewisse pathologische Fälle ausschließen zu können, werden wir jedoch später gewisse

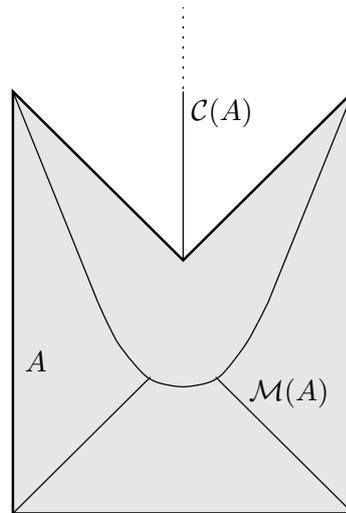


Abbildung 6.1: Cut Locus und Mediale Achse eines polygonalen Gebiets der Ebene

Regularitätsbedingungen an den Rand  $\partial A$  stellen. Zu beachten bei Definition 6.1.2 ist, daß der Schnittort als *abgeschlossene* Menge definiert ist. Dies erweist sich in vieler Hinsicht als wesentlich (vgl. dazu [Wol85]). In Abbildung 6.1 wurde eine polygonal berandete Menge  $A$  betrachtet, die dort schraffiert dargestellt wird. Der Cut Locus dieser Menge besteht aus der Halbgeraden, die von der Konkavecke des Polygons ausgeht. Die Ecke selbst ist aufgrund der Abschlußbildung ebenfalls Element des Schnittorts.

### Definition 6.1.3

Die Mediale Achse  $\mathcal{M}(A)$  einer abgeschlossenen Menge  $A \subset S$  ist der Durchschnitt des Cut Locus des Randes  $\partial A$  mit der Menge selbst, d.h. es gilt  $\mathcal{M}(A) := \mathcal{C}(\partial A) \cap A$ .

In Abbildung 6.1 wurde ferner die Mediale Achse des Gebietes  $A$  eingezeichnet. Nach Definition 6.1.3 ergibt sich diese als „innerer“ Cut Locus des Randes von  $A$ . Auch bei der Medialen Achse ist zu beachten, daß die (in diesem Fall konvexen) Eckpunkte von  $A$  zu  $\mathcal{M}(A)$  gehören. Insbesondere ist die Mediale Achse als Schnittmenge zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen. Im Fall polygonaler Gebiete der Ebene kann gezeigt werden, daß die Mediale Achse stückweise aus Geraden und Parabelabschnitten besteht (vgl. [Gru97]). Die in Abbildung 6.1 zu erkennende Mediale Achse ist ein Beispiel dieser Tatsache.

Wolter konnte in [Wol85] für den Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten mehrere verschiedene Charakterisierungen des Schnittorts angeben, so daß die hier gewählte Art, den Cut Locus einzuführen, einigermaßen willkürlich ist. Um eine wichtige Beschreibung des Cut Locus (und damit auch der Medialen Achse) formulieren zu können, führen wir den folgenden Begriff ein.

### Definition 6.1.4

Ein Punkt  $\mathbf{p} \in (S - \partial S)$  heißt *Non-Extender* bezüglich einer abgeschlossenen Menge  $A \subset S$ , wenn eine kürzeste Verbindung von  $A$  nach  $\mathbf{p}$  (in  $S$ ) existiert, die nicht über den Punkt  $\mathbf{p}$  hinaus distanzminimal zu  $A$  verlängert werden kann. Alle anderen Punkte werden entsprechend *Extender* genannt.

Nach Definition 6.1.4 verliert also jeder distanzminimale Pfad von  $A$  nach  $\mathbf{p}$  seine Minimalitätseigenschaft in dem Punkt  $\mathbf{p}$ . Dies kann auch in der folgenden Weise umschrieben werden: Der

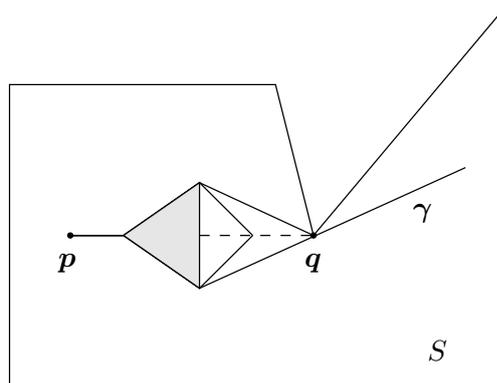


Abbildung 6.2: Cut Locus eines Punktes in einer polygonal berandeten Mannigfaltigkeit

Punkt  $p \in S$  ist ein Non-Extender, wenn ein distanzminimaler, bogenlängenparametrisierter Pfad  $\gamma \subset S$  mit  $\gamma(0) \in A$  und  $\gamma(L) = p$  existiert, so daß für alle  $\varepsilon > 0$  ein Pfad von  $A$  nach  $\gamma(L + \varepsilon)$  existiert, dessen Bogenlänge kleiner als  $L + \varepsilon$  ist. Der folgende Hilfssatz zeigt einen ersten Zusammenhang zwischen Picas und Non-Extendern.

### Lemma 6.1.5

*Jeder Pica bezüglich einer abgeschlossenen Menge  $A$  ist gleichzeitig Non-Extender bezüglich  $A$ .*

#### Beweis:

Wir wollen den Nachweis der Aussage durch einen Widerspruchsbeweis führen und nehmen daher die Existenz eines Picas  $p$  an, welcher ein Extender ist. Aufgrund der Eigenschaft von Picas können wir die Existenz zweier verschiedener kürzester Pfade  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  von  $A$  nach  $p$  annehmen. Ihre Länge sei mit  $d$  bezeichnet. Der Punkt  $p$  ist nach Definition genau dann ein Extender, wenn ein kürzester Pfad über  $p$  hinaus distanzminimal fortgesetzt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß es sich bei diesem Pfad um  $\gamma_1$  handelt. Es existiert also ein  $\varepsilon > 0$ , so daß der um den Abstand  $\varepsilon$  über  $p$  hinaus verlängerte Pfad  $\bar{\gamma}_1$  eine kürzeste Verbindung zwischen dem so erreichten Punkt  $q$  und  $A$  ist. Die Konstante  $\varepsilon$  kann aufgrund von  $p \notin \partial S$  so gewählt werden, daß für den abgeschlossenen Abstandskreis (vgl. Definition 2.4.4 auf Seite 35)  $\bar{B}_\varepsilon(p) \subset S$  gilt. Für den Abstand von  $q$  zu  $A$  gilt nach Konstruktion  $\text{dist}(A, q) = d + \varepsilon$ .

Für den Schnittpunkt  $w_2 := \gamma_2 \cap \partial B_\varepsilon(p)$  der zweiten Kürzesten mit dem Rand des  $\varepsilon$ -Kreises um  $p$  gilt offensichtlich  $\text{dist}(A, w_2) = d - \varepsilon$ . Ferner gilt  $\text{dist}(w_2, q) \leq 2\varepsilon$ . Falls die letzte Ungleichung strikt wäre, so würde die Abschätzung

$$d + \varepsilon = \text{dist}(A, q) \leq \text{dist}(A, w_2) + \text{dist}(w_2, q) < d - \varepsilon + 2\varepsilon = d + \varepsilon$$

einen Widerspruch zur Annahme liefern. Falls jedoch  $\text{dist}(w_2, q) = 2\varepsilon$  gelten würde, so erhält man durch Betrachtung des Punkts  $w_1 := \gamma_1 \cap \partial B_\varepsilon(p)$  auf der ersten Kürzesten aufgrund von  $\text{dist}(w_1, q) < 2\varepsilon$  in analoger Weise einen Widerspruch zur Annahme. ■

Zum Gelingen der zuletzt vorgetragenen Argumentation ist allerdings wesentlich, daß ein Randpunkt von  $S$  per Definition kein Pica sein kann. (Im Beweis garantierte dies die Existenz eines  $\varepsilon$ -Kreises, dessen Abschluß ganz in  $S$  liegt.) Würde man solche „Rand-Picas“ zulassen, wäre die Aussage des letzten Hilfssatzes falsch. Dazu betrachte man das Beispiel aus Abbildung 6.2,

das bereits in [Wol85] behandelt wurde. Die betrachtete Fläche  $S$  stellt das polygonal berandete Gebiet dar, aus dem ein Dreieck gelocht wurde. Die gestrichelte Linie entspricht dem Cut Locus des Punktes  $\mathbf{p}$ , da jeder Linienpunkt zwei kürzeste Verbindungen zu  $\mathbf{p}$  besitzt. Dies trifft auch für den Randpunkt  $\mathbf{q} \in \partial S$  zu, der jedoch nach Definition 6.1.1 (eben aufgrund von  $\mathbf{q} \in \partial S$ ) kein Pica ist.  $\mathbf{q}$  liegt aber im Abschluß aller Picas, folglich gilt  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}(A)$ . Der Pfad  $\gamma$  zeigt schließlich, daß  $\mathbf{q}$  auf alle Fälle ein Extender bezüglich  $\mathbf{p}$  ist.

Die Umkehrung von Lemma 6.1.5 ist i.a. *nicht* richtig. Weiter unten werden wir diesen Sachverhalt anhand der sogenannten Fokalstartpunkte der Medialen Achse eingehender studieren. Offensichtlich existiert jedoch ein enger Zusammenhang zwischen Non-Extendern und Picas (und damit zum Schnittort von  $A$ ). Nach [Wol85], S. 52 ff., gilt die folgende Charakterisierung des Cut Locus, der diesen Zusammenhang genauer beleuchtet.

### Lemma 6.1.6

*Der Cut Locus  $\mathcal{C}(A)$  stimmt mit dem Abschluß der Menge aller Non-Extender bezüglich  $A$  überein. Folglich entspricht die Mediale Achse dem Abschluß aller Non-Extender bezüglich  $\partial A$ , die Elemente von  $A$  sind.*

Eine Implikation des letzten Hilfssatzes ist, daß jede Folge von Non-Extendern ihre Häufungspunkte in dem Schnittort selbst besitzt. Allerdings kann man daraus i.a. *nicht* schließen, daß der Grenzwert einer Folge von Non-Extendern wieder ein Non-Extender ist. Ein Gegenbeispiel, das dieses Phänomen belegt, findet man in [Wol92], Seite 8.

### Bemerkung 6.1.7

*Nach Definition 6.1.2 ist die Menge aller Picas dicht in  $\mathcal{C}(A)$ . Daher kann jeder Non-Extender als Grenzwert einer Folge von Picas dargestellt werden.*

In Abschnitt 2.4 hatten wir in Definition 2.4.4 auf Seite 35 den Begriff des Geodätischen (Abstands-)Kreises  $B_\rho(\mathbf{p})$  im Abstand  $\rho$  um einen Flächenpunkt  $\mathbf{p} \in S$  eingeführt, der, daran sei an dieser Stelle noch einmal erinnert, i.a. nur eine Teilmenge der Geodätischen Offsetkurve um  $\mathbf{p}$  ist. Im Zusammenhang mit der Medialen Achse wird es sich als sinnvoll erweisen, den folgenden Begriff einzuführen.

### Definition 6.1.8

*Sei  $A \subset S$  eine abgeschlossene Menge. Ein abgeschlossener Geodätischer Kreis  $\overline{B_\rho(\mathbf{p})} \subset A$  mit  $\rho > 0$  heißt maximaler einbeschriebener Kreis von  $A$ , wenn für alle  $\mathbf{q} \in A$  und alle  $r > 0$  aus der Eigenschaft  $\overline{B_\rho(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$  die Gleichheit der Mittelpunkte  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$  und der Geodätischen Radien  $r = \rho$  folgt.*

Die beiden folgenden Hilfssätze werden zeigen, wie man mit Hilfe des Begriffs des maximal einbeschriebenen Kreises eine bessere Intuition zu der Mediale Achse eines abgeschlossenen Gebiets  $A$  entwickeln kann. Sie charakterisieren die Non-Extender-Punkte der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$  als Mittelpunkte maximal einbeschriebener Kreise von  $A$ . Zur besseren Übersicht haben wir diese Behauptung in zwei separate Aussagen aufgeteilt. Für den Euklidischen Fall wurden sie von Wolter in [Wol92], Seite 10 ff., bewiesen. Unsere Version stellt ihre Verallgemeinerung für parametrische Flächen bereit. Die Beweisführung selbst folgt im wesentlichen den Ideen aus [Wol92].

**Lemma 6.1.9**

Jeder Non-Extender  $\mathbf{p} \in A$  von  $\partial A$  ist Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises von  $A$ .

**Beweis:**

Da  $\mathbf{p}$  nach Voraussetzung ein Non-Extender bezüglich  $\partial A$  ist, existiert ein kürzester Pfad von  $\partial A$  nach  $\mathbf{p}$ . Der zugehörige Randpunkt sei mit  $\mathbf{w} \in \partial A$  bezeichnet, der entsprechende Abstand mit  $d := \text{dist}(\partial A, \mathbf{p}) = \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ .

Wir zeigen zunächst  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset A$ . Dazu nehmen wir im Gegenteil an, es gäbe ein  $\mathbf{v} \in (S - A) \cap \overline{B_d(\mathbf{p})}$ . Da insbesondere  $\mathbf{v} \in \overline{B_d(\mathbf{p})}$  gilt, gibt es eine (stückweise) bogenlängenparametrisierte Verbindungskurve  $\gamma \subset S$  mit der Eigenschaft  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  und  $\gamma(L) = \mathbf{v}$ , wobei  $L \leq d$  gilt. Da ferner  $\mathbf{v} \notin A$  nach Annahme erfüllt ist, existiert ein Parameter  $s \in (0, L)$ , so daß  $\gamma(s) \in \partial A$  gilt. Damit erhält man jedoch

$$\text{dist}(\partial A, \mathbf{p}) \leq \text{dist}(\gamma(s), \mathbf{p}) < L \leq d = \text{dist}(\partial A, \mathbf{p}),$$

was die Annahme  $\mathbf{v} \in (S - A) \cap \overline{B_d(\mathbf{p})}$  widerlegt, so daß wir  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset A$  schließen können.

Es verbleibt, die Maximalität von  $\overline{B_d(\mathbf{p})}$  zu zeigen. Angenommen es existiert ein  $\mathbf{q} \in A$  und ein  $r > d$ , so daß  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$  gilt. Wegen  $\mathbf{w} \in \overline{B_d(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})}$  gilt zunächst  $\text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) \leq r$ . Wäre jedoch  $r - \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) > 0$  erfüllt, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $B_\varepsilon(\mathbf{w}) \subset \overline{B_r(\mathbf{q})}$  gegeben wäre. Wegen  $\mathbf{w} \in \partial A$  enthält  $B_\varepsilon(\mathbf{w})$  für alle  $\varepsilon > 0$  auch Punkte des Komplements  $(S - A)$  von  $A$ , was jedoch im Widerspruch zur Annahme  $\overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$  stünde. Daher muß  $\text{dist}(\partial A, \mathbf{q}) \leq \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = r$  erfüllt sein. Andererseits folgt aus  $\overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$  gleichzeitig  $\text{dist}(\partial A, \mathbf{q}) \geq r$ , so daß wir

$$\text{dist}(\partial A, \mathbf{q}) = \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = r$$

schließen können. Wir bezeichnen mit  $\gamma_p$  bzw.  $\gamma_q$  das bogenlängenparametrisierte, distanzminimale Verbindungssegment von  $\mathbf{w} \in \partial A$  nach  $\mathbf{p}$  bzw.  $\mathbf{q}$ . Insbesondere gelte also

$$\gamma_p(0) = \mathbf{w} = \gamma_q(0), \quad \gamma_p(d) = \mathbf{p}, \quad \gamma_q(r) = \mathbf{q}.$$

Da beide Pfade in  $\overline{B_d(\mathbf{p})}$  bzw.  $\overline{B_r(\mathbf{q})}$  enthalten sind, müssen beide Kurven Geodätische sein. (Andernfalls müßten sie den Rand von  $A$  auf ihrem Weg von  $\mathbf{w}$  nach  $\mathbf{p}$  bzw.  $\mathbf{q}$  treffen, was im Widerspruch zu ihrer Distanzminimalität stünde.) Der Rand des Geodätischen Abstandskreises  $\overline{B_d(\mathbf{p})}$  bzw.  $\overline{B_r(\mathbf{q})}$  ist in  $\mathbf{w}$  orthogonal zu der Startrichtung  $\gamma_p'(0)$  bzw.  $\gamma_q'(0)$  der jeweiligen Geodätischen (vgl. Hilfssatz 2.4.2 auf Seite 32). Aufgrund der Inklusion  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})}$  muß die Identität

$$\gamma_p'(0) = \gamma_q'(0)$$

erfüllt sein, da sonst die Ränder beider Abstandskreise einen transversalen Schnitt in  $\mathbf{w}$  besäßen. Aufgrund der Eindeutigkeit bogenlängenparametrisierter Geodätischer Kurven bei Vorgabe von Startpunkt und -richtung muß folglich  $\text{Spur}(\gamma_p) \subset \text{Spur}(\gamma_q)$  gelten. Aufgrund der Annahme  $r > d$  könnte die kürzeste Verdingung  $\gamma_p$  folglich distanzminimal über den Punkt  $\mathbf{p} = \gamma_p(d)$  hinaus verlängert werden, so daß  $\mathbf{p}$  ein Extender bezüglich  $\partial A$  wäre. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, nach der  $\mathbf{p}$  ein Non-Extender ist. ■

**Lemma 6.1.10**

Jeder Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises von  $A$  ist ein Non-Extender bezüglich  $\partial A$ .

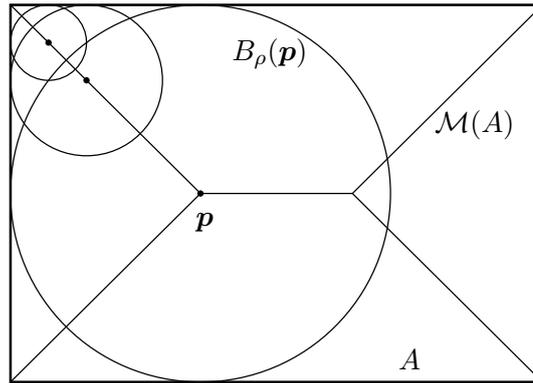


Abbildung 6.3: Mediale Achse und maximal eingeschriebene Kreise

**Beweis:**

Es sei  $\overline{B_d(\mathbf{p})}$  mit  $d > 0$  und  $\mathbf{p} \in A$  ein maximal eingeschriebener Kreis von  $A$ . Offensichtlich muß der Rand dieses Abstandskreises einen Randpunkt  $\mathbf{w} \in \partial A$  enthalten. Wäre nämlich  $\text{dist}(\partial A, \overline{B_d(\mathbf{p})}) = \varepsilon > 0$ , so wäre mit einer Wahl von  $\rho := d + \varepsilon/2$  der Kreis  $\overline{B_\rho(\mathbf{p})}$  ganz in  $A$  enthalten, was im Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft des Ausgangskreises steht. Sei also  $\mathbf{w} \in \partial A \cap \overline{B_d(\mathbf{p})}$ . Für diesen Punkt gilt insbesondere

$$\text{dist}(\partial A, \mathbf{p}) = \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = d.$$

Daher gibt es einen bogenlängenparametrisierten, distanzminimalen Pfad  $\gamma$  mit der Eigenschaft  $\gamma(0) = \mathbf{w}$  und  $\gamma(d) = \mathbf{p}$ . Da ferner  $\gamma$  für  $0 < s \leq d$  in dem Inneren des Abstandskreises  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset A$  verläuft, kann  $\gamma(s)$  kein Randelement von  $A$  sein. Daher muß  $\gamma$  ein Geodätisches Segment zwischen  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{p}$  sein.

Wir nehmen in Negation zu der zu zeigenden Aussage an, daß  $\mathbf{p}$  ein Extender bezüglich  $\partial A$  ist. Unter dieser Annahme gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß das verlängerte Geodätische Segment von  $\mathbf{w}$  nach  $\mathbf{q} := \gamma(d + \varepsilon/2)$  ein distanzminimaler Pfad ist. Aus dieser Eigenschaft ergibt sich allerdings  $\text{dist}(\partial A, \mathbf{q}) = \text{dist}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = d + \varepsilon/2$ , so daß der zugehörige Abstandskreis  $\overline{B_{d+\varepsilon/2}(\mathbf{q})} \subset A$  genügen muß. Für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x} \in \overline{B_d(\mathbf{p})}$  gilt nun

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq d + \frac{\varepsilon}{2},$$

so daß auch  $\mathbf{x} \in \overline{B_{d+\varepsilon/2}(\mathbf{q})}$  erfüllt ist. Damit wäre allerdings  $\overline{B_d(\mathbf{p})} \subset \overline{B_{d+\varepsilon/2}(\mathbf{q})} \subset A$  gezeigt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, daß  $\overline{B_d(\mathbf{p})}$  ein maximal eingeschriebener Kreis von  $A$  ist. ■

Unter Verwendung der letzten beiden Hilfsätze ergibt sich aus Lemma 6.1.6 sofort die folgende Aussage.

**Korollar 6.1.11**

*Die Mediale Achse  $\mathcal{M}(A)$  eines abgeschlossenen Teilgebietes  $A \subset S$  ist der Abschluß der Menge von Mittelpunkten in  $A$  maximal eingeschriebener Kreise.*

Anhand von Abbildung 6.1 haben wir oben bereits erläutert, daß die konvexen Eckpunkte des Gebietes  $A$  aufgrund der Abschlußbildung zur Medialen Achse gehören. Mit Hilfe maximal eingeschriebener Kreise kann man sich diese Eigenschaft gut veranschaulichen. In Abbildung 6.3

erkennt man die Mediale Achse eines Rechtecks der Euklidischen Ebene. Gleichzeitig wurden drei maximal einbeschriebene Kreise eingezeichnet. Betrachtet man ausgehend von dem Punkt  $\mathbf{p}$  (der im übrigen ein Verzweigungspunkt von  $\mathcal{M}(A)$  ist) eine Folge von Non-Extendern, die gegen die linke obere Ecke des Rechtecks strebt, so ist die zugehörige Folge der Radien der maximal einbeschriebenen Kreise streng monoton fallend. Im Grenzwert erhält man folglich einen „Kreis“ mit Radius Null.

## 6.2 Eigenschaften der Medialen Achse

Im folgenden wollen wir einige zusätzliche Forderungen an die betrachtete Menge  $A$  stellen, so daß für die resultierende Mediale Achse gewisse pathologische Phänomene ausgeschlossen werden können. Diese Bedingungen können wie folgt zusammengefaßt werden:

- (A) Sei  $S$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A$  eine  $m$ -fach zusammenhängende ( $m < \infty$ ), abgeschlossene, zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $S$ , deren Rand  $\partial A$  zweimal stetig differenzierbar ist.

Die Differenzierbarkeitsanforderung an den Rand  $\partial A$  ist wie folgt zu verstehen: Da  $A$  eine  $m$ -fach zusammenhängende Menge ist, besteht der Rand von  $A$  aus  $m$  Zusammenhangskomponenten. Bedingung (A) besagt nun, daß die  $i$ -te Zusammenhangskomponente von  $\partial A$  durch eine reguläre,  $C^2$ -stetige, parametrische Flächenkurve  $\alpha_i(t)$  gegeben ist. Insbesondere gilt unter dieser Voraussetzung

$$\bigcup_{i=1}^n \text{Spur}(\alpha_i) = \partial A.$$

Da  $A$  ferner eine Mannigfaltigkeit ist, sind die einzelnen Randkurven paarweise disjunkt. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit unserer Argumente annehmen, daß die Orientierung der Randkurven so gewählt wurde, daß sich das Innere von  $A$  stets auf der rechten Seite der Kurve bezüglich der Flächenorientierung befindet. (Diese sogenannte *Rechte-Hand-Regel* stellt eine übliche Konvention im Computer Aided Geometric Design, insbesondere bei der Behandlung getrimmter Flächen dar.)

Um die Formulierung der nachfolgenden Sätze und Hilfssätze möglichst prägnant zu gestalten, verzichten wir im folgenden auf die explizite Wiederholung dieser Voraussetzungen und werden auf diese als Bedingung (A) verweisen.

### Lemma 6.2.1

*Sei  $S$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A \subset S$  eine Teilmenge mit der Eigenschaft (A). Für jeden Pica  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , der kein Fokelpunkt von  $\partial A$  ist, gibt es Indizes  $1 \leq i, j \leq n$ , so daß  $\mathbf{p}$  Element eines Teilstücks der Medialen Kurve bezüglich  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  ist.*

### Beweis:

Eine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten einer regulären Fläche ist eine Kurve, die aus Geodätischen Segmenten und Teilkurven (dies schließt einpunktige Kurven ein) des Randes von  $S$  besteht (vgl. [Wol85], Seite 143 ff.). Unter der Voraussetzung, daß  $\mathbf{p}$  ein Pica aus  $A$  ist, und  $A$  abgeschlossen ist, muß daher jede kürzeste Verbindung von  $\mathbf{p}$  nach  $\partial A$  eine Geodätische Kurve

sein. Nach Definition 6.1.1 besitzt daher jeder Pica  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  mindestens zwei verschiedene distanzminimale Verbindungsgeodätische  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zu  $\partial A$ , die ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach ihrer Bogenlänge parametrisiert angenommen werden können. Ferner nehmen wir an, daß  $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in \partial A$  und  $\gamma_1(s_p) = \mathbf{p} = \gamma_2(s_p)$  gilt. Damit können wir die Indizes  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  so bestimmen, daß  $\gamma_1(0) = \alpha_i(t_0)$  und  $\gamma_2(0) = \alpha_j(\varphi_0)$  mit bestimmten Kurvenparametern  $t_0$  und  $\varphi_0$  von  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_j$  gilt. Zu beachten ist, daß hierbei *nicht*  $i \neq j$  gefordert wird. Für den Fall der Gleichheit  $i = j$  (d.h. die Verbindungsgeodätischen starten von der gleichen Randkomponente von  $\partial A$ ) gilt jedoch  $t_0 \neq \varphi_0$ .

Da der Pica  $\mathbf{p}$  nach Voraussetzung kein Fokalfunkt des Randes ist, kann die Gleichung

$$\mathbf{F}(s, t, \varphi) = \mathbf{0}$$

(deren Nullstellenmenge die lokal Mediale Kurve ist, vgl. Definition 4.1.1 auf Seite 83) nach Satz 4.1.2 lokal um  $(s_p, t_0, \varphi_0)$  nach  $t$  aufgelöst werden. Daher gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß die Mediale Kurve

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathcal{O}_i(s(t), t) = \mathcal{O}_j(s(t), \varphi(t)) \quad \text{für alle } |t - t_0| < \varepsilon$$

durch Funktionen  $s(t), \varphi(t)$  mit der Eigenschaft  $s(t_0) = s_p$  und  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  in der Nähe von  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\mu}(t_0)$  definiert ist. ■

Auf die Voraussetzung, daß der fragliche Pica kein Fokalfunkt bezüglich  $\partial A$  sein darf, kann in Lemma 6.2.1 nicht verzichtet werden. Betrachtet man als Menge  $A$  etwa eine abgeschlossene Kreisscheibe der Euklidischen Ebene, so ist der Mittelpunkt  $\mathbf{p}$  des Kreises sicherlich ein Pica bezüglich  $\partial A$ . Gleichzeitig ist  $\mathbf{p}$  auch ein Fokalfunkt bezüglich jedes Elements des Kreisrandes. Eine Auflösung der Gleichung  $\mathbf{F}(s, t, \varphi) = \mathbf{0}$  nach  $t$  ist offenbar nicht möglich.

In Abschnitt 4.6 hatten wir als Voraussetzung zur numerischen Behandlung der Medialen Differentialgleichung vorausgesetzt, daß die betrachteten Progenitorkurven *dreimal* stetig differenzierbar sind. Der Grund hierfür bestand in der Notwendigkeit, die partiellen Ableitungen  $\partial_t \mathcal{O}$  berechnen zu können. Dies geschieht nach unserem Vorschlag mit Hilfe der Jacobi Differentialgleichung, für deren Formulierung wir die zweite Ableitung der Funktion  $y_{t_0}(s)$  der vorzeichenbehafteten Tangentenlängen der Offsetkurven benötigen. Damit diese zweimal stetig differenzierbar ist, muß die Progenitorkurve nach Satz 3.3.4, Seite 61, mindestens  $C^3$ -stetig sein. Diese Voraussetzung betrifft jedoch nur die *Berechnung* von  $\partial_t \mathcal{O}$  mit Hilfe der Jacobi Differentialgleichung. Die Mediale Differentialgleichung kann jedoch bereits formuliert werden, wenn  $\partial_t \mathcal{O}$  existiert und stetig ist. Dies ist nach Satz 3.2.8 von Seite 57 bereits für zweimal stetig differenzierbare Progenitorkurven der Fall.

### Satz 6.2.2

Sei  $S$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A \subset S$  eine Teilmenge, die der Bedingung (A) genügt. Dann ist jeder Häufungspunkt  $\mathbf{p}$  einer Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  von Picas bezüglich  $\partial A$  ein Pica bezüglich  $\partial A$  oder ein Fokalfunkt des Randes  $\partial A$ .

#### Beweis:

Sei also  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine konvergente Folge von Picas bezüglich  $\partial A$  und  $\mathbf{p}$  ihr Grenzwert. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß alle Picas der Folge kürzeste Verbindungen zu den Randkurven  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  besitzen, wobei für die Indizes  $1 \leq i \leq j \leq n$  gilt. Dies ergibt sich aus der Voraussetzung, daß  $A$  nur endlich viele Randkomponenten besitzt. Wie

im Beweis zu Lemma 6.2.1 können wir daher für jeden Pica  $\mathbf{p}_n$  die bogenlängenparametrisierten, distanzminimalen Verbindungsgeodätischen  $\gamma_1^{(n)}$  und  $\gamma_2^{(n)}$  betrachten, für die

$$\gamma_1^{(n)}(0) = \alpha_i(t_n), \quad \gamma_2^{(n)}(0) = \alpha_j(\varphi_n), \quad \gamma_1^{(n)}(d_n) = \mathbf{p}_n = \gamma_2^{(n)}(d_n)$$

gelte. Dabei bezeichnen  $t_n$  und  $\varphi_n$  die zugehörigen Parameter der betroffenen Randkurven  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_j$ , sowie  $d_n$  die Länge der Geodätischen Verbindungssegmente.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unendlich viele Picas  $\mathbf{p}_{n_l}$  ( $n_l \in \mathbb{N}$ ) enthält, die gleichzeitig Fokalfunkte bezüglich  $\alpha_i(t_{n_l})$  bzw.  $\alpha_j(\varphi_{n_l})$  sind. In diesem Fall bewegt sich die Teilfolge  $\{\mathbf{p}_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  in der Vereinigung der Fokalkurven  $\text{Spur}(\omega_i) \cap \text{Spur}(\omega_j)$  bezüglich  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_j$ . Dies ist eine abgeschlossene Menge, so daß sich der Grenzwert  $\mathbf{p}$  in ihr befinden muß. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß  $\mathbf{p} \in \text{Spur}(\omega_i)$  gilt, daß also der Grenzwert Element der Fokalkurve bezüglich  $\alpha_i$  ist.

Damit existiert eine unendliche Teilfolge  $\{\mathbf{p}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Spur}(\omega_i)$  von Fokalfunkten bezüglich der zugehörigen Kurvenpunkte  $\alpha_i(t_{n_k})$ , die gleichzeitig Picas sind. Nach Lemma 6.1.5 ist bekannt, daß jeder Pica gleichzeitig ein Non-Extender ist. Ein Non-Extender der Medialen Achse von  $A$  ist nach Hilfssatz 6.1.9 ferner der Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises von  $A$ . Da jedes  $\mathbf{p}_{n_k}$  ein Fokalfunkt ist, entspricht der Rand von  $\overline{B_{d_{n_k}}(\mathbf{p}_{n_k})}$  dem Geodätischen Krümmungskreis von  $\alpha_i$  im Parameter  $t_{n_k}$ . Aufgrund der Rechten-Hand-Regel liegt  $\overline{B_{d_{n_k}}(\mathbf{p}_{n_k})}$  auf der rechten Seite in Bezug auf  $\alpha_i$ . Nach Lemma 5.2.4 ist der zugehörige Abstand  $d_{n_k} = s_f^+(t_{n_k})$ , der dem Fokalen Abstand der Randkurve  $\alpha_i$  zum Zeitpunkt  $t_{n_k}$  entspricht, ein lokales Minimum der Funktion  $s_f^+(t)$ .<sup>1</sup> Daher muß die Teilfolge  $\mathbf{p}_{n_k}$  für hinreichend große  $k$  konstant sein. Der Grenzwert  $\mathbf{p}$  entspricht folglich diesem konstanten Folgenglied, das gleichzeitig ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha_i(t_{n_k})$  und ein Pica ist.

Sind andernfalls nur endlich viele Picas  $\mathbf{p}_{n_1}, \dots, \mathbf{p}_{n_l}$  gleichzeitig Fokalfunkte, so kann man diese aus der betrachteten Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  entfernen, ohne das Konvergenzverhalten zu beeinflussen. Wir nehmen daher für den zweiten Fall ohne Einschränkung an, die Folge der Picas enthalte keine Fokalfunkte. Aufgrund der Konvergenz  $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$  gibt es für beliebig kleine  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  der Pica  $\mathbf{p}_n$  in der Umgebung  $B_\varepsilon(\mathbf{p})$  liegt. Nach Hilfssatz 6.2.1 ist jeder dieser Picas Element eines Teilstücks der lokal Medialen Kurve, d.h. es gibt Funktionen  $s_n(t)$  und  $\varphi_n(t)$ , so daß  $s_n(t_n) = d_n$ ,  $\varphi_n(t_n) = \varphi_n$  und

$$\mathbf{F}(s_n(t), t, \varphi_n(t)) = \mathbf{0}$$

für alle  $|t - t_n| < \delta_n$  zu gewissen positiven Konstanten  $\delta_n > 0$  gilt. Mit anderen Worten kommt man dem Grenzwert  $\mathbf{p}$  auf einem (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmten) Abschnitt der Medialen Kurve beliebig nahe. Wir können jedoch einen Ast der Medialen Kurve wählen, auf dem sich unendlich viele Folgenglieder  $\{\mathbf{p}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  befinden. Die zugehörigen Funktionen seien mit  $s(t)$  und  $\varphi(t)$  bezeichnet. Damit gilt

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_i(s(t_{n_k}), t_{n_k})) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_j(s(t_{n_k}), \varphi(t_{n_k}))) = \mathbf{p}_{n_k} \rightarrow \mathbf{p} \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Falls die Gleichung  $\mathbf{F}(s, t, \varphi) = \mathbf{0}$  auch im Grenzwert nach  $t$  auflösbar ist, d.h. falls man die Mediale Kurve  $\boldsymbol{\mu}(t)$  nach  $\mathbf{p}$  fortsetzen kann, ist  $\mathbf{p}$  offenbar ein Pica bezüglich  $\partial A$ .

Nach Satz 4.1.2 ist eine Auflösbarkeit in  $\mathbf{p}$  genau dann nicht möglich, wenn  $\mathbf{p}$  ein Fokalfunkt ist, oder die zugehörigen Geodätischen Segmente identisch sind. Im letzt genannten Fall müssen die

<sup>1</sup>An dieser Stelle geht ganz wesentlich ein, daß die Randkurve  $\alpha_i$  zweimal stetig differenzierbar ist. Nach Abschnitt 5.1 ergibt sich  $s_f(t)$  unter dieser Voraussetzung als stetige Funktion.

Randkurven  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  identisch sein, d.h. es gilt  $i = j$ . Ferner gibt es einen Parameter  $t_0$  der Randkurve, so daß  $t_{n_k} \rightarrow t_0 \leftarrow \varphi_{n_k}$  für  $k \rightarrow \infty$  erfüllt ist. Dabei konvergieren die Schnittpunkte der beliebig nah zueinander startenden Geodätischen Segmente

$$\gamma_1^{(n_k)}(s) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_i(s, t_{n_k})) \quad \text{und} \quad \gamma_2^{(n_k)}(s) = \mathbf{r}(\mathcal{O}_i(s, \varphi_{n_k}))$$

gegen  $\mathbf{p}$ . Dies entspricht jedoch erneut der Situation, daß  $\mathbf{p}$  ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0)$  ist (siehe auch [dC76], S. 362 ff.). ■

Zu beachten bei der Aussage dieses Satzes ist, daß die Formulierung nicht etwa „*entweder Pica oder Fokalfunkt*“ lautet. Wie auch im Beweis berücksichtigt kann es Picas geben, die gleichzeitig Fokalfunkte bezüglich  $\partial A$  sind. Der folgende Hilfssatz beschreibt eine wichtige Eigenschaft von Fokalfunkten. Er stellt eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Jacobi dar, welches im Fall einer einpunktigen Menge  $A = \{\mathbf{q}\}$  besagt, daß Geodätische Kurven ihre Distanzminimalität bezüglich  $\mathbf{q}$  spätestens in einem Fokalfunkt von  $\mathbf{q}$  verlieren (siehe [dC76], S. 423 ff.).

### Lemma 6.2.3

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge gemäß Bedingung (A) der zweimal stetig differenzierbaren, parametrischen Fläche  $S$ . Sei ferner  $\mathbf{p}$  ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0) \in \partial A$  im Fokalen Abstand  $s_f^+(t_0)$ . Die zugehörige Geodätische Kurve  $\gamma_{t_0}$  mit

$$\gamma_{t_0}(0) = \alpha(t_0) \quad \text{und} \quad \gamma_{t_0}(s_f^+(t_0)) = \mathbf{p}$$

ist nicht mehr distanzminimal zu  $\partial A$  für Geodätische Abstände  $s > s_f^+(t_0)$ .

Einen Beweis findet man in [Wol85], Seite 115 ff. Der Satz von Jacobi, als dessen Verallgemeinerung Lemma 6.2.3 aufgefaßt werden kann, wird üblicherweise unter Verwendung der sogenannten Technik der *zweiten Variation der Bogenlänge* oder des *Morse Index* bewiesen (vgl. [Mil73], S. 83 ff.). Bemerkenswert an dem Beweis von Wolter in [Wol85] ist, daß er ohne diese Techniken auskommt, für die man eine zweimal stetig partiell differenzierbare Offsetfunktion benötigen würde. Wolter setzt zwar eine beliebig oft differenzierbare Fläche  $S$  (bzw. dort Riemannsche Mannigfaltigkeit) voraus, in seinem Beweis benutzt er diese Voraussetzung nur, um die  $C^1$ -Stetigkeit der Offsetfunktion zu folgern (vgl. [Wol85], S. 116). Mit Satz 3.2.7 (Seite 56) konnten wir jedoch nachweisen, daß die Offsetfunktion bereits für  $C^2$ -stetige, parametrische Flächen  $S$  stetig partiell differenzierbar ist. Wir verzichten daher auf eine Wiederholung der Argumente aus [Wol85].

Wir sind nun in der Lage, einige wichtige Folgerungen über die lokale Struktur der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$  einer abgeschlossenen Menge  $A$  mit  $C^2$ -stetigem Rand zu ziehen. Wir beginnen mit der Charakterisierung von Fokalfunkten bezüglich des Randes  $\partial A$ , die Elemente der Medialen Achse sind.

### Lemma 6.2.4

Sei  $S$  eine zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A \subset S$  eine Teilmenge, die der Bedingung (A) genügt. Sei ferner  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha(t_0) \in \partial A$  im Fokalen Abstand  $s_0 := s_f^+(t_0)$  und das zugehörige (bogenlängenparametrisierte) Geodätische Kurvensegment  $\gamma_{t_0}$  mit

$$\gamma_{t_0}(0) = \alpha(t_0) \quad \text{und} \quad \gamma_{t_0}(s_0) = \mathbf{p}$$

sei *distanzminimal* zu  $\partial A$ . Dann ist  $\overline{B_{s_0}(\mathbf{p})}$  ein maximal einbeschriebener Kreis von  $A$  und  $s_0$  ein lokaler Minimalwert der Funktion des Fokalen Abstands  $s_f^+(t)$ . Insbesondere ist  $\mathbf{p}$  ein Non-Extender bezüglich  $\partial A$ .

**Beweis:**

Da nach Voraussetzung  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  gilt und das Geodätische Segment  $\gamma_{t_0}$  von  $\alpha(t_0)$  nach  $\mathbf{p}$  *distanzminimal* ist, gibt es keinen Pfad mit einer Länge kleiner als  $s_0$  von  $\mathbf{p}$  nach  $\partial A$ . Folglich gilt für den zugehörigen Geodätischen Krümmungskreis die Inklusion  $\overline{B_{s_0}(\mathbf{p})} \subset A$ . Wir nehmen nun an, es gäbe einen Punkt  $\mathbf{q} \in A$  und einen Abstandswert  $r > 0$ , so daß

$$\overline{B_{s_0}(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$$

erfüllt wäre. Da insbesondere  $\alpha(t_0) \in \overline{B_r(\mathbf{q})}$  gelten muß, ist  $\alpha(t_0)$  ein gemeinsames Element der Ränder beider Abstandskreise. Analog zur Argumentation des Beweises von Lemma 6.1.9 können wir schließen, daß  $\alpha(t_0)$  ein tangentialer Schnittpunkt von  $\partial B_{s_0}(\mathbf{p})$  und  $\partial B_r(\mathbf{q})$  sein muß. Bezeichnen wir mit  $\gamma_q$  das bogenlängenparametrisierte Geodätische Segment von  $\alpha(t_0)$  nach  $\mathbf{q}$ , so muß folglich

$$\text{Spur}(\gamma_{t_0}([0, s_0])) \subset \text{Spur}(\gamma_q([0, r]))$$

gelten. Nach Hilfssatz 6.2.3 ist  $\gamma_{t_0}$  jedoch nicht mehr *distanzminimal* für Werte  $s > s_0$ . Daher kann die Geodätische  $\gamma_q$  keine kürzeste Verbindung von  $\alpha(t_0)$  nach  $\mathbf{q}$  liefern, so daß die Annahme  $\overline{B_{s_0}(\mathbf{p})} \subset \overline{B_r(\mathbf{q})} \subset A$  nur für  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  und  $r = s_0$  zu halten ist. ■

Eine direkte Folgerung aus Satz 6.2.2 und Hilfssatz 6.2.4 lautet:

**Korollar 6.2.5**

*Ist  $A \subset S$  eine Teilmenge, die der Bedingung (A) genügt, so ist jeder Non-Extender  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , der kein Pica ist, ein Fokalkpunkt von  $\partial A$ .*

Mit Hilfe von Lemma 6.2.4 verfügen wir ferner über ein notwendiges Kriterium, wann ein Fokalkpunkt zur Medialen Achse gehören kann. Es kommen offenbar nur solche Fokalkpunkte in Frage, deren zugehöriger Fokaler Abstandswert jeweils ein lokales Minimum der Funktion des rechtsseitigen Fokalen Abstands darstellt. Dieses Kriterium ist natürlich *nicht* hinreichend, da das Geodätische Segment hin zum Fokalkpunkt nicht zwingenderweise eine kürzeste Verbindung zum Rand von  $A$  sein muß. Aufgrund der Eigenschaft, Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises in  $A$  zu sein, stellen solche Fokalkpunkte in einem gewissen Sinn die Start- bzw. Endpunkte der Medialen Achse dar.

In Abbildung 6.4 sind die verschiedenen möglichen Situationen dargestellt. Der Rand der behandelten Menge  $A$  besteht in allen drei Fällen aus einem Parabelstück und zwei bzw. einer Geraden. Obwohl wir in dieser Arbeit von  $C^2$ -stetigen Randkurven der betrachteten Menge  $A$  ausgehen, wollen wir in diesem Beispiel eine *stückweise* krümmungstetige Randkurve betrachten. Wir sind davon überzeugt, daß die hier bewiesenen Eigenschaften der Medialen Achse auch in dieser Situation Gültigkeit besitzen. Anhand von Abbildung 6.3 haben wir etwa angemerkt, daß die maximal einbeschriebenen Kreise in einem solchen Fall gegen Kreise mit Radius Null um den Eckpunkt streben. Dennoch besitzt die Diskussion stückweiser  $C^2$ -stetiger Randkurven ihre eigenen Tücken, so daß wir diese Konfiguration an anderer Stelle untersuchen werden. Die wesentlichen Merkmale der Beispiele aus Abbildung 6.4 lassen sich ebenfalls durch eine  $C^2$ -stetige

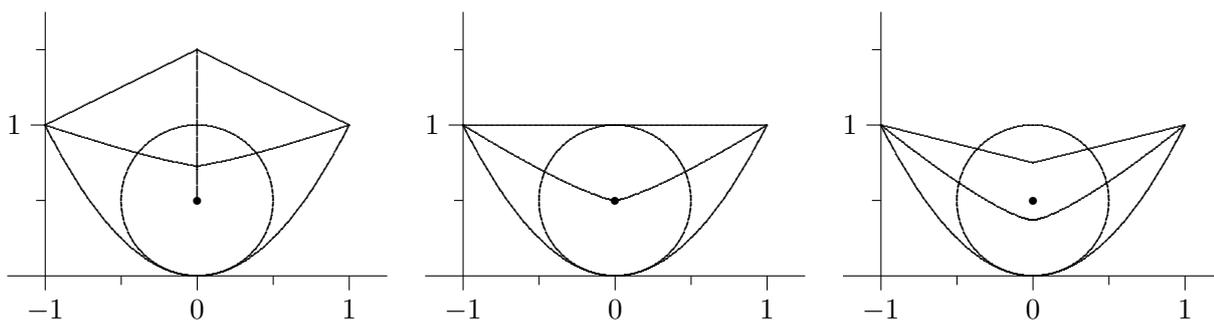


Abbildung 6.4: Mediale Achse und Fokale Startpunkte

Randkurve konstruieren, indem die Eckpunkte durch Fokale Punkte ersetzt werden. Wir sind aber der Meinung, daß die Zeichnung dadurch unnötigerweise verkompliziert worden wäre, so daß die eigentliche Aussage der Beispiele verwässert würde.

Im ersten Teilbeispiel von Abbildung 6.4 besitzt die Mediale Achse vier Startpunkte: drei Eckpunkte und einen Fokale Punkt. Der eingezeichnete Kreis stellt den Krümmungskreis um den Fokale Punkt des Scheitels der Parabel dar. Offenbar beginnt in jedem Startpunkt ein eigener Ast der Medialen Achse. Im zweiten Teilbeispiel, in dem neben dem Parabelstück lediglich eine Gerade zur Berandung von  $A$  benutzt wurde, kann man Ähnliches beobachten. Allerdings besitzt hier der Ast ausgehend von dem Fokale Punkt die Länge Null; der Fokale Punkt ist gleichzeitig ein Pica bezüglich  $\partial A$ . Die dritte Situation liefert ein Beispiel dafür, daß das Kriterium des lokal minimalen Fokalen Abstands nicht hinreichend ist. Hier ist der Krümmungskreis nicht in  $A$  enthalten, der Fokale Punkt gehört daher nicht zur Medialen Achse von  $A$ .

In Abschnitt 6.1 hatten wir darauf hingewiesen, daß der Grenzwert einer Folge von Non-Extendern ein Extender sein kann. Unter der in diesem Abschnitt gemachten Stetigkeitsannahme hinsichtlich des Randes von  $A$  können wir diesen recht unangenehmen Fall ausschließen, wie in den folgenden beiden Folgerungen bewiesen wird.

### Korollar 6.2.6

Sei  $S$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A \subset S$  eine Teilmenge gemäß Bedingung (A). Dann ist jeder Häufungspunkt einer Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  von Picas bezüglich  $\partial A$  ein Non-Extender.

#### Beweis:

Sei  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbf{p}_n \in A$  eine konvergente Folge von Picas bezüglich  $\partial A$ , deren Grenzwert mit  $\mathbf{p}$  bezeichnet sei. Nach Satz 6.2.2 ist  $\mathbf{p}$  ein Pica oder ein Fokale Punkt bezüglich  $\partial A$ . Ist  $\mathbf{p}$  ein Pica, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß jeder Pica ein Non-Extender ist (vgl. Lemma 6.1.5). Falls der Grenzwert ein Fokale Punkt ist, so ist  $\mathbf{p}$  unter den gemachten Stetigkeitsannahmen nach 6.2.4 ein Non-Extender. ■

### Korollar 6.2.7

Unter denselben Voraussetzungen wie in Korollar 6.2.6 ist jeder Häufungspunkt einer Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  von Non-Extendern bezüglich  $\partial A$  ein Non-Extender.

#### Beweis:

Wie bereits in Bemerkung 6.1.7 erwähnt, kann jeder Non-Extender als Grenzwert einer Folge

von Picas dargestellt werden. Mit diesem Argument erhält man aus jeder konvergenten Folge von Non-Extendern eine Folge von Picas, die den gleichen Grenzwert besitzt.<sup>2</sup> Die Behauptung folgt dann aus Korollar 6.2.6. ■

### Bemerkung 6.2.8

*Folgerung 6.2.7 zusammen mit Lemma 6.1.6 besagt insbesondere, daß die Mediale Achse einer Menge  $A$ , die der Bedingung (A) genügt, ausschließlich aus Non-Extendern besteht.*

Insgesamt haben wir im Laufe dieses und des letzten Abschnitts folgende Eigenschaften der Medialen Achse zeigen können:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p} \in A \mid \mathbf{p} \text{ Pica bzgl. } \partial A\} &\subset \{\mathbf{p} \in A \mid \mathbf{p} \text{ Non-Extender bzgl. } \partial A\} \\ &= \{\mathbf{p} \in A \mid \mathbf{p} \text{ Mittelpkt. eines max. einbeschr. Kreises von } A\} \\ &\stackrel{(A)}{=} \mathcal{M}(A). \end{aligned}$$

Die Gleichheit in der dritten Zeile wurde unter Verwendung der Bedingung (A) gezeigt. Jeder Non-Extender  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , der kein Pica ist, ist nach Korollar 6.2.5 ein Fokuspunkt bezüglich  $\partial A$ , so daß wir auch die Inklusion in der ersten Zeile genau charakterisiert haben. Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß die folgende (gewissermaßen unangenehmste) pathologische Situation unter der Voraussetzung (A) ausgeschlossen werden kann.

### Lemma 6.2.9

*Erfüllt  $A \subset S$  die Voraussetzung (A), so ist die Mediale Achse  $\mathcal{M}(A)$  nirgendwo dicht in  $S$ .*

#### Beweis:

Wir nehmen an, die Aussage von Lemma 6.2.9 wäre falsch. Da die Mediale Achse per Definition abgeschlossen ist, gäbe es nach dieser Annahme ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , so daß für den zugehörigen abgeschlossenen Abstandskreis

$$\overline{B_\varepsilon(\mathbf{p})} \subset \mathcal{M}(A) \tag{6.1}$$

gilt. Da  $\partial A$  nach Voraussetzung aus der disjunkten Vereinigung  $C^2$ -stetiger Kurven besteht, ist  $\partial A$  nirgends dicht in  $S$ . Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{p})} \subset A$  erfüllt ist. Sei nun  $\gamma \subset A$  eine kürzeste Verbindung von  $\partial A$  mit  $\mathbf{p}$ . Der Punkt  $\mathbf{q} := \gamma \cap \partial B_\varepsilon(\mathbf{p})$  ist einerseits Element der Medialen Achse (aufgrund von Gleichung (6.1)), sowie andererseits Element der kürzesten Verbindung  $\gamma$  vor Erreichen des Punktes  $\mathbf{p}$ . Damit wäre  $\mathbf{q} \in \mathcal{M}(A)$  ein Extender bezüglich  $\partial A$ , was im Widerspruch zu Korollar 6.2.6 steht. ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll ein Ergebnis zitiert werden, nachdem unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (A) ausgeschlossen werden kann, daß die Mediale Achse Elemente des Rands  $\partial A$  enthält.

### Lemma 6.2.10

*Ist  $A \subset S$  eine Teilmenge, die der Bedingung (A) genügt, so ist der Schnitt der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$  mit dem Rand  $\partial A$  leer.*

<sup>2</sup>Hierbei wird wesentlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Vereinigung höchstens abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

**Beweis:**

Der Begriffsgebung aus [Ban82] und [Kle80] folgend nennen wir eine beliebige abgeschlossene Menge  $A \subset S$  *EFP-Menge*<sup>3</sup>, wenn es eine offene Umgebung von  $A$  gibt, in der jeder Punkt eine eindeutig bestimmte, distanzminimale Verbindung zu  $A$  besitzt. Nach einem Satz von Wolter ([Wol85], Seite 129 ff.) ist  $A$  genau dann eine EFP-Menge, wenn es eine offene Umgebung von  $A$  gibt, in der kein Element des Cut Locus  $\mathcal{C}(A)$  existiert.

Für den Euklidischen Fall wurde die Aussage von Lemma 6.2.10 bereits in [Wol92], Seite 23 ff. bewiesen. Hieraus folgt die Behauptung auch für den allgemeinen Flächenfall: Nach einem Satz von Bangert (siehe [Ban82] und auch [Wol85], Seite 131 ff.) ist das Bild einer EFP-Menge unter einem  $C^2$ -stetigen Diffeomorphismus wieder eine EFP-Menge. Die Randkurve  $\partial A$  ist nach Voraussetzung (A)  $C^2$ -stetig. Sie kann durch eine  $C^2$ -stetige Kurve im Parameterraum der Fläche  $S$  beschrieben werden. Da diese ebene Kurve nach [Wol92] eine EFP-Menge ist, die Parametrisierungsabbildung  $r$  von  $S$  nach Bedingung (A) mindestens  $C^2$ -stetig ist, muß  $\partial A$  ebenfalls eine EFP-Menge sein. Die Behauptung folgt damit aus dem im letzten Absatz zitierten Satz von Wolter. ■

### 6.3 Die Mediale Achse als Deformationsretrakt

Für die folgenden Untersuchungen verschärfen wir die zu Beginn von Abschnitt 6.2 formulierte Bedingung (A), in dem wir nun ausschließlich beschränkte Teilmengen betrachten wollen. Dadurch ergibt sich die modifizierte Bedingung

(A') Sei  $S$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare, parametrische Fläche und  $A$  eine  $m$ -fach zusammenhängende ( $m < \infty$ ), kompakte, zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $S$ , deren Rand  $\partial A$  zweimal stetig differenzierbar ist.

Bedingung (A') stellt im Hinblick auf die Anwendung der hier beschriebenen Techniken eine vernünftige Einschränkung dar, da unbeschränkte Gebiete nur schwer numerisch zu behandeln sind. Der Hauptgrund für die Beschränkung auf kompakte Bereiche ist die Gültigkeit der folgenden nützlichen Aussage.

#### Lemma 6.3.1

Sei  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von rektifizierbaren Kurven einer kompakten Menge  $A$ , deren Länge  $\ell(\gamma_n)$  beschränkt ist. Dann existiert eine Teilfolge  $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen eine Kurve  $\gamma \subset A$  konvergiert, deren Bogenlänge

$$\ell(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \ell(\gamma_{n_k})$$

genügt.

Einen Beweis dieses Hilfssatzes findet man in [Bus55], Seite 24 ff. Für unsere Belange ergibt sich aus Lemma 6.3.1 die folgende wichtige Folgerung.

#### Korollar 6.3.2

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die der Voraussetzung (A') genügt, und  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine Folge von kürzesten Pfaden in  $A$ . Dann existiert eine Teilfolge  $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen eine kürzeste Verbindung  $\gamma \subset A$  konvergiert.

<sup>3</sup>Die Abkürzung *EFP* steht für *Eindeutiger Fußpunkt*

**Beweis:**

Da  $A$  nach Bedingung (A') kompakt, also insbesondere beschränkt ist, sind die Bogenlängen der Kurven  $\gamma_n$  beschränkt. Nach Lemma 6.3.1 existiert daher eine Teilfolge  $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen eine Kurve  $\gamma$  strebt. Für die Folge der Bogenlängen  $d_k := \ell(\gamma_{n_k})$  gilt nach demselben Hilfssatz

$$d := \ell(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d_k. \quad (6.2)$$

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$  bzw.  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  die Anfangs- und Endpunkt der Kurven  $\gamma_{n_k}$  bzw.  $\gamma$ . Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz  $\gamma_{n_k} \rightarrow \gamma$  für  $k \rightarrow \infty$  gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $K(\varepsilon)$ , so daß für alle  $k \geq K(\varepsilon)$

$$\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_k) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \text{dist}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Wir nehmen die Existenz einer kürzeren Verbindung  $\tilde{\gamma}$  von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$  an. Folglich müßte es eine positive Konstante  $\delta > 0$  geben, so daß für die Bogenlänge  $\tilde{d}$  von  $\tilde{\gamma}$  die Beziehung  $\tilde{d} = d - \delta$  erfüllt ist. Da die Kurven der Folge nach Voraussetzung kürzeste Pfade in  $A$  sind, gilt für alle  $k \geq K(\varepsilon)$  die Abschätzung

$$d_k < 2 \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{d} = \varepsilon + d - \delta.$$

Für den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  ergäbe sich wegen  $\varepsilon \rightarrow 0$  zusammen mit Gleichung (6.2)

$$d \leq d - \delta,$$

was die Annahme widerlegt, so daß  $\gamma$  eine kürzeste Verbindung von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$  sein muß. ■

Wir wollen nun eine Abbildung des Inneren der Menge  $A$  auf die zugehörige Mediale Achse angeben. Hierfür sei  $\mathbf{p} \in (\overset{\circ}{A} - \mathcal{M}(A))$  ein beliebiger Punkt im Inneren der gegebenen Menge  $A$ , der nicht zur Medialen Achse gehört. Da  $\mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A)$  gilt,  $\mathbf{p}$  also insbesondere kein Pica bezüglich  $\partial A$  ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes, distanzminimales Geodätisches Segment, das nach seiner Bogenlänge parametrisiert ist und das den Rand von  $A$  mit  $\mathbf{p}$  verbindet. Damit gibt es insbesondere ein eindeutig bestimmtes Randelement, von dem das Geodätische Segment ausgeht und das wir mit  $\alpha_i(t_p^{(i)})$  bezeichnen. Das Segment, welches wir durch  $\gamma_p$  beschreiben werden, hat demnach die Eigenschaft

$$\gamma_p(0) = \alpha_i(t_p^{(i)}) \quad \text{und} \quad \gamma_p(s_p) = \mathbf{p},$$

wobei  $s_p > 0$  dem Abstand von  $\mathbf{p}$  zu  $\partial A$  entspricht.

Ausgehend von dem eben konstruierten Segment betrachten wir seine Geodätische Verlängerung  $\bar{\gamma}_p$  über den Punkt  $\mathbf{p}$  hinaus. Da  $A$  kompakt ist, muß  $\bar{\gamma}_p$  für einen endlichen Parameter  $s_p < s_{r_p} < \infty$  den Rand von  $A$  erneut treffen. Dabei muß der Geodätische Strahl die Eigenschaft der Distanzminimalität zu  $\partial A$  vorher verlieren. Wir definieren

$$s_{m_p} := \max \left\{ s_p < s < s_{r_p} \mid \bar{\gamma}_p \text{ ist kürzeste Verbindung von } \alpha_i(t_p^{(i)}) \text{ nach } \bar{\gamma}_p(s) \right\}.$$

Offensichtlich ist der zugehörige Punkt des Geodätischen Strahls

$$\mu_p := \bar{\gamma}_p(s_{m_p})$$

ein Non-Extender bezüglich  $\partial A$ , so daß nach Hilfssatz 6.1.6  $\mu_p \in \mathcal{M}(A)$  erfüllt ist. Mit Hilfe dieser Konstruktion führen wir die folgende Abbildung ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \overset{\circ}{A} &\longrightarrow \mathcal{M}(A) \\ \mathbf{p} &\longmapsto \mathbf{R}(\mathbf{p}) := \begin{cases} \mu_p & \text{falls } \mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A), \\ \mathbf{p} & \text{falls } \mathbf{p} \in \mathcal{M}(A). \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Für diese Abbildung können wir zeigen, daß sie eine stetige Abbildung von  $\mathring{A}$  in die Mediale Achse von  $A$  ist, für die jeder Punkt  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  ein Fixpunkt ist. Eine solche Abbildung wird *Retraktionsabbildung* genannt. Die Mediale Achse (ohne die Randelemente von  $A$ ) wird dann als *Retrakt* von  $\mathring{A}$  bezeichnet. Für weitere Einzelheiten zu Retrakten verweisen wir auf [SZ94], Seite 59 ff. und [Sch75], Seite 156 ff. Wir formulieren diese Aussage in dem folgenden Hilfssatz.

### Lemma 6.3.3

Ist  $A \subset S$  eine Teilmenge der  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$ , die der Bedingung (A') genügt, so ist die in Gleichung (6.3) definierte Abbildung  $\mathbf{R}$  eine Retraktion.

#### Beweis:

Offenbar gilt nach Definition für alle  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  die Identität  $\mathbf{R}(\mu) = \mu$ , so daß die Stetigkeit von  $\mathbf{R}$  zu zeigen verbleibt. Hierzu betrachten wir eine beliebige konvergente Folge  $\{\mathbf{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathring{A}$ , deren Grenzwert  $\mathbf{p}$  im Inneren von  $A$  liegt. Es genügt nun zu beweisen, daß

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_n) = \mu_{\mathbf{p}_n} \longrightarrow \mu_{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Zum Nachweis dieser Aussage wollen wir zwischen den beiden Fällen  $\mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A)$  und  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  unterscheiden.

Wir beginnen mit dem Fall  $\mathbf{p} \in \mathring{A} - \mathcal{M}(A)$ . Unter dieser Voraussetzung gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische  $\gamma_{\mathbf{p}}$  von  $\partial A$  nach  $\mathbf{p}$ . Da ferner  $\mathring{A} - \mathcal{M}(A)$  offen ist, gilt  $\mathbf{p}_n \notin \mathcal{M}(A)$  für alle hinreichend großen  $n$ . Daher gibt es für unendlich viele Folgenglieder eine eindeutige Geodätische Verbindung gemäß obiger Konstruktion von  $\partial A$  nach  $\mathbf{p}_n$ , die wir mit  $\gamma_{\mathbf{p}_n}$  bezeichnen. Wir überlegen zunächst, daß die Folge  $\{\gamma_{\mathbf{p}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\gamma_{\mathbf{p}}$  strebt. Wäre nämlich das Gegenteil der Fall, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß die Menge

$$I := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{dist}(\gamma_{\mathbf{p}_n}, \gamma_{\mathbf{p}}) \geq \varepsilon\}$$

eine unendliche Indexmenge wäre. Da die Menge  $A$  nach Voraussetzung Bedingung (A') erfüllt, gäbe es nach Korollar 6.3.2 jedoch eine unbeschränkte Teilmenge  $J \subset I$ , so daß die Teilfolge  $\{\gamma_{\mathbf{p}_j}\}_{j \in J}$  von  $\{\gamma_{\mathbf{p}_i}\}_{i \in I}$  gleichmäßig gegen eine kürzeste Verbindung von  $\partial A$  mit  $\mathbf{p}$  strebt. Da nach Voraussetzung  $\mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A)$  gilt, müßte dieser Grenzwert mit  $\gamma_{\mathbf{p}}$  übereinstimmen. Damit wäre jedoch gleichzeitig  $J \not\subset I$  erfüllt, was die Annahme widerlegt. Daher gilt  $\gamma_{\mathbf{p}_n} \rightarrow \gamma_{\mathbf{p}}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Verlängerungen der Geodätischen Segmente  $\gamma_{\mathbf{p}_n}$  bezeichnen wir (wie bei der Konstruktion von  $\mathbf{R}$ ) mit  $\bar{\gamma}_{\mathbf{p}_n}$ . Sie genügen den Identitäten

$$\bar{\gamma}_{\mathbf{p}_n}(0) = \alpha_i(t_{\mathbf{p}_n}^{(i)}) \in \partial A, \quad \bar{\gamma}_{\mathbf{p}_n}(s_{\mathbf{p}_n}) = \mathbf{p}_n \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{\mathbf{p}_n}(s_{m_{\mathbf{p}_n}}) = \mu_{\mathbf{p}_n} = \mathbf{R}(\mathbf{p}_n) \in \mathcal{M}(A).$$

Sei nun  $\mu_0$  ein beliebiger Häufungspunkt der Folge  $\{\mu_{\mathbf{p}_n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{R}(\mathbf{p}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(A)$ . (Da  $\mathcal{M}(A) \subset A$  kompakt nach Bedingung (A') ist, gibt es mindestens einen solchen Häufungspunkt.) Nach den Definitionen 6.1.2 und 6.1.3 gilt zunächst  $\mu_0 \in \mathcal{M}(A)$ . Aufgrund der Häufungspunkteigenschaft existiert eine Indexmenge  $I \subset \mathbb{N}$ , so daß die Folge  $\{\mu_{\mathbf{p}_i}\}_{i \in I}$  gegen  $\mu_0$  strebt. Nach Korollar 6.3.2 gibt es eine unendliche Teilmenge  $J \subset I$ , so daß die Folge  $\{\bar{\gamma}_{\mathbf{p}_j}\}_{j \in J}$  gleichmäßig gegen eine kürzeste Verbindung  $\bar{\gamma}_0$  zwischen  $\partial A$  und  $\mu_0$  konvergiert. Da nun

$$\text{Spur}(\gamma_{\mathbf{p}_n}) \subset \text{Spur}(\bar{\gamma}_{\mathbf{p}_n}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \gamma_{\mathbf{p}_n} \longrightarrow \gamma_{\mathbf{p}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, muß  $\text{Spur}(\gamma_p) \subset \text{Spur}(\bar{\gamma}_0)$  erfüllt sein. Mit anderen Worten ist  $\bar{\gamma}_0$  eine Verlängerung von  $\gamma_p$ , die gleichzeitig ein kürzester Pfad (hin zu  $\mu_0$ ) ist. Nach der Definition von  $\bar{\gamma}_p$  als maximale distanzminimale Verlängerung von  $\gamma_p$  (hin zu  $\mu_p$ ) muß daher

$$\text{Spur}(\bar{\gamma}_0) \subset \text{Spur}(\bar{\gamma}_p)$$

gelten. Nach Lemma 6.2.7 muß jedoch  $\mu_0$  als Häufungspunkt der Non-Extender  $\mu_{p_n}$  selbst ein Non-Extender sein. Daher kann  $\mu_0$  nicht im Inneren von  $\text{Spur}(\bar{\gamma}_p)$  liegen, so daß  $\text{Spur}(\bar{\gamma}_0) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_p)$  gelten, und somit insbesondere  $\mu_0 = \mu_p$  erfüllt sein muß. Da  $\mu_0$  als beliebiger Häufungspunkt der Folge  $\{\mu_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gewählt war, folgt

$$\mathbf{R}(p_n) = \mu_{p_n} \longrightarrow \mu_p = \mathbf{R}(p) \quad \text{für alle } p \notin \mathcal{M}(A),$$

da  $\mathcal{M}(A)$  kompakt nach Bedingung (A') ist.<sup>4</sup> Dies zeigt die Stetigkeit von  $\mathbf{R}$  in  $\mathring{A} - \mathcal{M}(A)$ .

Für den zweiten Fall  $p_n \rightarrow p \in \mathcal{M}(A)$  betrachten wir wieder einen beliebigen Häufungspunkt  $\mu_0$  der Folge  $\{\mu_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\mathbf{R}(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die aus den Endpunkten der maximalen distanzminimalen Verlängerungen  $\bar{\gamma}_{p_n}$  besteht. Wir benutzen erneut Korollar 6.3.2, um die Existenz einer unendlichen Indexmenge  $J \subset \mathbb{N}$  zu folgern, so daß für die Teilfolge  $\{\bar{\gamma}_{p_j}\}_{j \in J}$  die gleichmäßige Konvergenz

$$\bar{\gamma}_{p_j} \longrightarrow \bar{\gamma}_0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty$$

gegen eine kürzeste Verbindung  $\bar{\gamma}_0$  von  $\partial A$  zu dem Häufungspunkt  $\mu_0$  gegeben ist. Da nun  $p_j \in \text{Spur}(\bar{\gamma}_{p_j})$  nach Konstruktion erfüllt ist und ferner  $p_j \rightarrow p$  für  $j \rightarrow \infty$  für diese Wahl der Folge gilt, ergibt sich  $p \in \text{Spur}(\bar{\gamma}_0)$ . Nach Lemma 6.2.7 besteht die Mediale Achse unter der Voraussetzung (A') ausschließlich aus Non-Extendern, so daß insbesondere  $p$  ein Non-Extender ist. Daher kann sich  $p$  nicht im Inneren der kürzesten Verbindung  $\bar{\gamma}_0$  befinden, woraus  $p = \mathbf{R}(p) = \mu_0$  folgt. Aufgrund der Kompaktheit von  $\mathcal{M}(A)$  gilt daher

$$\mathbf{R}(p_n) = \mu_{p_n} \longrightarrow p = \mathbf{R}(p) \quad \text{für alle } p \in \mathcal{M}(A),$$

da  $\mu_0$  als beliebiger Häufungspunkt gewählt war. Damit ist  $\mathbf{R}$  in ganz  $\mathring{A}$  stetig. ■

Der weiter unten folgende Satz 6.3.7 ergibt sich als Folgerung des zuletzt bewiesenen Lemmas. Er besagt, daß die Mediale Achse ein starker (oder strenger) Deformationsretrakt des Inneren von  $A$  ist. Um ihn formulieren zu können, benötigt man die Begriffe *Homotopie* (*-Abbildung*) und eben *Deformationsretrakt*, die wir der Vollständigkeit unserer Darstellung zuliebe an dieser Stelle angeben wollen. Weitere Details findet man in [SZ94], Seite 47 ff., sowie [Sch75], Seite 151 ff.

### Definition 6.3.4

Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Homotopie (*-Abbildung*) von  $X$  nach  $Y$  ist eine Schar  $h_t : X \rightarrow Y$  von Abbildungen zu dem Parameter  $t \in [0, 1]$ , so daß die Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y \quad \text{mit} \quad H(x, t) := h_t(x)$$

stetig ist. Dabei ist  $X \times [0, 1]$  mit der Produkttopologie zu versehen.

<sup>4</sup>Jede unendliche Folge einer kompakten Menge besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Daher kann  $\{\mu_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  keine divergente Teilfolge enthalten. Nach unserer Argumentation stimmen alle Häufungspunkte mit  $\mu_p$  überein, so daß  $\mu_{p_n} \rightarrow \mu_p$  gilt.

Stellt man sich  $t$  als Zeitparameter vor, so kann man sich eine Homotopieabbildung  $H$  als stetige Deformation der Menge  $h_0(X) \subset Y$  in die Menge  $h_1(X) \subset Y$  vorstellen. Der (stetige) Weg des Bildes eines einzelnen Elements  $x \in X$  unter dieser Deformation wird durch  $t \mapsto h_t(x)$  parametrisiert. Wegen der Stetigkeit von  $H$  bewegen sich die Bilder benachbarter  $x_1, x_2 \in X$  auf benachbarten Wegen in  $Y$ .

### Definition 6.3.5

Zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen homotop, wenn es eine Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  gibt, für die  $h_0 \equiv f$  und  $h_1 \equiv g$  gilt.  $H$  heißt dann Homotopie von  $f$  nach  $g$ .

Eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen kann man sich folglich als die stetige Überführung (Deformation) ihrer Bildmengen ineinander vorstellen, wobei benachbarte Elemente  $x_1, x_2 \in X$  benachbarte Deformationswege in  $Y$  besitzen.

### Definition 6.3.6

Eine Menge  $A \subset X$  heißt Deformationsretrakt von  $X$ , wenn es eine Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit der Eigenschaft

$$h_0 \equiv \text{id}_X, \quad h_1(X) = A \quad \text{und} \quad h_1(a) = a \quad \text{für alle } a \in A$$

gibt.  $A$  heißt starker (strenger) Deformationsretrakt von  $X$ , wenn zusätzlich  $h_t(a) = a$  für alle  $a \in A$  und alle  $t \in [0, 1]$  erfüllt ist.

Anschaulich besitzt ein Deformationsretrakt  $A$  die Eigenschaft, daß seine Obermenge  $X$  stetig auf  $A$  zusammengezogen werden kann, ohne dabei jedoch die Menge  $A$  im Endergebnis zu deformieren ( $h_1|_A \equiv \text{id}_A$ ). Offenbar ist die Abbildung  $h_1$  eine Retraktion von  $X$  nach  $A$ , wie wir sie bereits in Lemma 6.3.3 kennengelernt haben. Bezeichnet man die Inklusionsabbildung mit  $i : A \rightarrow X$ , so ist Definition 6.3.6 gleichbedeutend zu:  $A$  ist ein Deformationsretrakt von  $X$ , wenn es eine Retraktion  $r : X \rightarrow A$  gibt, so daß  $\text{id}_X$  und  $i \circ r$  homotop sind.

### Satz 6.3.7

Ist  $A \subset S$  eine Teilmenge der  $C^2$ -stetigen Fläche  $S$ , die der Bedingung (A') genügt, so ist die Menge  $\mathcal{M}(A)$  ein starker Deformationsretrakt von  $A$ .

#### Beweis:

Wir führen den Beweis, in dem wir eine Homotopie  $\mathbf{H}$  angeben, für die  $\mathbf{h}_0 \equiv \text{id}_A$  und  $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{R}$  gilt, wobei  $\mathbf{R}$  der in (6.3) definierten Retraktion entspricht. Diese Homotopie sei gegeben durch die Abbildungsschar

$$\mathbf{h}_\tau(\mathbf{p}) := \begin{cases} \bar{\gamma}_p(s_p + \tau(s_{m_p} - s_p)) & \text{falls } \mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A) \\ \mathbf{p} & \text{falls } \mathbf{p} \in \mathcal{M}(A) \end{cases} \quad (6.4)$$

Offenbar gilt  $\mathbf{h}_0(\mathbf{p}) = \bar{\gamma}_p(s_p) = \gamma_p(s_p) = \mathbf{p}$  und  $\mathbf{h}_1(\mathbf{p}) = \bar{\gamma}_p(s_{m_p}) = \mathbf{R}(\mathbf{p})$  für alle  $\mathbf{p} \notin \mathcal{M}(A)$ . Für Punkte  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  gilt sogar  $\mathbf{h}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{p})$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ , so daß wir insgesamt bereits

$$\mathbf{h}_0 \equiv \text{id}_A, \quad \mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{R} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}_\tau(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}(A)$$

gezeigt haben.

Es verbleibt die Stetigkeit von  $\mathbf{H}$  zu zeigen. Da  $\bar{\gamma}_p$  gemäß Konstruktion nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$\mathbf{h}_\tau(\mathbf{p}) = \mathcal{O}_{\alpha_i} \left( s_p + \tau (s_{m_p} - s_p), t_p^{(i)} \right), \quad (6.5)$$

wobei  $\mathcal{O}_{\alpha_i}$  die Offsetfunktion der  $i$ -ten Randkomponente  $\alpha_i$  von  $\partial A$  bezeichnet. (Der Index  $i = i(\mathbf{p})$  hängt natürlich von dem Punkt  $\mathbf{p}$  ab.) Der Wert  $t_p^{(i)}$  entspricht nach Konstruktion dem Randkurvenparameter, so daß  $\bar{\gamma}_p$  die kürzeste Verbindung von  $\alpha_i(t_p^{(i)})$  nach  $\mathbf{p}$  darstellt. Da die Menge  $A$  die Bedingung (A') erfüllt, also alle Randkurven insbesondere  $C^2$ -stetig sind, ist die Offsetabbildung nach Satz 3.2.8 wohldefiniert und stetig differenzierbar. Bezeichnen wir mit  $I_i$  das Parameterintervall von  $\alpha_i$ , so ist  $\mathcal{O}_{\alpha_i}$  in dem Bereich  $[0, s_m(t)] \times I_i$  injektiv. Für  $t \in I_i$  bezeichnet dabei  $s_m(t)$  die Bogenlänge, die die Geodätische ausgehend von  $\alpha_i(t)$  zurücklegen muß, um die Mediale Achse zu erreichen. Wäre nämlich die Injektivität in einem Punkt  $\mathbf{p}$  verletzt, so wäre  $\mathbf{p}$  ein Pica und damit Element der Medialen Achse. Damit ist  $\mathcal{O}_{\alpha_i}$  in dem angegebenen Bereich umkehrbar stetig. Folglich ist die Abbildung

$$\mathbf{p} \longmapsto \left( s_p, t_p^{(i)} \right)$$

für alle  $\mathbf{p} \in (\mathring{A} - \mathcal{M}(A))$  wohldefiniert und stetig. Daher ist  $\mathbf{H}$  aufgrund von Gleichung (6.5) in  $(\mathring{A} - \mathcal{M}(A)) \times [0, 1]$  stetig.

Um die Stetigkeit von  $\mathbf{H}$  in ganz  $\mathring{A} \times [0, 1]$  nachzuweisen, genügt es daher, für eine konvergente Folge  $(\mathbf{p}_n, \tau_n) \rightarrow (\mathbf{p}_0, \tau_0)$  mit  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{M}(A)$  die Konvergenz

$$\mathbf{h}_{\tau_n}(\mathbf{p}_n) \longrightarrow \mathbf{h}_{\tau_0}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

zu zeigen. Nach Konstruktion entspricht der Wert  $s_p$  dem Abstand des Punktes  $\mathbf{p}$  zu  $\partial A$ , d.h. es gilt  $\text{dist}(\partial A, \mathbf{p}) = s_p$ . Da nun einerseits die Funktion des Abstands zum Rand von  $A$  stetig ist, sowie andererseits  $s_{m_p} = \text{dist}(\partial A, \mathbf{R}(\mathbf{p}))$  gilt, ergibt sich

$$s_{p_n} + \tau_n (s_{m_{p_n}} - s_{p_n}) \longrightarrow s_{p_0} = s_{m_{p_0}} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

da die Abbildung  $\mathbf{R}$  nach Hilfssatz 6.3.3 stetig ist. Nach (6.4) strebt daher  $\mathbf{h}_{\tau_n}(\mathbf{p}_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\bar{\gamma}_{p_0}(s_{m_{p_0}})$ . (Wie im letzten Absatz wurde hierbei die Stetigkeit der Offsetabbildung  $\mathcal{O}_{\alpha_i}$  benutzt, aus der sich die Konvergenz  $\bar{\gamma}_{p_n} \rightarrow \bar{\gamma}_{p_0}$  ergibt.) Aufgrund von  $\bar{\gamma}_{p_0}(s_{m_{p_0}}) = \mathbf{p}_0$  ist damit die Stetigkeit von  $\mathbf{H}$  in  $\mathring{A} \times [0, 1]$  nachgewiesen. ■

Aus dem vorangegangenen Satz können wir einige wichtige Informationen über die Topologie der Medialen Achse gewinnen. Um diese vollständig besprechen zu können, müßten wir allerdings einige Begriffe aus der algebraischen Topologie einführen, was jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Für eine Einführung in die Begriffe *Homotopietyp*, *-äquivalenz*, *-gruppe* und *Fundamentalgruppe* verweisen wir deshalb auf die Lehrbücher [SZ94] und [Spa95]. Die für unsere Anwendungen wesentlichen Eigenschaften der Medialen Achse können jedoch auch ohne die aufgezählten Begriffe formuliert werden.

### Korollar 6.3.8

*Die Mengen  $\mathring{A}$  und  $\mathcal{M}(A)$  sind vom gleichen Homotopietyp. Daher stimmen alle ihre Homotopiegruppen, insbesondere ihre Fundamentalgruppen (bis auf Isomorphie) überein. Folglich ist  $\mathcal{M}(A)$  genau dann wegzusammenhängend, wenn  $A$  wegzusammenhängend ist. Schließlich ist  $\mathcal{M}(A)$  genau dann einfach zusammenhängend, wenn  $A$  einfach zusammenhängend ist.*

**Beweis:**

Die oben definierte Retraktion  $\mathbf{R} : \dot{A} \rightarrow \mathcal{M}(A)$  ist nach Satz 6.3.7 eine Homotopieäquivalenz, wobei die zugehörige Homotopie-Inverse durch die Inklusionsabbildung  $i : \mathcal{M}(A) \rightarrow \dot{A}$  gegeben ist. Daher besitzen  $\dot{A}$  und  $\mathcal{M}(A)$  den gleichen Homotopietyp (vgl. auch [SZ94], S. 62 ff.). Die restlichen Aussagen ergeben sich aus der Isomorphie der zugehörigen Homotopiegruppen (siehe [SZ94], S. 106 ff. und S. 408 ff.). ■

## 6.4 Start- und Verzweigungspunkte der Medialen Achse

Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 6.3 können wir die Struktur der Medialen Achse einer Menge  $A \subset S$ , die der Bedingung (A') genügt, bereits recht genau charakterisieren. Nach Lemma 6.2.9 ist sie unter diesen Voraussetzungen nirgendwo dicht in  $S$ . Ferner ist  $\mathcal{M}(A)$  nach Korollar 6.3.8 wegzusammenhängend. Ziel dieses Abschnitts ist, die Mediale Achse als topologischen Graphen zu identifizieren, sowie die Begriffe Start- und Verzweigungspunkt einzuführen. Wenn wir im folgenden die Mediale Achse als eigenständige Menge betrachten, so sei  $\mathcal{M}(A)$  stets mit der Relativtopologie versehen.

Nach Bemerkung 6.2.8 besteht die Mediale Achse ausschließlich aus Non-Extendern, vorausgesetzt die betrachtete Menge genügt der Bedingung (A). Nach Lemma 6.1.9 ist damit jeder Punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  der Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises in  $A$ . Ausgehend von diesen Beobachtungen führen wir folgende Klassifizierung der Punkte der Medialen Achse ein.

### Definition 6.4.1

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die Bedingung (A) erfüllt. Ein Punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  besitzt den Grad  $\deg(\mathbf{p}) = n$ , wenn er genau  $n$  verschiedene, distanzminimale Verbindungen zu  $\partial A$  besitzt, die in  $\mathbf{p}$  paarweise verschiedene tangentielle Winkel besitzen.

### Bemerkung 6.4.2

An dem Grad eines Punktes  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  können wir seine wesentlichen Eigenschaften ablesen:

- (a) Ein Pica  $\mathbf{p}$  ist dadurch charakterisiert, daß  $\deg(\mathbf{p}) \geq 2$  gilt.
- (b) Ist  $\deg(\mathbf{p}) = 1$  erfüllt, so ist  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  ein Non-Extender (nach Bemerkung 6.2.8), der kein Pica ist. Da  $A$  der Bedingung (A) genügt, ist  $\mathbf{p}$  aufgrund der Gültigkeit von Korollar 6.2.5 ein Fokalkpunkt<sup>5</sup> bezüglich  $\partial A$  (dessen zugehöriger Geodätischer Krümmungskreis in  $A$  enthalten ist).
- (c) Der Grad eines Punktes erfüllt  $\deg(\mathbf{p}) = \infty$  beispielsweise in der Situation, in der der Rand des zugehörigen maximal einbeschriebenen Kreises in  $A$  ein Segment von  $\partial A$  enthält.  $\mathbf{p}$  ist in diesem Fall ein Fokalkpunkt bezüglich jedes Randelements, in dem der maximal einbeschriebene Abstandskreis um  $\mathbf{p}$  den Rand von  $A$  berührt.

Nach unserem erklärten Ziel, die Mediale Achse als topologischen Graphen zu charakterisieren, führen wir in der folgenden Definition die Mengen  $V$  und  $E$  ein, die weiter unten die Elemente des Graphen bilden werden. Daher werden wir bereits an dieser Stelle die suggestiven Begriffe *Ecke* und *Kante* der Medialen Achse prägen, um anschließend zu überlegen, daß diese Wahl sinnvoll ist.

<sup>5</sup>An dieser Stelle wie auch in den folgenden Erörterungen werden wir etwas nachlässig von Fokalkpunkten  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  sprechen. Gemeint ist hiermit, daß  $\mathbf{p}$  ein Fokalkpunkt bezüglich eines Randelements  $\alpha(t_0) \in \partial A$  ist, von dem ein distanzminimaler Pfad hin zu  $\mathbf{p}$  ausgeht.

**Definition 6.4.3**

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge der  $C^2$ -stetigen, parametrischen Fläche  $S$ , die der Voraussetzung (A') genügt. Es bezeichne

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{M}(A) \mid \mathbf{p} \text{ ist Fokalkpunkt oder } \deg(\mathbf{p}) > 2 \right\}, \\ E &:= \left\{ e \subset (\mathcal{M}(A) - V) \mid e \text{ zusammenhängend und maximal} \right\}. \end{aligned}$$

(Die Bedingung „ $e$  zusammenhängend und maximal“ in der Definition von  $E$  besagt: Für alle  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , für die es ein  $\mathbf{q} \in e$  und einen Weg  $\gamma \subset (\mathcal{M}(A) - V)$  von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{q}$  gibt, gilt  $\mathbf{p} \in e$ .)  $V$  heißt die Eckenmenge,  $E$  die Kantenmenge der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$ . Ein  $\mathbf{v} \in V$  wird folglich Ecke, die Elemente  $e \in E$  werden Kanten genannt.

Nach obiger Definition können alle Kanten  $e \in E$  gleichbedeutend in der Form

$e$  ist eine maximale Zusammenhangskomponente von Punkten  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$ , die die Eigenschaft  $\deg(\mathbf{p}) = 2$  und  $\mathbf{p}$  ist kein Fokalkpunkt besitzen

beschrieben werden. Aus der Definition der Ecken- und Kantenmenge in 6.4.3 erkennt man ferner unmittelbar, daß für alle  $\mathbf{v} \in V$  und alle  $e \in E$  die Identität  $\mathbf{v} \notin e$  erfüllt ist. Ferner gilt offenbar

$$\mathcal{M}(A) = V \cup \bigcup_{e \in E} e. \quad (6.6)$$

Da eine Kante  $e$  nach Definition 6.4.3 gerade aus den Picas vom Grad 2 bestehen, die einerseits keine Fokalkpunkteigenschaft besitzen, sowie andererseits eine Zusammenhangskomponente bilden, liegt die Vermutung nahe, daß es sich bei  $e$  um lokale Bereiche der Medialen Kurve handelt. Dies wird in dem nachfolgenden Satz 6.4.4 diskutiert.

Zunächst jedoch einige Bemerkungen zu dessen Formulierung, sowie zur mittelfristigen Vorgehensweise: In Satz 6.4.4 werden wir uns zunächst auf jene Kanten  $e \in E$  spezialisieren, deren innere Punkte eine offene Umgebung (bzgl.  $\mathcal{M}(A)$  versehen mit der Relativtopologie) besitzen, die homöomorph zum offenen Einheitsintervall ist. Damit werden zunächst alle Kanten aus der Betrachtung ausgeschlossen, die „T- oder X-Form“ (oder „Verzweigungen“ höherer Ordnung) besitzen. Anschließend werden wir in Satz 6.4.5 feststellen, daß man damit bereits alle existierenden Kanten behandelt hat.

**Satz 6.4.4**

Die Teilmenge  $A$  genüge der Bedingung (A'). Dann kann jede Kante  $e \in E$  mit der Eigenschaft, daß jeder innere Punkt  $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{e}$  eine in  $\mathcal{M}(A)$  offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu  $I^1 = (0, 1)$  ist, als Teilstück einer Medialen Kurve bezüglich des Randes  $\partial A$  dargestellt werden.

**Beweis:**

Sei  $e \in E$  eine beliebige Kante der Medialen Achse, die der Homöomorphiebedingung des Satzes genügt. Da jeder Punkt  $\mathbf{p}_0 \in e$  ein Pica mit genau zwei kürzesten Verbindungen (etwa mit Abstand  $s_0$  zu  $\alpha_i(t_0) \neq \alpha_j(\varphi_0) \in \partial A$ ) ist, der ferner weder Fokalkpunkteigenschaft bezüglich  $\alpha_i(t_0)$  noch bezüglich  $\alpha_j(\varphi_0)$  besitzt, ist die Mediale Kurve

$$\mathcal{O}_i(s(t), t) = \boldsymbol{\mu}(t) = \mathcal{O}_j(s(t), \varphi(t)) \quad \text{mit } s(t_0) = s_0 \text{ und } \varphi(t_0) = \varphi_0$$

für alle  $t$  in einer gewissen Umgebung von  $t_0$  erklärt. Insbesondere besitzt jeder Kurvenpunkt  $\boldsymbol{\mu}(t)$  zwei Geodätische Verbindungen  $\gamma_t^{(i)}$  bzw.  $\gamma_{\varphi(t)}^{(j)}$  zu den Randpunkten  $\alpha_i(t)$  bzw.  $\alpha_j(\varphi(t))$  und ist kein Fokalkpunkt bezüglich dieser Randpunkte.

Um zu beweisen, daß ein Teilstück dieser Medialen Kurve  $\boldsymbol{\mu}(t)$  die gesamte Kante  $e$  parametrisiert, werden wir wie folgt vorgehen. Wir betrachten einen Punkt  $\boldsymbol{\mu}(t_2)$ , der nicht mehr zur Medialen Achse gehört. (Falls es keinen solchen Punkt gibt, ist die Behauptung trivialerweise richtig.) Da sowohl die Mediale Achse als auch die Mediale Kurve abgeschlossene Teilmengen von  $A$  sind, gibt es einen Punkt (den wir unten  $\boldsymbol{\mu}(t_1)$  nennen werden), nach dessen Passierung die Mediale Kurve die Mediale Achse verläßt. Wir werden allerdings zeigen, daß dieser Punkt, an dem die Mediale Kurve die Mediale Achse verläßt, nicht mehr zu  $e$  gehört, da er eine Ecke der Medialen Achse darstellen muß. Da  $e$  nach Definition eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathcal{M}(A)$  ist, deren innere Punkte nach Voraussetzung eine in  $\mathcal{M}(A)$  offene, zu  $(0, 1)$  homöomorphe Umgebung besitzen (also keine „Verzweigungspunkte“ sind), muß die Mediale Kurve  $\boldsymbol{\mu}(t)$  die Kante  $e$  überdecken. Nach dieser Skizze der weiteren Argumentation, fahren wir mit dem Beweis fort.

Wir nehmen in der Umgebung, in der  $\boldsymbol{\mu}(t)$  erklärt ist, die Existenz eines Parameter  $t_2 > t_0$  bzw.  $t_2 < t_0$  an, so daß der zugehörige Mediale Kurvenpunkt  $\boldsymbol{\mu}(t_2)$  nicht mehr zu  $\mathcal{M}(A)$  gehört. Im folgenden können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $t_2 > t_0$  annehmen, da die Argumentation für  $t_2 < t_0$  völlig analog verläuft. Aufgrund der Abgeschlossenheit (bezüglich  $A$ ) sowohl der Medialen Achse als auch der Medialen Kurve muß es einen Parameter  $t_1$  mit  $t_0 \leq t_1 < t_2$  geben, so daß  $\boldsymbol{\mu}(t_1) \in \mathcal{M}(A)$  und  $\boldsymbol{\mu}(t_1 + \varepsilon) \notin \mathcal{M}(A)$  für alle  $\varepsilon > 0$  gilt. Jeder Punkt  $\boldsymbol{\mu}(t)$  der Medialen Kurve zu einem Parameter  $t_1 < t \leq t_2$  besitzt nun die Geodätischen Verbindungen  $\gamma_t^{(i)}$  bzw.  $\gamma_{\varphi(t)}^{(j)}$  zu den Randpunkten  $\alpha_i(t)$  bzw.  $\alpha_j(\varphi(t))$ , die nach unserer Annahme jedoch beide nicht distanzminimal sind.

Nach Lemma 6.2.10 gibt es offene Umgebungen von  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$ , die kein Element der Medialen Achse enthalten. Daher gibt es für alle Elemente einer beliebigen Parameterfolge  $t_k \in (t_1, t_2)$  mit  $t_k \rightarrow t_1$  Punkte  $\boldsymbol{p}_k^{(i)}, \boldsymbol{p}_k^{(j)} \in (\overset{\circ}{A} - \mathcal{M}(A))$ , die

$$\boldsymbol{p}_k^{(i)} \in \text{Spur} \left( \gamma_{t_k}^{(i)} \right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{p}_k^{(j)} \in \text{Spur} \left( \gamma_{\varphi(t_k)}^{(j)} \right)$$

genügen und die durch die jeweiligen Geodätischen Segmente  $\gamma_{t_k}^{(i)}$  bzw.  $\gamma_{\varphi(t_k)}^{(j)}$  distanzminimal mit  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_j$  (und damit mit  $\partial A$ ) verbunden sind. (Dies folgt aus der Eigenschaft, daß Geodätische lokal kürzeste Pfade sind.) Nach Konstruktion existieren nun Punkte  $\boldsymbol{p}_0^{(i)}$  und  $\boldsymbol{p}_0^{(j)}$ , so daß für die Folgen  $\{\boldsymbol{p}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\boldsymbol{p}_k^{(j)}\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_k^{(i)} &\longrightarrow \boldsymbol{p}_0^{(i)} \in \left( \text{Spur} \left( \gamma_{t_1}^{(i)} \right) - \mathcal{M}(A) \right) \\ \text{bzw.} \quad \boldsymbol{p}_k^{(j)} &\longrightarrow \boldsymbol{p}_0^{(j)} \in \left( \text{Spur} \left( \gamma_{t_1}^{(j)} \right) - \mathcal{M}(A) \right) \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Die Existenz der Grenzwerte als Element der Spur der Geodätischen  $\gamma_{t_1}^{(i)}$  bzw.  $\gamma_{t_1}^{(j)}$  folgt dabei aus der Stetigkeit der Offsetfunktion  $\mathcal{O}_i$  bzw.  $\mathcal{O}_j$ . Da alle Folgenglieder einen positiven Mindestabstand zur Medialen Achse nicht unterschreiten, sind die Grenzwerte  $\boldsymbol{p}_0^{(i)}$  bzw.  $\boldsymbol{p}_0^{(j)}$  außerdem keine Elemente von  $\mathcal{M}(A)$ .

Die Orte, an denen die Folgenglieder der zugehörigen Geodätischen die Eigenschaft der Distanzminimalität verlieren, sind durch

$$\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} := \boldsymbol{R} \left( \boldsymbol{p}_k^{(i)} \right) \in \mathcal{M}(A) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\mu}_k^{(j)} := \boldsymbol{R} \left( \boldsymbol{p}_k^{(j)} \right) \in \mathcal{M}(A)$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $\mathbf{R}$  die Retraktion, die in Gleichung (6.3) definiert wurde. Offenbar muß  $\mu_k^{(i)} \neq \mu_k^{(j)}$  gelten, da aufgrund von  $\mu_k^{(i)} \in \text{Spur}(\gamma_{t_k}^{(i)})$  und  $\mu_k^{(j)} \in \text{Spur}(\gamma_{\varphi(t_k)}^{(j)})$  andernfalls das Element  $\mu(t_k)$  der Medialen Kurve  $\mu_k^{(i)} = \mu(t_k) = \mu_k^{(j)}$  genügen würde, folglich in der Medialen Achse enthalten wäre, was der Annahme widerspricht. Aufgrund der Stetigkeit der Retraktion (vgl. Lemma 6.3.3) erhält man ferner

$$\mu_k^{(i)} \longrightarrow \mu(t_1) \quad \text{und} \quad \mu_k^{(j)} \longrightarrow \mu(t_1). \quad (6.7)$$

Da nach Annahme  $\gamma_{t_1}^{(i)}$  und  $\gamma_{\varphi(t_1)}^{(j)}$  distanzminimale Verbindungen von  $\partial A$  mit  $\mu(t_1)$  sind, gilt für die Folge der induzierten, distanzminimalen Geodätischen Segmente  $\{\bar{\gamma}_{t_k}^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\alpha_i(t_k)$  nach  $\mu_k^{(i)}$  bzw.  $\{\bar{\gamma}_{\varphi(t_k)}^{(j)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\alpha_j(\varphi(t_k))$  nach  $\mu_k^{(j)}$  aufgrund von Korollar 6.3.2

$$\bar{\gamma}_{t_k}^{(i)} \longrightarrow \bar{\gamma}_{t_1}^{(i)} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{\varphi(t_k)}^{(j)} \longrightarrow \bar{\gamma}_{\varphi(t_1)}^{(j)},$$

wobei es sich hierbei um gleichmäßige Konvergenz handelt.

Da die Menge der Picas dicht in  $\mathcal{M}(A)$  ist, können wir ferner annehmen, daß beide Folgen  $\{\mu_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\mu_k^{(j)}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(A)$  ausschließlich aus Picas bestehen. Daher gibt es für alle  $k$ , neben  $\bar{\gamma}_{t_k}^{(i)}$ , eine weitere distanzminimale Verbindung  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  von  $\partial A$  nach  $\mu_k^{(i)}$ . Zu beachten bei der Notation dieses Geodätischen Segments ist, daß der obere Index die Zugehörigkeit zum Punkt  $\mu_k^{(i)}$  anzeigt und *nicht* etwa zu der  $i$ -ten Randkurve  $\alpha_i$ . Nach demselben Argument existiert ferner eine Folge  $\{\bar{\eta}_k^{(j)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von distanzminimalen Geodätischen Verbindungen zwischen  $\partial A$  und  $\mu_k^{(j)}$ . Wendet man erneut Korollar 6.3.2 an, so ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz

$$\bar{\eta}_k^{(i)} \longrightarrow \bar{\eta}^{(i)} \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_k^{(j)} \longrightarrow \bar{\eta}^{(j)}$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Aufgrund von  $\text{Spur}(\bar{\eta}^{(i)}) \ni \mu_k^{(i)} \rightarrow \mu(t_1)$  und  $\text{Spur}(\bar{\eta}^{(j)}) \ni \mu_k^{(j)} \rightarrow \mu(t_1)$  (siehe Gleichung (6.7)), sind  $\bar{\eta}^{(i)}$  und  $\bar{\eta}^{(j)}$  distanzminimale Verbindungen von  $\partial A$  mit  $\mu(t_1)$ .

Wäre nun  $\mu(t_1)$  ein Pica mit genau zwei distanzminimalen Verbindungen zu  $\partial A$ , die wir ja oben mit  $\bar{\gamma}_{t_1}^{(i)}$  und  $\bar{\gamma}_{\varphi(t_1)}^{(j)}$  bezeichnet haben, so müßte

$$\text{Spur}(\bar{\eta}^{(i)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{t_1}^{(i)}) \quad \text{und} \quad \text{Spur}(\bar{\eta}^{(j)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{\varphi(t_1)}^{(j)}) \quad (6.8a)$$

$$\text{oder} \quad \text{Spur}(\bar{\eta}^{(i)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{\varphi(t_1)}^{(j)}) \quad \text{und} \quad \text{Spur}(\bar{\eta}^{(j)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{t_1}^{(i)}) \quad (6.8b)$$

gelten. Wäre die erste Identität  $\text{Spur}(\bar{\eta}^{(i)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{t_1}^{(i)})$  in der Alternative (6.8a) erfüllt, so wären (für hinreichend große  $k$ ) die Folgenglieder  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  und  $\bar{\gamma}_{t_k}^{(i)}$  distanzminimale Geodätische Verbindungssegmente von der gleichen Randkomponente von  $\partial A$  (nämlich von  $\alpha_i$ ) zu  $\mu_k^{(i)}$ . Aufgrund der Gleichheit der Grenzwertgeodätischen müßte  $\mu(t_1)$  folglich ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha_i(t_1)$  sein. Nach Definition 6.4.3 wäre damit  $\mu(t_1) \in V$  erfüllt. Mit der gleichen Argumentation impliziert die Gültigkeit der zweiten Identität  $\text{Spur}(\bar{\eta}^{(j)}) = \text{Spur}(\bar{\gamma}_{t_1}^{(i)})$  der zweiten Alternative (6.8b), daß  $\mu(t_1)$  ein Fokalfunkt bezüglich  $\alpha_i(t_1)$  ist.

Daher muß die Aussage in (6.8) entweder falsch sein, oder  $\mu(t_1)$  ist ein Fokalfunkt bezüglich  $\partial A$ . Folglich besitzt  $\mu(t_1)$  mindestens drei distanzminimale Verbindungen zum Rand von  $A$  oder ist ein Fokalfunkt bezüglich  $\partial A$ . In beiden Fällen gilt  $\mu(t_1) \in V$ , so daß die Mediale Kurve  $\mu(t)$  die Mediale Achse nur in Ecken verlassen kann. Jede Kante  $e$  ist nach Definition eine zusammenhängende Menge, die keine Ecken  $v \in V$  enthält. Nach Voraussetzung besitzt  $e$  ferner keine „Verzweigungspunkte“. Da der Punkt  $\mu(t_0)$  der betrachteten Medialen Kurve Element von  $e$  ist, muß  $\mu(t)$  die gesamte Kante  $e$  überdecken, was die Behauptung zeigt. ■

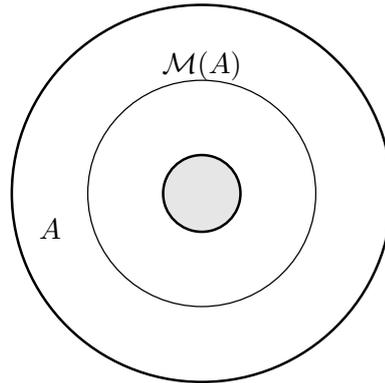


Abbildung 6.5: Mediale Achse eines Kreisrings

Der zuletzt bewiesene Satz könnte auch in anderen Worten so zusammengefaßt werden: Jeder Punkt  $p \in \mathcal{M}(A)$ , in dem die Mediale Kurve die Mediale Achse verläßt, gehört zur Eckenmenge  $V$ . Im Hinblick auf unser Ziel, die Mediale Achse numerisch bestimmen zu können, motiviert Satz 6.4.4 nachträglich die Art der Einteilung der Medialen Achse, wie sie in Definition 6.4.3 vorgenommen wurde. Diese Überlegung wird mit dem folgenden Satz weiter konkretisiert.

#### Satz 6.4.5

Die Teilmenge  $A \subset S$  genüge der Bedingung (A'). Jede Kante  $e \in E$  ist homöomorph zum offenen Einheitsintervall  $I^1$  oder zum Einheitskreis  $S^1$  und kann als Teilstück der Medialen Kurve des Randes  $\partial A$  dargestellt werden. Falls  $A$  einfach zusammenhängend ist, sind alle Kanten homöomorph zu  $I^1$  und es existieren genau zwei Ecken  $v_1 \neq v_2 \in V$ , so daß  $\partial e = \{v_1, v_2\}$  gilt.

#### Beweis:

Um Verzweigungen in einer Kante  $e \in E$  auszuschließen, nehmen wir die Existenz eines Schnittpunktes  $p_0 = \text{Spur}(\beta_1) \cap \text{Spur}(\beta_2)$  zweier verschiedener Wege  $\beta_1, \beta_2 \subset e$  an. Nach Definition 6.4.3 besitzt  $p_0$  den Grad 2 und ist kein Fokelpunkt bezüglich  $\partial A$ . Folglich besitzt dieser gemeinsame Punkt beider Wege genau zwei distanzminimale Verbindungen zu  $\partial A$ . Sowohl  $\beta_1$  als auch  $\beta_2$  können nach Satz 6.4.4 als Teilstück einer Medialen Kurve dargestellt werden. Durch Vorgabe des gemeinsamen Punktes  $p_0$  sind (aufgrund der Eindeutigkeit des Paares distanzminimaler Verbindungen) die zugehörigen Anfangswerte  $s_0$  (Medialer Abstand), sowie die Parameter  $t_0$  und  $\varphi_0$  der beteiligten Randpunkte eindeutig festgelegt. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Medialen Differentialgleichung kann es sich bei  $p_0$  um keinen transversalen Schnittpunkt handeln. Folglich gibt es für alle Kanten  $e \in E$  und alle Punkte  $p_0 \in \dot{e}$  eine Umgebung von  $p_0$  in  $e$ , die homöomorph zum Einheitsintervall ist, so daß  $e$  nach Satz 6.4.4 als Teilstück der Medialen Kurve dargestellt werden kann.

Ferner wurde in Satz 6.4.4 nachgewiesen, daß die Mediale Kurve nur in Ecken  $v \in V$  die Kante  $e$  verlassen kann. Da eine Menge genau dann offen ist, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält, ist  $e$  folglich offen in  $\mathcal{M}(A)$ . Daher ist  $e$  homöomorph zu  $I^1$  oder zu  $S^1$ . Nach Korollar 6.3.8 ist  $\mathcal{M}(A)$  einfach zusammenhängend, falls  $A$  einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall ist also jede Kante  $e$  homöomorph zu  $I^1$ . Der Rand  $\partial e$  besteht dann aus zwei verschiedenen Ecken  $v_1 \neq v_2 \in V$ . ■

Im Fall eines Kreisrings in der Euklidischen Ebene besteht die Mediale Achse aus einer Kreislinie (vgl. Abbildung 6.5). Hier ist die Eckenmenge  $V$  leer; die Kantenmenge besteht aus einem

Element, der zur  $S^1$  homöomorphen Kreislinie. In diesem Beispiel liefert also die Zerlegung von  $\mathcal{M}(A)$  in die Teilmengen  $V$  und  $E$  keine Beschreibung der Medialen Achse als planarer Graph. (Der einzige Graph mit leerer Eckenmenge ist der leere Graph.) Um in solchen Fällen dennoch Graphstruktur zu erzeugen, muß man für jede zu  $S^1$  homöomorphe Zusammenhangskomponente  $e$  von  $\mathcal{M}(A)$  einen beliebigen (durch Definition 6.4.3 noch nicht ausgezeichneten) Punkt  $\mathbf{v} \in e$  zur Eckenmenge  $V$  hinzufügen. Dadurch wird  $\{e - \{\mathbf{v}\}\}, \{\mathbf{v}\}$  ein Teilgraph der Medialen Achse mit einer Kante und einer Ecke. Um die folgenden Überlegungen nicht mit diesen eher technischen Details zu erschweren, beschränken wir uns auf einfach zusammenhängende Gebiete  $A \subset S$ .

Insgesamt müssen die Aussagen von Satz 6.4.4 und Satz 6.4.5 als sehr zentral für unsere weiteren Untersuchungen bezeichnet werden. Mit ihrer Hilfe sind wir dem Ziel, die Mediale Achse als topologischen Graphen zu beschreiben, ein gutes Stück näher gekommen. Für die folgenden Untersuchungen wird die folgende Endlichkeitsbedingung häufiger zu formulieren sein:

(V) Für die Eckenmenge der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$  gilt  $|V| < \infty$ .

Diese Voraussetzung stellt allerdings eine nicht triviale Einschränkung dar, auf die wir weiter unten erneut zu sprechen kommen werden. Der tiefere Grund für die Forderung (V) besteht darin, daß nun keine Häufungspunkte einer Folge von Ecken existieren können.

#### Bemerkung 6.4.6

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die Voraussetzung (A') erfüllt. Dann ist Bedingung (V) äquivalent zu

(E) Für die Kantenmenge der Medialen Achse gilt  $|E| < \infty$ .

#### Beweis:

Die Eckenmenge  $V$  ist genau dann eine endliche Menge diskreter Punkte der Medialen Achse, wenn ihre Komplementärmenge bezüglich  $\mathcal{M}(A)$  aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht. Daher sind (V) und (E) gleichbedeutend. ■

Wir kommen nun zu der angekündigten Konstruktion eines topologischen Graphen. Hierzu muß noch eine Inzidenzbeziehung zwischen der bereits eingeführten Kanten- und Eckenmenge angegeben werden. Die Vorgehensweise ist allerdings nach den obigen Vorbereitungen evident. Durch die Äquivalenzrelation  $\simeq$ , die durch die Vorschrift

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \simeq (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$$

definiert sei, identifiziert man geordnete Paare von Ecken miteinander, die als ungeordnetes Tupel identisch sind. Der zugehörige Quotientenraum

$$\mathcal{V} := V \times V / \simeq$$

besteht folglich aus Klassen der Gestalt  $[(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)]$  und  $[(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]$  für  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ . Wir betrachten die Abbildung  $\iota : E \rightarrow \mathcal{V}$ , die durch

$$\iota(e) := [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)] \quad \text{mit } \partial e = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \quad (6.9)$$

erklärt ist. Nach Satz 6.4.5 ist  $\iota$  wohldefiniert. Wir benutzen  $\iota$  nun, um eine Inzidenzbeziehung einzuführen.

**Definition 6.4.7**

Gilt für  $e \in E$  die Gleichung  $\iota(e) = [(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)]$ , so heißen die Ecken  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  durch die Kante  $e$  verbunden. Eine Kante heißt Schlinge, wenn  $\iota(e) = [(\mathbf{v}, \mathbf{v})]$  gilt. Gibt es zwei verschiedene Kanten  $e_1 \neq e_2 \in E$  mit der Eigenschaft  $\iota(e_1) = \iota(e_2)$ , so heißt  $\bar{e}_1 \cup \bar{e}_2$  Zweieck.

**Satz 6.4.8**

Sei  $A \subset S$  eine einfach zusammenhängende Teilmenge, die der Bedingung (A') genügt. Dann kann die Mediale Achse als planarer, topologischer, zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  mit der Eckenmenge  $V$  und der Kantenmenge  $E$  gemäß Definition 6.4.3 und den Inzidenzbeziehungen aus Definition 6.4.7 beschrieben werden. Da  $A$  einfach zusammenhängend ist, besitzt die Mediale Achse weder Schlingen noch Zweiecke.

**Beweis:**

Wie bereits in Gleichung (6.6) festgestellt, kann die Mediale Achse unter der Voraussetzung (A') als Vereinigung der Elemente der disjunkten Mengen  $V$  und  $E$  betrachtet werden. Mit der Inzidenzbeziehung, die durch  $\iota$  induziert wird, kann  $\mathcal{M}(A)$  als Graph  $G = (V, E)$  aufgefaßt werden. Nach Definition können zwei verschiedene Kanten  $e_1, e_2 \in E$  (beide sind zusammenhängend) keinen Schnittpunkt besitzen, so daß  $G$  planar ist. Nach Satz 6.4.5 ist jede Kante homöomorph zum offenen Einheitsintervall, so daß  $\bar{e}$  entweder ein Kurvenbogen oder eine Jordankurve ist. Folglich ist  $G$  ein topologischer Graph. Nach Korollar 6.3.8 ist  $\mathcal{M}(A)$  und damit auch  $G$  wegzusammenhängend. Ebenfalls nach 6.3.8 ist die Mediale Achse genau dann einfach zusammenhängend, wenn die betrachtete Menge  $A$  einfach zusammenhängend ist. Daher kann es weder Schlingen noch Zweiecke geben, da diese jeweils einen geschlossenen Weg induzieren, der in  $\mathcal{M}(A)$  nicht null-homotop ist. ■

Mit dem Nachweis von Satz 6.4.8 ist es uns gelungen, die Mediale Achse eines einfach zusammenhängenden Gebiets als topologischen Graphen zu charakterisieren. Insbesondere ist daher  $\mathcal{M}(A)$  unter den genannten Voraussetzungen ein simplizialer Komplex der Dimension 1. Ferner ist es uns mit Satz 6.4.5 gelungen, die Kanten der Medialen Achse recht genau zu beschreiben. Wir wollen nun die möglichen Varianten von Ecken analysieren.

**Satz 6.4.9**

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die die Voraussetzung (A') erfüllt. Ferner erfülle die Eckenmenge  $V$  der Medialen Achse die Voraussetzung (V). Für jede Ecke  $\mathbf{v} \in V$  vom Grad  $n < \infty$  existieren genau  $n$  paarweise verschiedene Kanten  $e_1, \dots, e_n \in E$ , so daß  $\mathbf{v} \in \partial e_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt. (Mit anderen Worten gehen genau  $n$  Kanten der Medialen Achse von  $\mathbf{v}$  aus.)

**Beweis:**

Sei  $\mathbf{v} \in V$  mit  $\deg(\mathbf{v}) = n < \infty$ . Nach Definition 6.4.1 besitzt diese Ecke also  $n$  paarweise verschiedene distanzminimale Pfade  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) zu  $\partial A$ , die in  $\mathbf{v}$  paarweise verschiedene tangentiale Winkel besitzen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, diese kürzesten Verbindungen seien nach aufsteigendem tangentialen Winkel, zyklisch nummeriert. Insbesondere gelte für die  $(n+1)$ -te Kurve  $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ . Ferner seien alle Kürzesten nach ihrer Bogenlänge parametrisiert. Es gelte also für alle  $1 \leq i \leq n$

$$\gamma_i(0) \in \partial A \quad \text{und} \quad \gamma_i(s_v) = \mathbf{v}, \quad (6.10)$$

wobei  $s_v$  den Abstand von  $\partial A$  nach  $\mathbf{v}$  bezeichnet.

Zu einem beliebigen, aber fest gewählten Abstand  $0 < d \leq s_v$  betrachten wir im folgenden den Abstandskreis  $B_d(\mathbf{v})$  um  $\mathbf{v}$ . Die  $n$  distanzminimalen Verbindungen  $\gamma_i$  induzieren eine Unterteilung von  $B_d(\mathbf{v})$  in  $n$  disjunkte, offene Teilmengen  $G_i \subset B_d(\mathbf{v})$ , die die Eigenschaften

$$\bigcup_{i=1}^n G_i = B_d(\mathbf{v}) - \bigcup_{i=1}^n \text{Spur}(\gamma_i) \quad \text{und} \quad B_d(\mathbf{v}) \cap (\gamma_i \cup \gamma_{i+1}) \subset \partial G_i \quad (6.11)$$

besitzen. Hierbei ist die zyklische Nummerierung der  $\gamma_i$  zu beachten.

Da die Kurven  $\gamma_i$  paarweise verschiedene tangentialen Winkel in  $\mathbf{v}$  besitzen, gibt es für alle  $1 \leq i \leq n$  eine Folge  $\{\mathbf{p}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G_i$ , mit

$$\mathbf{p}_k^{(i)} \longrightarrow \mathbf{v} \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wir betrachten ferner die induzierten Folgen  $\{\boldsymbol{\mu}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , die durch

$$\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} := \mathbf{R}(\mathbf{p}_k^{(i)}) \in \mathcal{M}(A)$$

definiert sind. Dabei ist  $\mathbf{R}$  die Retraktion, die in Gleichung (6.3) auf Seite 169 definiert wurde. Aufgrund der Stetigkeit von  $\mathbf{R}$  (vgl. Lemma 6.3.3) gilt für alle  $i$

$$\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} \longrightarrow \mathbf{v} \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wir bezeichnen ferner mit  $\boldsymbol{\eta}_k^{(i)}$  eine (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmte) distanzminimale Verbindung von  $\partial A$  mit  $\mathbf{p}_k^{(i)}$ , sowie mit  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}$  deren distanzminimale Verlängerung nach  $\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} \in \mathcal{M}(A)$ . Wir nehmen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß diese Pfade nach ihrer Bogenlänge parametrisiert sind. Insbesondere gelte für alle  $1 \leq i \leq n$  und alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_k^{(i)}(0) &= \bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}(0) \in \partial A \\ \boldsymbol{\eta}_k^{(i)}(s_k^{(i)}) &= \bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}(s_k^{(i)}) = \mathbf{p}_k^{(i)} \\ \bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}(\bar{s}_k^{(i)}) &= \boldsymbol{\mu}_k^{(i)}, \end{aligned}$$

wobei  $s_k^{(i)} := \text{dist}(\partial A, \mathbf{p}_k^{(i)})$  und  $\bar{s}_k^{(i)} := \text{dist}(\partial A, \boldsymbol{\mu}_k^{(i)})$  benutzt wurde.

Da nach Konstruktion  $\mathbf{p}_k^{(i)} \in G_i$  gilt, muß  $\text{Spur}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)})$  mindestens einen Schnittpunkt  $\mathbf{q}_k^{(i)}$  mit  $\partial G_i$  besitzen. Wäre dieser Punkt Element von  $\text{Spur}(\gamma_i)$  bzw.  $\text{Spur}(\gamma_{i+1})$ , so müßte  $\mathbf{q}_k^{(i)}$  aufgrund der Distanzminimalität von  $\gamma_i$  (bzw.  $\gamma_{i+1}$ ) und  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}$  ein Pica sein. Nach der Aussage von Hilfssatz 6.1.5, nach der jeder Pica ein Non-Extender ist, müßte folglich  $\mathbf{q}_k^{(i)} = \mathbf{v}$  gelten, da sonst  $\gamma_i$  (bzw.  $\gamma_{i+1}$ ) nicht distanzminimal über  $\mathbf{q}_k^{(i)}$  hinaus verlängert werden könnte. Nach derselben Argumentation müßte dann auch  $\mathbf{p}_k^{(i)} = \mathbf{v}$  (aufgrund der Distanzminimalität von  $\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}$ ) gelten, was im Widerspruch zur Forderung  $\mathbf{p}_k^{(i)} \in G_i$  steht. Damit haben wir nachgewiesen, daß sich jeder Schnittpunkt  $\mathbf{q}_k^{(i)} \in \text{Spur}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}) \cap \partial G_i$  in dem Kreisrandsegment von  $B_d(\mathbf{v})$  befinden muß, das durch  $\gamma_i$  und  $\gamma_{i+1}$  begrenzt wird.

Wie oben erläutert, muß  $\text{Spur}(\bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)})$  mindestens einen Schnittpunkt  $\mathbf{q}_k^{(i)}$  mit  $\partial G_i$  besitzen (den „Eintrittspunkt“ in  $B_d(\mathbf{v})$ ). Wir nehmen nun die Existenz eines zweiten Schnittpunkts  $\bar{\mathbf{q}}_k^{(i)} = \bar{\boldsymbol{\eta}}_k^{(i)}(s) \in \partial G_i$  an, mit einem Parameter  $s$  der  $s_k^{(i)} < s \leq \bar{s}_k^{(i)}$  genügt. Die Nebenbedingung an  $s$

besagt, daß  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  den Folgenpunkt  $\mathbf{p}_k^{(i)}$  zum Zeitpunkt des zweiten Schnitts bereits durchlaufen haben soll. Nach den Überlegungen des letzten Absatzes gilt für diesen zweiten Schnittpunkt

$$d = \text{dist}(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(i)}) \leq \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{p}_k^{(i)}) + \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(i)}).$$

Daher erhält man für den Abstand, den  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  von  $\mathbf{p}_k^{(i)}$  nach  $\boldsymbol{\mu}_k^{(i)}$  zurücklegt, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \boldsymbol{\mu}_k^{(i)}) &= \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \bar{\eta}_k^{(i)}(\bar{s}_k^{(i)})) \geq \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \bar{\eta}_k^{(i)}(s)) \\ &= \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \bar{\mathbf{q}}_k^{(i)}) \geq d - \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{p}_k^{(i)}). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Mit der Wahl von  $0 < \varepsilon < d/2$  betrachten wir nun den Abstandskreis  $B_\varepsilon(\mathbf{v})$ . Aufgrund von  $\mathbf{p}_k^{(i)} \rightarrow \mathbf{v}$  für  $k \rightarrow \infty$ , gibt es ein  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , so daß  $\mathbf{p}_k^{(i)} \in B_\varepsilon(\mathbf{v})$  für alle  $k \geq N(\varepsilon)$  erfüllt ist. Für diese Folgenglieder ergibt sich wegen  $\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{p}_k^{(i)}) < \varepsilon$  aus (6.12) die Ungleichung

$$\text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \boldsymbol{\mu}_k^{(i)}) > d - \varepsilon > \frac{d}{2}. \quad (6.13)$$

Andererseits gilt wegen  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}(A)$

$$\text{dist}(\mathcal{M}(A), \mathbf{p}_k^{(i)}) \leq \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{p}_k^{(i)}) < \varepsilon < \frac{d}{2},$$

woraus durch Kombination mit (6.13)

$$\text{dist}(\mathcal{M}(A), \mathbf{p}_k^{(i)}) < \text{dist}(\mathbf{p}_k^{(i)}, \boldsymbol{\mu}_k^{(i)})$$

für alle hinreichend großen  $k$  folgt. Da  $\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} \in \mathcal{M}(A)$  der Endpunkt des Verbindungspfades  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  ist, steht dies im Widerspruch zur Distanzminimalität von  $\bar{\eta}_k^{(i)}$ . Daher kann (für hinreichend große  $k$ )  $\bar{\eta}_k^{(i)}$  entgegen unserer Annahme keinen „Austrittspunkt“  $\bar{\mathbf{q}}_k^{(i)}$  besitzen. Damit folgt insbesondere

$$\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} = \bar{\eta}_k^{(i)}(\bar{s}_k^{(i)}) \in G_i$$

für alle  $k \geq N(\varepsilon)$ . Da nun ferner  $\boldsymbol{\mu}_k^{(i)} \rightarrow \mathbf{v}$  für  $k \rightarrow \infty$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt, muß es mindestens  $n$  verschiedene Kanten in  $E$  geben, die sich in  $\mathbf{v}$  häufen. Bei diesem letzten Schluß wird allerdings Bedingung (V) benutzt, da es sich sonst bei den Folgengliedern  $\boldsymbol{\mu}_k^{(i)}$  auch um Ecken der Medialen Achse handeln könnte.

Zum Beweis der Aussage des Satzes muß nun ausgeschlossen werden, daß eine Teilmenge  $G_i \subset B_d(\mathbf{v})$  mehr als nur eine Kante besitzt, die nach  $\mathbf{v}$  strebt. Wir nehmen im Gegenteil an, es gäbe einen Index  $1 \leq i \leq n$  und Kanten  $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{e}_2 \in E$ , so daß für alle  $\varepsilon > 0$

$$G_i \cap B_\varepsilon(\mathbf{v}) \cap \mathbf{e}_j \neq \emptyset \quad \text{für } j = 1, 2$$

gilt. Da sich nach Voraussetzung (V) die Ecken der Medialen Achse nicht häufen, können wir ein hinreichend kleines  $\varepsilon_1 > 0$  wählen, so daß sich in dem abgeschlossenen Abstandskreis  $\overline{B_{\varepsilon_1}(\mathbf{v})}$  außer  $\mathbf{v}$  keine weitere Ecke der Kanten  $\mathbf{e}_j$  befindet. Da ferner die Bedingungen (V) und (E) nach Bemerkung 6.4.6 gleichbedeutend sind, können wir ferner annehmen, daß  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  so gewählt wurden, daß ihr Schnittwinkel in  $\mathbf{v}$  minimal unter allen in  $G_i$  nach  $\mathbf{v}$  strebenden Kanten ist. Damit haben wir (nach evt. Verkleinerung von  $\varepsilon_1$ ) insbesondere ausgeschlossen, daß eine weitere Kante zwischen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  existiert.

Unter diesen Annahmen enthält der Rand  $\partial B_\delta(\mathbf{v})$  für ein beliebiges  $0 < \delta < \varepsilon_1/2$  je ein Element  $\mu_\delta^{(1)} \in e_1$  und  $\mu_\delta^{(2)} \in e_2$  der beiden Kanten. Ferner kann das die beiden Randpunkte  $\mu_\delta^{(1)}$  und  $\mu_\delta^{(2)}$  in  $G_i$  verbindende Segment von  $\partial B_\delta(\mathbf{v})$  als Teilstück der Offsetkurve  $\alpha_\delta$  im Abstand  $\delta$  um  $\mathbf{v}$  dargestellt werden. Wir setzen

$$\alpha_\delta(t_1) = \mu_\delta^{(1)}, \quad \alpha_\delta(t_2) = \mu_\delta^{(2)} \quad \text{und} \quad \alpha_\delta((t_1, t_2)) = \partial B_\delta(\mathbf{v}) \cap G_i.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Offsetfunktion ist  $\alpha_\delta$  eine stetige Kurve. Da die Retraktion  $\mathbf{r}$  nach Lemma 6.3.3 ebenfalls stetig ist, stellt die Funktion

$$\mathbf{R}_\alpha := \mathbf{R} \circ \alpha : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

eine stetige Abbildung dar, für die  $\mathbf{R}_\alpha(t_j) = \mu_\delta^{(j)}$  für  $j = 1, 2$  gilt.

Aufgrund der Stetigkeit von  $\mathbf{R}_\alpha$  ist die Menge  $\mathbf{R}_\alpha((t_1, t_2)) \subset \mathcal{M}(A)$  ein Weg von  $\mu_\delta^{(1)}$  nach  $\mu_\delta^{(2)}$ , der ausschließlich in der Medialen Achse verläuft. Wir wollen uns nun überlegen, daß es unter der oben gemachten Annahme einen Parameter  $t_p \in (t_1, t_2)$  geben muß, so daß  $\mathbf{R}_\alpha(t_p) = \mathbf{v}$  erfüllt ist. Mit anderen Worten lautet die Behauptung, daß der Weg  $\mathbf{R}_\alpha$  die beiden Endpunkte  $\mu_\delta^{(1)}$  und  $\mu_\delta^{(2)}$  über  $\mathbf{v}$  verbindet. Nach der Wahl von  $\varepsilon_1$  besitzen die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  neben  $\mathbf{v}$  keine weiteren Ecken in  $\overline{B_{\varepsilon_1}(\mathbf{v})}$ . Gäbe es nun keinen Parameter  $t_p$  mit der von uns postulierten Eigenschaft, so müßte  $\mathbf{R}_\alpha$  folglich  $\overline{B_{\varepsilon_1}(\mathbf{v})}$  verlassen, um  $\mu_\delta^{(1)}$  und  $\mu_\delta^{(2)}$  zu verbinden. Damit gäbe es einen Parameter  $t_q$ , so daß  $\mathbf{R}_\alpha(t_q) \notin \overline{B_{\varepsilon_1}(\mathbf{v})}$  erfüllt wäre. Für den zugehörigen Punkt  $\mathbf{q} := \alpha_\delta(t_q)$  müßte daher

$$\text{dist}(\mathcal{M}(A), \mathbf{q}) = \text{dist}(\mathbf{R}_\alpha(t_q), \mathbf{q}) > \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{6.14}$$

gelten. Andererseits gilt stets die Abschätzung

$$\text{dist}(\mathcal{M}(A), \mathbf{q}) \leq \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = \delta < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

die natürlich (6.14) widerspricht. Daher verbindet  $\mathbf{R}_\alpha$  die beiden Kantenpunkte über die Ecke  $\mathbf{v}$ , die zu einem Zeitpunkt  $t_p \in (t_1, t_2)$  erreicht wird.

Der durch den Parameter  $t_p$  induzierte Punkt wird mit  $\mathbf{p} := \alpha_\delta(t_p) \in G_i$  bezeichnet. Dieser Punkt ist nach unserer Wahl von  $\varepsilon_1$  ein Extender. Daher kann man eine distanzminimale Verbindung  $\gamma_p$  von  $\partial A$  nach  $\mathbf{p}$  angeben, deren (ebenfalls distanzminimale) Verlängerung  $\bar{\gamma}_p$  in  $\mathbf{R}_\alpha(t_p) = \mathbf{v}$  die Mediale Achse trifft (vgl. mit der Konstruktion der Retraktion auf Seite 169). Nun kann die Bogenlänge von  $\bar{\gamma}_p$  einerseits nicht kleiner als  $s_v$  sein, da sonst die Pfade  $\gamma_i$  keine kürzesten Verbindungen von  $\partial A$  nach  $\mathbf{v}$  wären (siehe die Vereinbarung in (6.10)). Andererseits kann sie auch nicht größer als  $s_v$  sein, da sonst  $\bar{\gamma}_p$  nicht distanzminimal wäre. Folglich muß  $\bar{\gamma}_p$  die Länge  $s_v$  besitzen, so daß die Ecke  $\mathbf{v}$  neben  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  einen weiteren distanzminimale Pfad zu  $\partial A$  besitzt. Da dies nach der Voraussetzung  $\text{deg}(\mathbf{v}) = n$  des Satzes ausgeschlossen ist, muß unsere Annahme falsch gewesen sein. Also enthält jedes  $G_i$  genau eine Kante, die in  $\mathbf{v}$  endet. ■

Der letzte Satz gibt uns ein tieferes Verständnis über die verschiedenen Arten von Ecken der Medialen Achse. Offensichtlich kann man die verschiedenen Eckentypen anhand ihres Grades unterscheiden. Zu beachten ist allerdings, daß sich die Aussage von Satz 6.4.9 lediglich auf Ecken mit endlichem Grad bezieht. Bereits in Bemerkung 6.4.2 haben wir darauf hingewiesen, daß es (selbst unter der Endlichkeitsannahme (V)) Punkte in  $\mathcal{M}(A)$  geben kann, die eine unendliche

Anzahl distanzminimaler Verbindungen zum Rand von  $A$  besitzen. Als Beispiele wurden dort Fokalfpunkte der Medialen Achse genannt, deren zugehöriger maximal einbeschriebener Kreis mit einem ganzen Kreisrandsegment den Rand des Gebietes  $\partial A$  berührt. Setzt man allerdings Bedingung (V) voraus, so stellen Fokalfpunkte  $\mathbf{v}$  mit dieser Eigenschaft den einzigen Fall dar, für die  $\deg(\mathbf{v}) = \infty$  erfüllt ist. Dies wird in dem folgenden Hilfssatz festgestellt.

**Lemma 6.4.10**

*Die Mediale Achse einer Teilmenge  $A \subset S$ , die die Voraussetzung (A') erfüllt, genüge der Bedingung (V). Dann ist für alle  $\mathbf{v} \in V$  die Identität  $\deg(\mathbf{v}) = \infty$  genau dann erfüllt, wenn  $\mathbf{v}$  ein Fokalfpunkt von  $\partial A$  ist, dessen zugehöriger maximal einbeschriebener Kreis mit  $\partial A$  ein Kreisrandsegment (bestehend aus unendlich vielen Punkten) gemeinsam hat.*

**Beweis:**

Sei  $\mathbf{v} \in V$  eine Ecke, die unendlich viele Verbindungskürzeste zum Rand von  $A$  besitzt, deren tangentialen Winkel in  $\mathbf{v}$  paarweise verschiedenen sind. Wir nehmen zunächst an, die Menge dieser tangentialen Winkel wäre abzählbar. Unter dieser Annahme könnte man diese Winkel als diskrete, aufsteigende Folge  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $0 \leq \phi_1 < \dots < \phi_k < \phi_{k+1} < \dots < 2\pi$  schreiben. Für jede endliche Teilauswahl von  $n$  Winkeln  $\phi_{j+1}, \dots, \phi_{j+n}$  findet man mit Hilfe der Argumentation des Beweises von Satz 6.4.9  $n$  paarweise verschiedene Ecken  $\mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_{j+n} \in E$ , die von  $\mathbf{v}$  ausgehen. Daraus würde allerdings folgen, daß die Endlichkeitsbedingung (E) verletzt wäre. Nach Bemerkung 6.4.6 ist diese Bedingung äquivalent zu (V), so daß die Menge der tangentialen Winkel überabzählbar sein muß. Damit muß es aber ein Teilintervall von  $I \subset [0, 2\pi)$  geben, so daß es für alle  $\phi \in I$  eine Verbindungskürzeste von  $\mathbf{v}$  zu  $\partial A$  dieses Winkels existiert. Folglich ist  $\mathbf{v} \in V$  der Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises in  $A$ , dessen Rand ein ganzes Kreisrandsegment mit  $\partial A$  gemeinsam hat.

Die Umkehrung dieser Aussage ergibt sich aus Bemerkung 6.4.2 (c). ■

Voraussetzung (V) ist für die Gültigkeit von Lemma 6.4.10 allerdings wesentlich, da sich im Fall eines Graphen mit unendlich vielen Kanten die Winkel der in einer Ecke  $\mathbf{v}$  anliegenden Kanten im Wert Null häufen könnten. Nachdem in diesem Hilfssatz geklärt werden konnte, welche Art von Ecken des endlichen Graphen einen unendlichen Grad besitzen, fehlt zur Vervollständigung des Klassifikationssatzes 6.4.9 eine Aussage darüber, wieviele Kanten der Medialen Achse von einer solchen Ecke  $\mathbf{v} \in V$  mit  $\deg(\mathbf{v}) = \infty$  ausgehen. Um eine solche Aussage formulieren zu können, führen wir die folgenden beiden Begriffe ein.

**Definition 6.4.11**

*Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die Bedingung (A) erfüllt, und  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  ein Punkt ihrer Medialen Achse. Eine eigentliche distanzminimale Verbindung der Länge  $d$  von  $\partial A$  nach  $\mathbf{p}$  ist eine maximale Familie  $\{\gamma_t\}_{t_0 \leq t \leq t_1}$  (wobei  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 2\pi$ ) kürzester Verbindungskurven, die die folgenden Eigenschaften besitzen:*

(a) Für alle  $t$  gilt

$$\gamma_t(s) = \mathbf{r}^{\mathbf{p}}(s, t)$$

(d.h.  $\gamma_t$  ist radiale Geodätische der Geodätischen Polarkoordinaten bezüglich  $\mathbf{p}$ ).

(b) Für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$  gilt

$$\gamma_t(0) = \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \gamma_t(d) \in \partial A \quad \text{und} \quad \text{Spur}(\gamma_t(0, d)) \text{ ist distanzminimal}$$

(d.h. jedes  $\gamma_t$  ist kürzeste Verbindung zu  $\partial A$ ).

(c) Für alle (hinreichend kleinen)  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\gamma_{t_0-\varepsilon}(d) \in \mathring{A} \quad \text{und} \quad \gamma_{t_1+\varepsilon}(d) \in \mathring{A}$$

(d.h.  $\{\gamma_t\}_{t_0 \leq t \leq t_1}$  ist in dem Sinn eine maximale Familie, daß sowohl  $\text{Spur}(\gamma_{t_0-\varepsilon}(0, d))$  als auch  $\text{Spur}(\gamma_{t_1+\varepsilon}(0, d))$  keine distanzminimale Verbindung zu  $\partial A$  ist).

Da unter der Voraussetzung (A) jeder Punkt der Medialen Achse ein Non-Extender ist (vgl. Bemerkung 6.2.8), und jeder Non-Extender Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises in  $A$  ist (vgl. Hilfssatz 6.1.9), ist Definition 6.4.11 wohldefiniert. Radiale Geodätische der Geodätischen Polarkoordinaten eines Punktes  $\mathbf{p}$  sind bereits nach der Definition der Exponentialfunktion nach ihrer Bogenlänge parametrisiert (vgl. (2.14) auf Seite 31). Daher können wir auf die explizite Forderung dieser Eigenschaft in Definition 6.4.11 verzichten.

Eine maximale Familie radialer Geodätischer kann definitionsgemäß aus lediglich einer distanzminimalen Verbindung bestehen. In diesem Fall gilt  $t_0 = t_1$ . Der Begriff der eigentlichen Verbindungskürzesten wurde so gewählt, daß er keine Unterscheidung mehr zwischen der Situation einer einzelnen, fokalen Verbindungskürzesten und der Existenz von unendlich vielen, benachbarten Kürzesten macht. Wir geben nun eine Modifikation der Graddefinition aus Definition 6.4.1 eines Punktes der Medialen Achse an.

#### Definition 6.4.12

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die Bedingung (A) erfüllt. Ein Punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}(A)$  besitzt den eigentlichen Grad  $\text{deg}^*(\mathbf{p}) = n$ , wenn er genau  $n$  verschiedene, eigentliche distanzminimale Verbindungen zu  $\partial A$  besitzt, die in  $\mathbf{p}$  paarweise verschiedene tangentielle Winkel besitzen.

Die Winkelbedingung ist hierbei vernünftig, da nach Definition 6.4.11 eigentliche Verbindungen aus einer maximalen Familie distanzminimaler Kurven besteht. Als tangentialen Winkel einer Familie, die aus unendlich vielen Verbindungskürzesten besteht, kann man daher den Winkel eines beliebigen Mitglieds der Familie betrachten. Mit diesem neuen Begriff des eigentlichen Grades können wir uns weiter der Aufgabe widmen, den Klassifikationssatz 6.4.9 zu vervollständigen.

#### Satz 6.4.13

Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge der parametrischen Fläche  $S$ , die den Bedingungen (A') und (V) genügt. Für jede Ecke  $\mathbf{v} \in V$  mit der Eigenschaft  $\text{deg}^*(\mathbf{v}) = 1$  existiert genau eine Kante  $e \in E$  mit  $\mathbf{v} \in \partial e$ . (Es sei denn,  $A$  ist der Geodätische Abstandskreis zum Mittelpunkt  $\mathbf{v}$ . In diesem Fall ist die Kantenmenge leer.)

#### Beweis:

Nach Definition 6.4.12 ist  $\text{deg}^*(\mathbf{v}) = 1$  genau dann erfüllt, wenn es genau eine eigentliche distanzminimale Verbindung der Länge  $d$  von  $\mathbf{v}$  nach  $\partial A$  gibt. Die zugehörige maximale Familie kürzester Verbindungskurven (vgl. Definition 6.4.11) sei mit  $\{\gamma_t\}_{t_0 \leq t \leq t_1}$  bezeichnet. Falls  $t_0 = t_1$  gilt, die Familie also nur aus einer Kürzesten besteht, folgt die Aussage bereits aus Satz 6.4.9. Für den Fall  $t_0 = 0$  und  $t_1 = 2\pi$  stimmt der Rand von  $\partial A$  komplett mit dem maximal einbeschriebenen Abstandskreis um  $\mathbf{v}$  überein, so daß  $\mathbf{v}$  das einzige Element der Medialen Achse (dieser Zusammenhangskomponente) von  $A$  ist.

Für den letzten zu diskutierenden Fall nehmen wir daher  $t_0 \neq t_1 \pmod{2\pi}$  an. Analog zum Beweis von Satz 6.4.9 stellen wir zunächst fest, daß  $B_d(\mathbf{v})$  durch die distanzminimalen Kurven  $\gamma_{t_0}$  und

$\gamma_{t_1}$  in zwei offene, disjunkte Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  unterteilt wird (vgl. auch die Konstruktion in (6.11)). Dabei entspricht  $G_1$  dem Kreissegment dieses maximal einbeschriebenen Kreises, das ein Randsegment mit  $\partial A$  gemeinsam hat. Da  $G_2$  keine weitere distanzminimalen Verbindungen zu  $\partial A$  enthält und daher alle Voraussetzungen der im Beweis zu Satz 6.4.9 betrachteten Mengen erfüllt, existiert genau eine Kante  $e_2 \in E$ , die von  $v$  in  $G_2$  ausgeht. Es reicht daher zu überlegen, daß keine Kante  $e \in E$  existiert, die in  $G_1$  von  $v$  ausgeht. Da jedoch alle Geodätischen  $\gamma_t$  mit  $t_0 \leq t \leq t_1$  distanzminimal nach Voraussetzung sind, ist jeder Punkt  $p \in G_1$  ein Extender, und damit nach Bemerkung 6.2.8 kein Element der Medialen Achse. ■

Nach Satz 6.4.13 gilt unter der Voraussetzung (V) für Ecken  $v \in V$  mit  $\deg(v) = \infty$  die Beziehung  $\deg^*(v) < \infty$ . Daher nimmt der eigentliche Grad  $\deg^*$  nur endliche Werte an, falls Bedingung (V) erfüllt ist. Der letzte Satz zeigt darüberhinaus, daß sich diese Fokalfunkte im Hinblick auf ihre Eigenschaften als Ecken der Medialen Achse *nicht* von solchen Fokalfunkten unterscheiden, die nur eine distanzminimale (fokale) Verbindung zu  $\partial A$  besitzen. Daher stellt die folgende Aussage die angestrebte vollständige Klassifizierung von Eckpunkten des endlichen Graphen dar.

#### Korollar 6.4.14

*Sei  $A \subset S$  eine Teilmenge, die die Voraussetzung (A') erfüllt. Ferner erfülle die Eckenmenge  $V$  der Medialen Achse die Voraussetzung (V). Für jede Ecke  $v \in V$  mit  $\deg^*(v) = n$  existieren genau  $n$  paarweise verschiedene Kanten  $e_1, \dots, e_n \in E$ , so daß  $v \in \partial e_k$  für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt.*

#### Beweis:

Gilt für eine Ecke  $v \in V$  die Beziehung  $\deg(v) < \infty$ , so folgt die Aussage bereits aus Satz 6.4.9. Für Ecken mit  $\deg(v) = \infty$  folgt die Behauptung mit Hilfe der Argumente, die im Beweis von Satz 6.4.13 benutzt wurden. ■

Die letzten Überlegungen und Definitionen (von Lemma 6.4.10 bis Folgerung 6.4.14) sind nur aufgrund der Sonderstellung von Fokalfunkten  $v \in V$ , deren maximal einbeschriebener Kreis ein ganzes Kreisrandsegment mit  $\partial A$  gemeinsam haben, nötig gewesen. Treten keine solchen Kreisrandsegmente auf, stimmt insbesondere der in Definition 6.4.1 eingeführte Grad  $\deg$  mit dem eigentlichen Grad  $\deg^*$  überein. Kann oder will man die Existenz von Kreisrandsegmenten nicht ausschließen, so benötigt man den eigentlichen Grad, um die Begriffe Start- und Verzweigungspunkt formal korrekt einzuführen. Da die letzten Untersuchungen nur für endliche Graphen angestellt werden konnten, nehmen wir die Gültigkeit der Bedingung (V) auch für diese Definition an.

#### Definition 6.4.15

*Die Mediale Achse der Teilmenge  $A \subset S$ , die die Voraussetzung (A') erfülle, genüge ferner der Bedingung (V). Ein Eckpunkt  $v \in V$  heißt Verzweigungspunkt der Medialen Achse vom Grad  $n$ , wenn  $2 \leq \deg^*(v) = n$  gilt. Er heißt Start- oder Endpunkt der Medialen Achse, wenn  $\deg^*(v) = 1$  erfüllt ist.*

Der in Definition 6.4.12 eingeführte eigentliche Grad eines Punktes der Medialen Achse entspricht im Fall einer Ecke  $v \in V$  nach Folgerung 6.4.14 dem Begriff von Grad, wie er in der Graphentheorie eingeführt wird (vgl. etwa [Die96], Seite 5). Insbesondere entsprechen die in

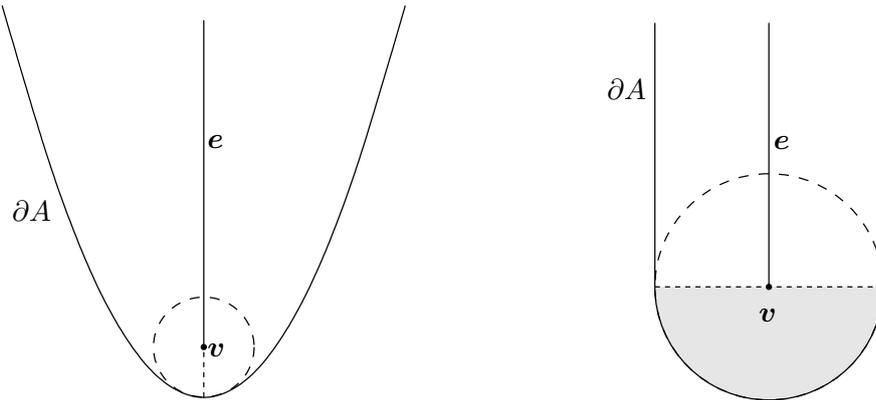


Abbildung 6.6: Verschiedene Arten von Startpunkten der Medialen Achse

der letzten Definition eingeführten Kategorien unserer Intuition von Start- und Verzweigungspunkten. Der von uns gewählte Zugang zu der Klassifikation von Eckpunkten über die Anzahl der distanzminimalen Verbindungen zu  $\partial A$  mag vielleicht auf den ersten Blick umständlich erscheinen. Neben einem besseren Verständnis der Medialen Achse liefert er aber auch wertvolle Informationen, die bei der Formulierung einer Berechnungsmethode ausgenutzt werden können. Dies wird in dem nachfolgenden Abschnitt 6.5 besprochen werden.

In den beiden Abbildungen 6.6 und 6.7 sind einige mögliche Typen von Start- bzw. Verzweigungspunkten zu erkennen. Als Startpunkte kommen unter der Voraussetzung (A') lediglich Fokalfpunkte  $v \in V$  in Frage. Nach den letzten Überlegungen sind sie durch die Eigenschaft  $\deg^*(v) = 1$  charakterisiert. Würde man *stückweise*  $C^2$ -stetige Randkurven von  $A$  zulassen, gäbe es (wie bereits oben angesprochen) ferner die Möglichkeit von Eckstartpunkten, die Element von  $\partial A$  sind. Nach unserer Begriffsgebung wären diese durch die Identität  $\deg(v) = \deg^*(v) = 0$  zu charakterisieren. Diese Aussage, die an anderer Stelle gezeigt werden wird, zeigt die Erweiterbarkeit unseres Konzepts des (eigentlichen) Grades einer Ecke der Medialen Achse.

Im linken Teilbeispiel von Abbildung 6.6 ist die Situation eines Fokalen Startpunkts  $v$  mit einer zugehörigen kürzesten Verbindung zu  $\partial A$  zu erkennen. Distanzminimale Kurven zum Rand des betrachteten Gebiets werden in allen Abbildungen durch kurz gestrichelte Strecken, zugehörige maximal eingeschriebene Abstandskreise in  $A$  durch lang gestrichelte Kreise symbolisiert. In diesem Fall gilt  $\deg(v) = 1 = \deg^*(v)$ , so daß es genau eine Kante  $e \in E$  gibt, die in  $v$  beginnt. Die zweite Möglichkeit eines Startpunkts der Medialen Achse ist in der rechten Hälfte von Abbildung 6.6 skizziert. Hier hat der maximal eingeschriebene Kreis ein ganzes Randsegment mit  $\partial A$  gemeinsam, zu dem es eine eigentliche Verbindung gibt. Die beiden Verbindungskürzesten  $\gamma_{t_0}$  und  $\gamma_{t_1}$  der maximalen Familie aus Definition 6.4.11 wurden hier durch kurz gestrichelte Strecken angedeutet. Der schraffierte Bereich stellt das durch die maximale Familie überstrichene Gebiet dar. Da es genau eine eigentliche Verbindung zu  $\partial A$  gibt, gilt in diesem Fall  $\deg(v) = \infty$  und  $\deg^*(v) = 1$ , so daß nach Korollar 6.4.14 wieder genau eine Kante von  $v$  ausgeht.

Das erste Teilbeispiel von Abbildung 6.7 stellt einen dreifachen Verzweigungspunkt dar. Der zu  $v$  gehörige maximal eingeschriebene Abstandskreis berührt die Randkurve von  $\partial A$  in drei Punkten, so daß definitionsgemäß  $\deg(v) = 3 = \deg^*(v)$  gilt. In zu diesem Beispiel analoger Weise können natürlich auch Verzweigungspunkte höheren Grades konstruiert werden. Denkbar bei einer solchen Konstruktion ist, daß einer der Berührungspunkte ein Punkt oder ein ganzes Segment der Randkurve ist, zu dem  $v$  Fokalfpunkteigenschaft besitzt. Daher war es ganz wesentlich, die Einteilung in Ecken- und Kantenmenge wie in Definition 6.4.3 vorzunehmen. Im

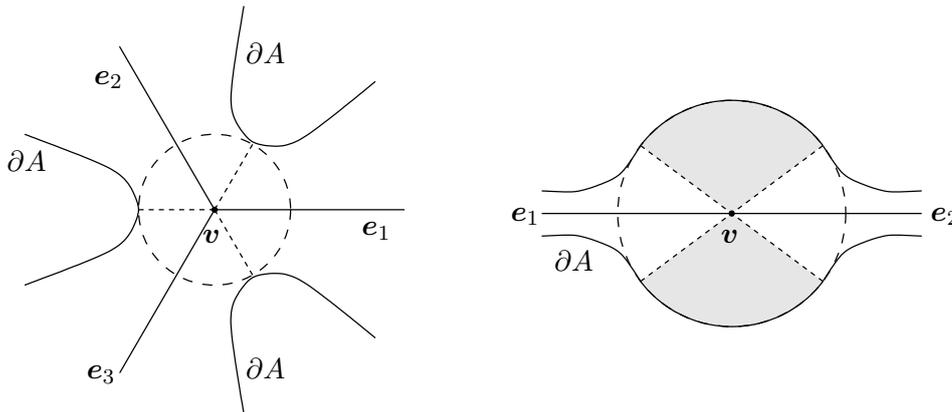


Abbildung 6.7: Verschiedene Arten von Verzweigungspunkten der Medialen Achse

Fall der rechten Teilabbildung von 6.7 ist ein Verzweigungspunkt vom Grad 2 zu sehen; hier gilt  $\deg(v) = \infty$  und  $\deg^*(v) = 2$ . Die Identität für den eigentlichen Grad ergibt sich aus der Tatsache, daß  $v$  bezüglich zweier Bereiche von  $\partial A$  Kreisrandsegment-Eigenschaft besitzt, also zwei eigentliche Verbindungen zum Rand von  $A$  existieren. Die durch die jeweilige maximale Familie von Verbindungskürzesten überstrichene Fläche wurde wieder schattiert dargestellt.

## 6.5 Berechnung der Medialen Achse

Die in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Eigenschaften der Medialen Achse ermöglichen es, einen Algorithmus für deren Berechnung zu formulieren. Moritz Baer hat diese Aufgabenstellung in seiner 1998 angefertigten Diplomarbeit bearbeitet. Herr Baer hat für seine Implementation auf die Programmbibliothek zurückgegriffen, die begleitend zu der hier vorgelegten Arbeit entstanden ist. Ferner benutzte er vorab einige der oben erstmals in geschlossener Form präsentierten, theoretischen Resultate. Zur Abrundung unseres Kapitels über Mediale Achsen werden wir daher in diesem Abschnitt eine Übersicht zu der vorgeschlagenen Berechnungsmethode der Medialen Achse angeben. Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf die lesenswerte Arbeit [Bae98]. Schließlich zeigen wir einige Beispiele kompakter Gebiete, deren Mediale Achsen mit Herrn Baers Programm berechnet wurden. Damit wird gleichzeitig die praktische Relevanz des Konzepts der Medialen Achse dokumentiert. Aufgrund ihrer numerischen Berechenbarkeit ist die Mediale Achse nicht ausschließlich von theoretischem Interesse, sondern kann auch für die Praxis nutzbar gemacht werden.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf einfach zusammenhängende Gebiete  $A \subset S$ , die der Bedingung (A') aus Abschnitt 6.3 genügen. Der Grund für die Restriktion auf einfach zusammenhängende Gebiete ist rein algorithmischer Natur. Die theoretischen Resultate der letzten Abschnitte sind auch für Gebiete mit „Löchern“ richtig, so daß man aus ihnen prinzipiell auch einen Algorithmus für allgemeinere kompakte Teilmengen parametrischer Flächen gewinnen könnte. Der Vorteil, den einfach zusammenhängende Gebiete für die Berechnung der Medialen Achse bieten, ist aus Korollar 6.3.8 abzuleiten. Dort wurde nachgewiesen, daß die Mediale Achse  $\mathcal{M}(A)$  den gleichen Homotopietyp wie  $A$  besitzt. Folglich ist die Mediale Achse unter dieser Voraussetzung ebenfalls einfach zusammenhängend. Ferner gehen wir davon aus, daß die Randkurve des betrachteten Gebiets so orientiert ist, daß sich das Innere von  $A$  auf der rechten Seite aus Sicht der Kurve befindet (Rechte-Hand-Regel). Schließlich dürfen ausschließlich solche Gebiete betrachtet werden, deren zugehörige Mediale Achsen endliche Graphen sind.

Herr Baer hat für seine Methode ebenfalls *stückweise* krümmungstetige Randkurven von  $A$  zugelassen. In diesem Fall kann die Mediale Achse (entgegen der in Lemma 6.2.10 gezeigten Eigenschaft) gemeinsame Punkte mit  $\partial A$  besitzen. Beispiele für solche Situationen haben wir bereits in den Abbildungen 6.1, 6.3 und 6.4 kennengelernt. Er benutzt für seinen Algorithmus die (plausible, aber zur Zeit unbewiesene) Behauptung, daß die konvexen Knicke der Randkurve von  $A$  die einzigen gemeinsamen Punkte von  $\mathcal{M}(A)$  und  $\partial A$  sind (siehe [Bae98], Seite 38 ff.). Ferner geht Moritz Baer davon aus, daß für diese Punkte jeweils genau eine von ihnen ausgehende Kante der Medialen Achse existiert. Eine Untersuchung, ob sich diese Aussagen halten lassen, werden wir an anderer Stelle präsentieren.

Solche konvexen Knicke stellen (unter der Annahme der Richtigkeit der zuletzt gemachten Behauptungen) nach dem intuitiven Verständnis offenbar Startpunkte der Medialen Achse dar. Ferner besitzen diese trivialerweise keine kürzeste Verbindung zu  $\partial A$ , so daß sie den (eentlichen) Grad Null besitzen. Die Menge der Startpunkte aus Definition 6.4.15 ist folglich um solche Punkte der Medialen Achse zu ergänzen, die einen trivialen (eentlichen) Grad haben. In seiner Arbeit [Bae98] nennt Moritz Baer diese Art von Startpunkten *Eckstartpunkte* der Medialen Achse.

Wir beschränken uns bei unseren Überlegungen auf krümmungstetige Randkurven. Nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts kann eine Kante der Medialen Achse nur in Fokalpunkten der  $C^2$ -stetigen Randkurve  $\partial A$  beginnen. Nach Lemma 6.2.4 kommen hierbei lediglich solche Fokalpunkte in Frage, deren zugehöriger Fokaler Abstand einem lokalen Minimalwert der Funktion des rechtsseitigen Fokalen Abstands entspricht. Daher wird zunächst versucht, alle Minima von  $s_f^+(t)$  mit Hilfe einer entsprechenden Routine zu ermitteln. Es ist allerdings offensichtlich, daß diese Aufgabe bereits einigermaßen anspruchsvoll ist. Benutzt werden hierzu die in Kapitel 5 vorgestellten Methoden, also insbesondere die Fokale Differentialgleichung aus Abschnitt 5.1. Eine ausführliche Beschreibung der Vorgehensweise des Algorithmus findet man in [Bae98], Seite 49 ff.

An dieser Stelle wird auch spätestens klar, warum man im Hinblick auf die algorithmische Behandlung Medialer Achsen fordert, daß diese einen endlichen Graphen darstellen, also Bedingung (V) genügen. Für unendliche Graphen wäre bereits die Aufgabe, alle fokalen Startpunkte zu finden, ein hoffnungsloses Unterfangen. Besitzt die Randkurve von  $A$  jedoch lediglich endlich viele Fokalpunkte, deren zugehöriger Fokaler Abstandswert ein lokales Minimum von  $s_f^+(t)$  ist, so ist offenbar (V) erfüllt.

Hat man alle lokalen Minima  $s_f^+(t_i)$  des Fokalen Abstands bezüglich der zugehörigen Randelemente  $\alpha(t_i)$  von  $\partial A$  bestimmt, so ist noch zu überprüfen, ob der zugehörige Fokalpunkt  $\omega(t_i)$  Element der Medialen Achse  $\mathcal{M}(A)$  ist. (Lemma 6.2.4 liefert eben nur ein *notwendiges* Kriterium für Fokalpunkte der Medialen Achse, vgl. auch Abbildung 6.4) Nach Hilfssatz 6.2.3 wissen wir, daß die Geodätische Verbindungskurve  $\gamma_{t_i}$  von  $\alpha(t_i)$  nach  $\omega(t_i)$  für Bogenlängenparameter  $s > s_f^+(t_i)$  keine distanzminimale Verbindung zu  $\partial A$  ist. Falls der Abstandskreis  $B_{s_f^+(t_i)}(\omega(t_i))$  eine Teilmenge des untersuchten Gebiets  $A$  ist, muß folglich  $\omega(t_i)$  ein Non-Extender bezüglich  $\partial A$  sein. Nach Bemerkung 6.2.8 besitzt man daher ein hinreichendes Kriterium zur Überprüfung, ob  $\omega(t_i) \in \mathcal{M}(A)$  erfüllt ist. Die numerische Umsetzung dieses Kriteriums kann beispielsweise durch wiederholte Innen-/Außentests erfolgen. Getestet wird hierbei, ob sich alle Punkte einer diskreten Abtastung von  $\partial B_{s_f^+(t_i)}(\omega(t_i))$  im Inneren des Polygons befinden, welches durch (hinreichend feine) lineare Interpolation von  $\partial A$  gewonnen wird. Für Einzelheiten zur Implementierung von Innen-/Außentests verweisen wir auf die Studienarbeit von Ingo Friese [Fri98]. Fällt dieser Test positiv aus, so ist  $\omega(t_i)$  ein Startpunkt der Medialen Achse.

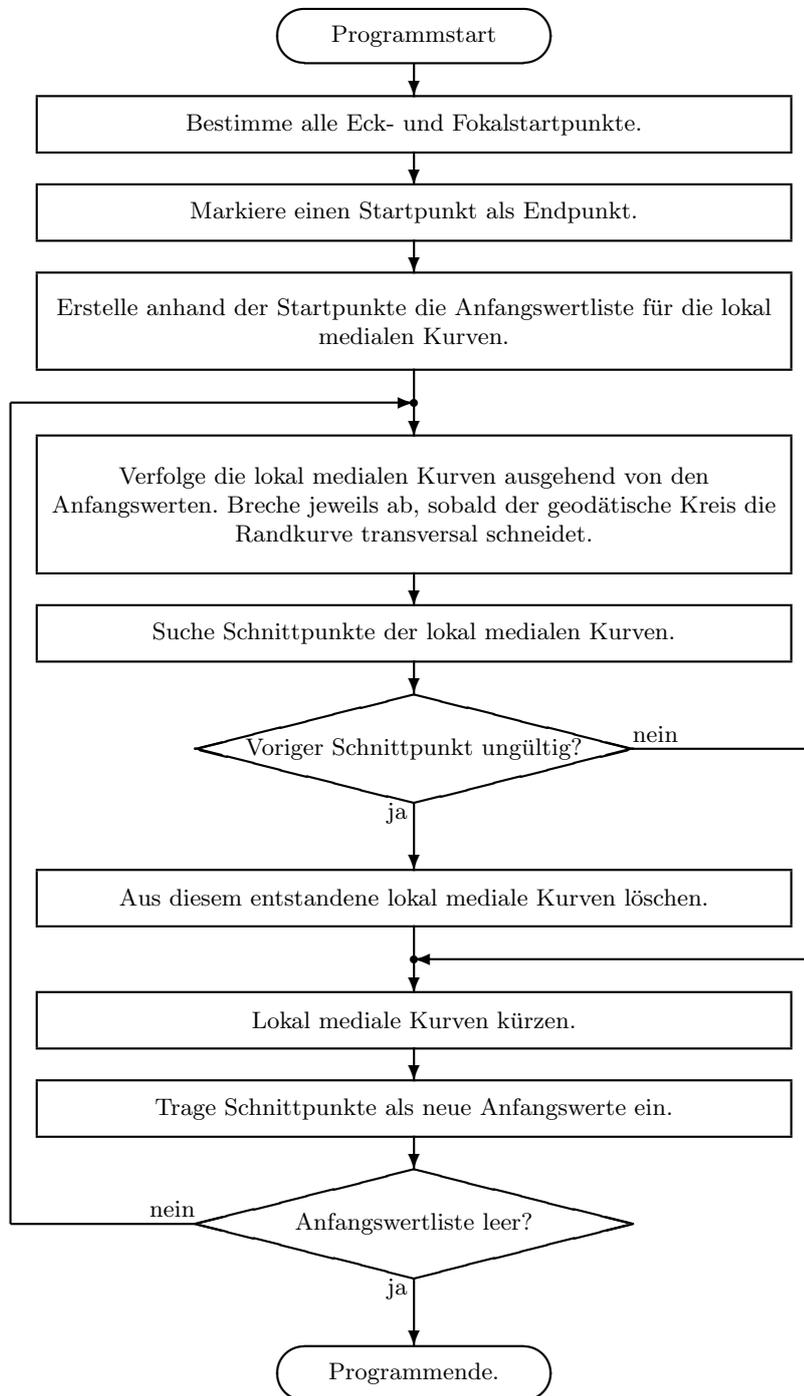
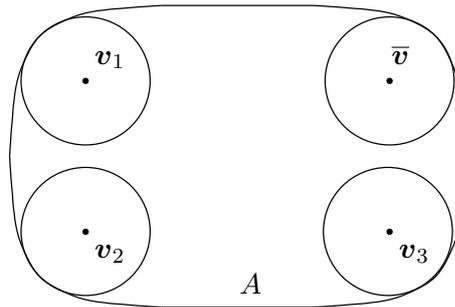


Abbildung 6.8: Flußdiagramm des Algorithmus zur Berechnung der Medialen Achse

Abbildung 6.9: Startpunkte  $v_i$  und Endpunkt  $\bar{v}$  der Medialen Achse

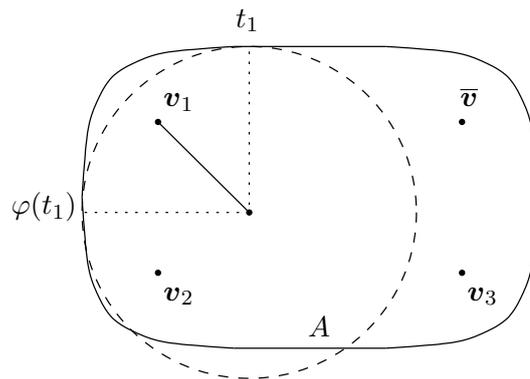
Wir gehen also davon aus, daß jeder Fokale Startpunkt der Medialen Achse ermittelt wurde. Im Fall einer stückweise  $C^2$ -stetigen Randkurve sind (nach der oben aufgestellten Behauptung) ferner alle Eckstartpunkte in die Liste der Startpunkte aufzunehmen. In Abbildung 6.8, die mit freundlicher Genehmigung von Moritz Baer aus dessen Diplomarbeit [Bae98] übernommen wurde, erhält man einen Überblick über die hier besprochene Methode in Form eines Flußdiagramms. Die eben besprochene Suche aller Startpunkte der Medialen Achse entspricht der ersten Anweisung des Diagramms. Im zweiten Schritt wird genau ein Startpunkt der Liste als Endpunkt der Medialen Achse markiert. Die Wahl dieser Ecke  $\bar{v} \in V$  ist dabei völlig beliebig. Im weiteren Verlauf des Algorithmus wird  $\bar{v}$  eine noch zu erläuternde Sonderbehandlung erfahren.

Nun soll für jeden Eintrag  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  der Liste der Startpunkte die jeweilige Kante approximiert werden, die von ihm ausgeht. Hiervon ist der Endpunkt  $\bar{v}$  ausgenommen. Nach Satz 6.4.5 ist jede Kante als Teilstück der Medialen Kurve darstellbar, so daß wir diese Aufgabe mit Hilfe der Medialen Differentialgleichung und der in Kapitel 4 vorgestellten Methoden bearbeiten können. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß im Falle von Fokalstartpunkten diese nicht direkt als Anfangswerte verwendet werden können, da die Mediale Differentialgleichung bekanntlich in Fokalfpunkten nicht betrachtet werden kann. Sowohl bei Eckstartpunkten, als auch bei Fokalen Startpunkten besteht ferner die Problematik, daß die zugehörigen Parameter  $t$  und  $\varphi(t)$  der Randkurve identisch zu wählen sind (in beiden Fällen handelt es sich nicht um Picas). Mit einer solchen Wahl der Parameter würde jedoch die Mediale Differentialgleichung ebenfalls singulär werden, da die zugehörigen Geodätischen Kurven ausgehend von  $\partial A$  identisch sind.

Zur Lösung dieses Problems beginnt man die numerische Integration der Medialen Differentialgleichung in einem Punkt, der sich in einem gewissen „Sicherheitsabstand“ zu dem Startpunkt der Medialen Achse befindet. Bezeichnet  $t_i$  den Parameter des exakten Startpunkts, so wählt man zu einer Konstante  $\varepsilon \neq 0$ , die vom Benutzer vorgegeben werden kann,  $t_i(\varepsilon) := t_i + \varepsilon$  als Anfangsparameter der Berechnung der Medialen Differentialgleichung. Die zugehörigen Werte  $\varphi_i(\varepsilon)$  und  $s_i(\varepsilon)$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F}(s_i(\varepsilon), t_i(\varepsilon), \varphi_i(\varepsilon)) = \mathbf{0}$$

(vgl. Definition 4.1.1 auf Seite 83), die als Startwerte der Medialen Differentialgleichung benötigt werden, können dann mit Hilfe eines iterativen Verfahrens, wie es in Abschnitt 4.5 vorgeschlagen wurde, approximiert werden. Als erste Näherung von  $\varphi_i(\varepsilon)$  für das iterative Verfahrens wird man  $t_i$  benutzen; für  $s_i(\varepsilon)$  bietet sich der Minimalwert  $s_f^+(t_i)$  des Fokalen Abstands (im Fall eines fokalen Startpunkts) oder 0 (im Fall eines Eckstartpunkts) als grobe Näherung an. Dieser Schritt entspricht der dritten Anweisung in Diagramm 6.8, das numerische Lösen der Medialen Differentialgleichung wird dann in der darauf folgenden Anweisung verlangt.

Abbildung 6.10: Mediale Kurve ausgehend vom Fokalen Startpunkt  $v_1$ 

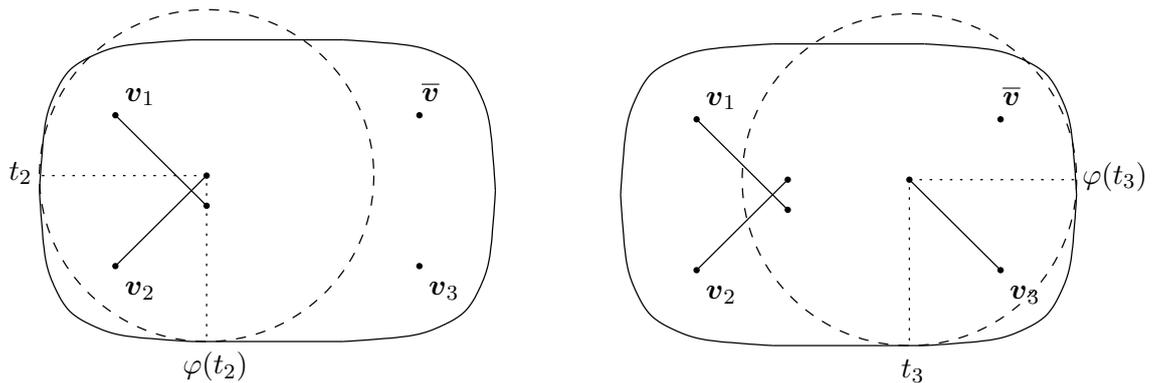
Parallel zur Besprechung des Flußdiagramms wollen wir die Vorgehensweise anhand eines einfachen Beispiels demonstrieren. In Abbildung 6.9 ist ein Gebiet  $A$  der Euklidischen Ebene zu erkennen, deren Mediale Achse bestimmt werden soll. Ferner wurden bereits alle Startpunkte des Graphen eingezeichnet. Es handelt sich hierbei um vier Fokale Startpunkte  $v_1, v_2, v_3$  und  $\bar{v}$ . Für alle Startpunkte wurden ihre zugehörigen maximal einbeschriebenen Kreise vermerkt. Der Startpunkt  $\bar{v}$  erhält in diesem Beispiel die Sonderrolle des Endpunkts der Medialen Achse.

Nachdem alle Startpunkte der Medialen Achse gefunden, die zugehörigen Anfangswerte der Medialen Kurven nach der oben beschriebenen Vorgehensweise ermittelt und in eine Anfangswertliste eingetragen wurden (vgl. Schritt 3 im Flußdiagramm 6.8), können nun die lokal Medialen Kurven von allen Startpunkten ausgehend berechnet werden. Hiervon ist der Endpunkt  $\bar{v}$  jedoch ausgeschlossen. Dieser Schritt wurde in Abbildung 6.10 für den Startpunkt  $v_1$  bereits vollzogen. Die numerische Behandlung der Medialen Differentialgleichung erfolgt dabei in kleinen Teilstücken. Nach jedem Teilstück wird überprüft, ob der zugehörige Abstandskreis um den zuletzt ermittelten Punkt der Medialen Kurve noch in der betrachteten Menge  $A$  enthalten ist. Ist dies der Fall, wird das nächste Teilstück integriert, wobei die Anfangswerte der Medialen Differentialgleichung durch das letzte Ergebnis gegeben sind. Falls diese Bedingung jedoch verletzt ist, kann die Berechnung dieser Kante eingestellt werden, da die Mediale Kurve nun Punkte enthält, die nicht mehr zur Medialen Achse gehören. Diese Vorgehensweise wird in Schritt 4 des Flußdiagramms 6.8 beschrieben.

Interessant ist an dieser Stelle die Frage, ob die Mediale Differentialgleichung im Laufe der Berechnung singulär werden kann. Nach Satz 4.1.2 kann dies nur eintreten, falls der Punkt  $v_0 := \gamma_{t_0}(s(t_0)) = \gamma_{\varphi(t_0)}(s(t_0))$

- (1) ein Fokalfunkt bezüglich einer der aktuell betrachteten Randpunkte  $\alpha(t_0)$  oder  $\alpha(\varphi(t_0))$  ist,
- (2) oder  $t_0 = \varphi(t_0)$  gilt, d.h.  $v_0$  durch identische Geodätische induziert wird.

Wir betrachten zunächst Fall (1). Der dem Fokalfunkt zugeordnete Abstandskreis erfüllt genau dann  $B_{s(t_0)}(v_0) \subset \overset{\circ}{A}$ , wenn der Fokalfunkt  $v_0$  Element der Medialen Achse ist. Dies gilt aufgrund von Bemerkung 6.2.8 (jeder Punkt der Medialen Achse ist ein Non-Extender) und Lemma 6.1.9 (jeder Non-Extender ist Mittelpunkt eines maximal einbeschriebenen Kreises). Falls  $B_{s(t_0)}(v_0)$  also kein maximal einbeschriebener Kreis in  $A$  ist, können wir die Berechnung auf alle Fälle abbrechen, da der fragliche Punkt keinesfalls zu  $\mathcal{M}(A)$  gehört. Andernfalls ist der Fokalfunkt nach Definition 6.4.3 eine Ecke der Medialen Achse, d.h. es gilt  $v_0 \in V$ . Daher hat unsere Berechnung im Fall (1) auf alle Fälle eine Überdeckung einer Kante der Medialen Achse geliefert.

Abbildung 6.11: Mediale Kurve ausgehend von den Startpunkten  $v_2$  und  $v_3$ 

Im Fall (2) können wir ebenfalls davon ausgehen, daß der Punkt  $v_0 \in \mathcal{M}(A)$  erfüllt, da er andernfalls für unsere Belange uninteressant wäre. Die Mediale Kurve hätte dann nämlich bereits vorher die Mediale Achse verlassen, so daß nach Satz 6.4.4 mit dem vorliegenden Stück der Medialen Kurve eine Überdeckung der zu approximierenden Kante vorliegt. Falls allerdings  $v_0 \in \mathcal{M}(A)$  gilt, so sind die zugehörigen Geodätischen Kurven  $\gamma_t$  und  $\gamma_{\varphi(t)}$  für  $t < t_0$  distanzminimale Verbindungen zu  $\partial A$ . Unter Verwendung von Korollar 6.3.2 überlegt man daher, daß  $\gamma_{t_0}$  ebenfalls eine kürzeste Verbindung von  $\partial A$  nach  $v_0$  darstellt. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder ist dies die einzige distanzminimale Geodätische zum Rand von  $A$  (folglich wäre  $v_0$  ein Fokaler Startpunkt), oder es existiert eine weitere eigentliche Verbindung gleicher Länge. Im letzten Fall gilt  $\deg^*(v_0) > 2$ , so daß ebenfalls  $v_0 \in V$  erfüllt ist. Daher führt unsere Strategie sowohl in Fall (1) wie auch (2) zu einer Überdeckung der betrachteten Kante.

Wir kommen nun auf die Berechnung der Medialen Achse in unserem einfachen Modellbeispiel zurück. In den Abbildungen 6.10 und 6.11 sind die Medialen Kurven ausgehend von den Startpunkten  $v_1$ ,  $v_2$  bzw.  $v_3$  eingezeichnet worden. Die Berechnung der Medialen Differentialgleichung wurde dabei aufgrund des Auftretens eines Abstandskreises abgebrochen, der nicht mehr im Inneren des Gebietes  $A$  liegt. Der jeweilige Abstandskreis wurde in den einzelnen Abbildungen gestrichelt eingezeichnet. Die zugehörigen Randkurvenparameter der zuletzt bestimmten Medialen Kurvenpunkte wurden dort mit  $t_i$  und  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnet. Für den weiteren Verlauf des Algorithmus ist es wesentlich, daß diese Werte gespeichert werden. Selbstverständlich sind auch die berechneten Kantenüberdeckungen in einer eigenen Liste zu führen. Zu beachten ist ferner die Gültigkeit der Rechte-Hand-Regel. Nach dieser Konvention ist der Parameter  $t$  so gewählt, daß der zu  $\mu(t)$  gehörige Punkt  $\alpha(t)$  stets im Uhrzeigersinn, der zugehörige geschleppte Randpunkt  $\alpha(\varphi(t))$  dagegen im Gegenuhrzeigersinn die Randkurve von  $A$  (bezüglich der Orientierung der Fläche) durchläuft.

Nachdem nun alle Medialen Kurven als jeweilige Überdeckung der in der Startpunktliste verzeichneten Ecken berechnet wurden, sind alle Medialen Kurven paarweise miteinander zu schneiden (vgl. Schritt 5 im Flußdiagramm 6.8). Da die Berechnung der Medialen Kurven im  $wv$ -Parameterraum der Fläche stattfindet und als Ergebnis einzelne Punkte der Kurve liefert, erfolgt diese Schnittpunktsuche durch paarweises Schneiden ebener Polygonzüge. Zu einem Schnitt der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Medialen Kurve können die betroffenen Parametertupel  $(t_i, \varphi(t_i))$  und  $(t_j, \varphi(t_j))$  ebenso ermittelt werden, wie die Medialen Abstände  $s(t_i)$  und  $s(t_j)$ . Jeder gefundene Schnitt der Polygonzüge steht nun im Verdacht, einen Schnitt zweier Kanten der Medialen Achse zu induzieren. Dies ist genau dann der Fall, wenn die entsprechenden Medialen Abstände identisch sind, d.h. wenn  $s(t_i) = s(t_j)$  gilt.

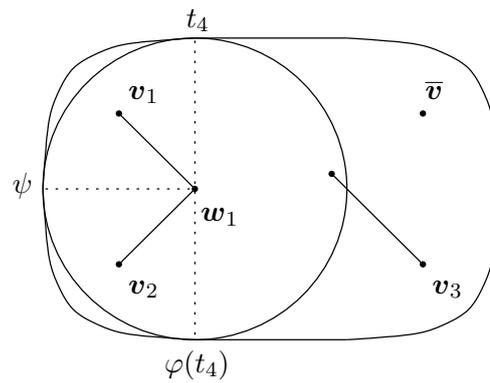


Abbildung 6.12: Schnittpunkt  $w_1$  Medialer Kurven als neuer Startpunkt

In unserem einfachen Beispiel treffen sich die Medialen Kurven, die von Startpunkten  $v_1$  und  $v_2$  ausgehen, in einem Verzweigungspunkt, der in Abbildung 6.12 mit  $w_1$  bezeichnet wurde. Die Gleichheit der Medialen Abstände wurde durch das Einzeichnen des maximal eingeschriebenen Kreises in  $A$  illustriert. Um die beiden Kanten zwischen  $v_1$  und  $w_1$  bzw.  $v_2$  und  $w_1$  zu erhalten, sind die entsprechenden Medialen Kurven lediglich zu kürzen. Aufgrund der Deformationsretrakt-Eigenschaft der Medialen Achse aus Satz 6.3.7 müssen sich ferner die beteiligten Parameterwerte der zugehörigen Randkurvenpunkte entsprechen. Im Beispiel bedeutet dies konkret, daß der Schnittparameter  $t_4$  in etwa dem Wert von  $t_1$ ,  $\varphi(t_4)$  in der Nähe von  $\varphi(t_2)$  liegt und  $\varphi(t_1) \doteq \psi \doteq t_2$  gilt. Aus dem Tupel  $(t_4, \varphi(t_4))$  zusammen mit dem Medialen Abstand des Schnittpunkts ergeben sich neue Anfangswerte eines Astes der Medialen Differentialgleichung.

Folglich kann man die bislang skizzierte Vorgehensweise bestehend aus Lösen der Medialen Differentialgleichung, Suchen von Schnittpunkten einzelner Ästen der Medialen Kurve und Kürzen der Äste zu Kanten der Mediale Achse solange iterieren, bis die Liste der noch zu bearbeitenden Ecken leer ist, d.h. der Endpunkt  $\bar{v} \in V$  durch eine Kante erreicht wurde. Diese Iteration entspricht der linken Schleife in Diagramm 6.8. In der linken Hälfte von Abbildung 6.13 wurde dieser neue Ast der Medialen Kurve bereits ermittelt. Die Berechnung wurde wieder aufgrund des Auftretens eines Medialen Punktes abgebrochen, dessen zugehöriger Abstandskreises nicht in  $A$  enthalten ist. Das Parametertupel bei Abbruch ist in dieser Abbildung mit  $(t_4, \varphi(t_4))$  bezeichnet worden.

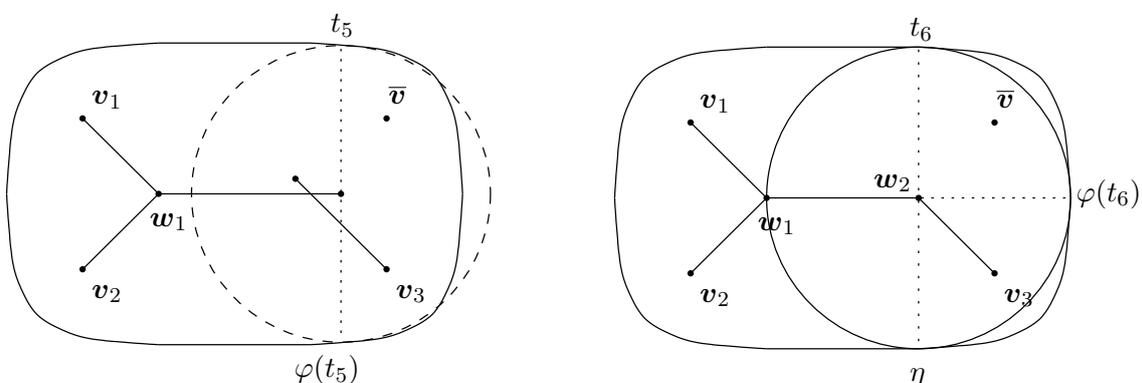
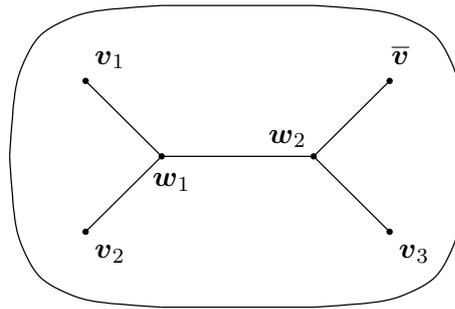


Abbildung 6.13: Iteration der Berechnung Medialer Kurven mit anschließendem Kürzen

Abbildung 6.14: Ende der Berechnung durch Erreichen des Endpunkts  $\bar{v}$ 

Zur nächsten Schnittpunktsuche stehen lediglich die Äste der Medialen Kurven zur Verfügung, die von den Ecken  $v_3$  und  $w_1$  ausgehen. Als Schnitt wird die Ecke  $w_2$  ermittelt, wie im rechten Teil derselben Abbildung zu sehen ist. Der zugehörige maximal einbeschriebene Abstandskreis um  $w_2$  wurde dort ebenfalls vermerkt. Der Parameterwert  $\eta$  entspricht in etwa den Werten  $t_3$  und  $\varphi(t_5)$ , so daß die Anfangswerte  $(t_6, \varphi(t_6))$  der Medialen Differentialgleichung des nächsten Durchgangs durch das Tupel  $(t_5, \varphi(t_3))$  induziert werden. Wie in Abbildung 6.14 zu erkennen ist, stellt der folgende Schritt den letzten der Iteration dar, da der nun berechnete Ast der Medialen Kurve den Endpunkt  $\bar{v}$  erreicht.

Das soeben besprochene Modellbeispiel gibt die wesentlichen Gedanken der von Baer in [Bae98] vorgeschlagenen Berechnungsmethode wieder. Allerdings ist das betrachtete Beispiel sehr einfach. Die bei dieser Methode im allgemeinen auftretenden Schwierigkeiten (insbesondere bei der Schnittpunktsuche) werden anhand der Abbildungen 6.9 bis 6.14 nicht deutlich. Daher wollen wir uns im folgenden mit der Schnittpunktsuche etwas eingehender befassen.

Nach den Überlegungen aus Abschnitt 6.4 gilt für die beteiligten Parametertupel  $(t_i, \varphi(t_i))$  und  $(t_j, \varphi(t_j))$  eines Schnittes  $w \in V$  der  $i$ -ten und  $j$ -ten Medialen Kurve allgemein:

Die durch die Medialen Kurven überdeckten Kanten  $e_i, e_j \in E$  beranden in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $w$  einen Bereich, der keine andere Kante der Medialen Achse schneidet, wenn es eine maximale Familie distanzminimaler Verbindungen  $\{\gamma_\tau\}_{\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1}$  gemäß Definition 6.4.11 gibt, so daß  $\tau_0 = t_j$  und  $\tau_1 = \varphi(t_i)$  oder  $\tau_0 = t_i$  und  $\tau_1 = \varphi(t_j)$  erfüllt ist.

Alle Kanten  $e_i, e_j$ , die diese Bedingung erfüllen, könnten als „Winkelnachbarn“ bezeichnet werden, da keine andere Kante in einem der beiden durch  $e_i$  und  $e_j$  bzw.  $e_j$  und  $e_i$  beschriebenen Winkel von  $w$  ausgeht. In der Regel wird die maximale Familie aus lediglich einer Verbindungskürzesten bestehen ( $\tau_0 = \tau_1$ ), so daß die Bedingung in diesem Fall „ $\varphi(t_i) = t_j$  oder  $t_i = \varphi(t_j)$ “ lautet. Eine nicht-triviale maximale Familie liegt bekanntlich genau dann vor, wenn der zu  $w$  gehörige, maximal einbeschriebene Kreis ein ganzes Kreisrandsegment mit  $\partial A$  gemeinsam hat. Zur Vereinfachung der Argumentation wollen wir im folgenden stets von einelementigen Familien ausgehen, ohne dabei jedoch zu vergessen, daß die Bedingung „ $\varphi(t_i) = t_j$  oder  $t_i = \varphi(t_j)$ “ auch das Prüfen nach Kreisrandsegment-Eigenschaft beinhalten soll. In jedem Fall induziert eine solche maximale Familie eine eigentliche distanzminimale Verbindung zu  $\partial A$ .

Wir nehmen zunächst an, daß  $e_i$  und  $e_j$  die einzigen zur Zeit bekannten Kanten sind, die sich in  $w$  treffen. Ferner gelte  $\varphi(t_i) = t_j$  (ggf. nach Ummummerierung der Kanten). Falls zusätzlich  $t_i = \varphi(t_j)$  erfüllt wäre (beachte obige Bemerkung zu Kreisrandsegmenten), so wäre  $w$  ein

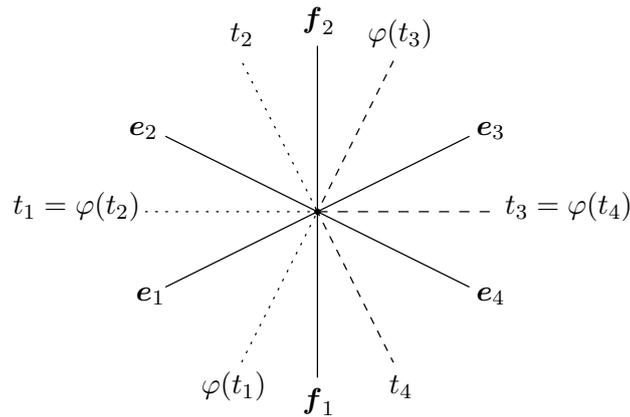


Abbildung 6.15: Verzweigungspunkt induziert mehrere neue Anfangswerte

Verzweigungspunkt vom Grad 2. In der rechten Hälfte von Abbildung 6.7 hatten wir ein Beispiel einer solchen Situation. In diesem Fall sind mit  $e_i$  und  $e_j$  alle an  $w$  anliegenden Kanten bestimmt. Nach dem Vorschlag von Baer, einen Startpunkt der Medialen Achse als Endpunkt auszuzeichnen, kann dieser Fall jedoch für wegzusammenhängende Graphen nicht eintreten. In dem Fall des zweifachen Verzweigungspunktes aus Abbildung 6.7 wäre die Berechnung der Medialen Kurve aufgrund des Auftretens des Fokalfpunkts (dort mit  $v$  bezeichnet) abgebrochen worden. Da keine weitere Kante an dem Fokalfunkt anliegt, wird dieser bis zum Ende des Algorithmus in der Eckenliste geführt werden. Das Auftreten einer solchen Situation muß gesondert behandelt werden.

Nehmen wir andernfalls  $t_i \neq \varphi(t_j)$  an, so besitzt  $w$  drei (zur Zeit bekannte) distanzminimale Verbindungen zu  $\partial A$ . Nach Korollar 6.4.14 ist damit der Schnittpunkt  $w \in V$  ein Verzweigungspunkt (mindestens) dritten Grades, d.h. es gibt (mindestens) drei Kanten der Medialen Achse, die an  $w$  anliegen. Zwei dieser Kanten wurden bereits ermittelt, so daß wir für den nächsten Durchlauf des Algorithmus passende Anfangswerte für die fehlende dritte Kante benötigen. Falls der eigentliche Grad des betrachteten Schnittpunktes  $\deg^*(w) = 3$  erfüllt, so sind diese durch die nicht identischen Parameterwerte  $t_i$  und  $\varphi(t_j)$  gegeben.

Allerdings kann die Situation eintreten, daß noch weitere Ecken an  $w$  anliegen, die zu dem Zeitpunkt der eben vorgenommenen Anfangswertwahl noch nicht bekannt sind. Dies führt zu der Berechnung von Ästen der lokal Medialen Kurven (und damit zu vermeintlichen Überdeckungen einer Ecke der Medialen Achse), die ungültig sind. Die Überprüfung auf Gültigkeit eines Astes der Medialen Kurve wird in der Abfrage im Anschluß an Anweisung 5 im Flußdiagramm 6.8 (siehe Seite 190) vorgenommen. Ungültige Äste können daran erkannt werden, daß zu einem späteren Zeitpunkt der Bearbeitung eine weitere Kante der Medialen Achse in  $w$  endet, deren zugehörige Parameterwerte eine im Hinblick auf den Grad des Verzweigungspunkts konsistente Anzahl an distanzminimalen eigentlichen Verbindungen zu  $\partial A$  induzieren. Die Details zu diesem Kriterium, sowie ein Beispiel für die eben angesprochene Situation findet man in [Bae98], Seite 59 ff.

Im Laufe der aktuellen Schnittpunktsuche können sich natürlich mehr als zwei Äste der Medialen Kurve ergeben, die sich in dem Verzweigungspunkt  $w$  treffen. Durch entsprechendes Kürzen der Medialen Kurven erhält man allgemein  $(n - 1)$  paarweise verschiedene Kanten  $e_1, \dots, e_{n-1} \in E$  der Medialen Achse, sowie die zugehörigen Randparametertupel  $(t_k, \varphi(t_k))$  bezüglich des  $k$ -ten Astes der Medialen Kurve ( $1 \leq k < n$ ). Im Idealfall besitzen diese Tupel (nach geeigneter

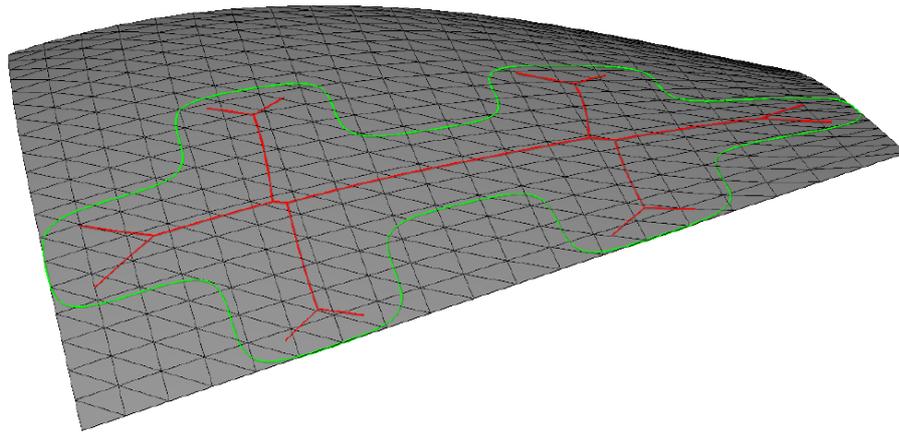


Abbildung 6.16: Mediale Achse eines „Puzzleteils“ auf einer NURBS-Fläche

Nummerierung) die Eigenschaft

$$\varphi(t_k) = t_{k-1} \quad \text{für alle } 1 \leq k < n - 1. \quad (6.15)$$

Damit kennt man  $(n + 1)$  distanzminimale Verbindungen von  $\partial A$  nach  $\mathbf{w}$ , so daß  $\mathbf{w}$  den eigentlichen Grad von mindestens  $(n + 1)$  besitzt. Als Anfangswerte der Medialen Differentialgleichung zur Bestimmung des fehlenden, von  $\mathbf{w}$  ausgehenden Astes der Medialen Kurve wird das Tupel  $(t_1, \varphi(t_{n-1}))$  gewählt werden. (Der Fall  $t_1 = \varphi(t_{n-1})$  kann, wie oben besprochen, nicht auftreten, wenn man die Strategie der Auswahl eines Endpunkts  $\bar{\mathbf{v}}$  der Berechnung verfolgt.)

Allerdings ist die Bedingung (6.15) nicht zwingenderweise erfüllt, wie man am Beispiel von Abbildung 6.15 erkennt. Hier wird im aktuellen Iterationsschritt ein Schnittpunkt der vier Ecken  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$  festgestellt. Der Schnittpunkt  $\mathbf{w}$  ist aber tatsächlich ein 6-facher Verzweigungspunkt; keine der beiden Kanten  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$  sind zu diesem Zeitpunkt bekannt. In einem solchen Fall ergeben sich tatsächlich mehrere Parametertupel, die Anfangswerte für nachfolgende Berechnungen der Medialen Kurve liefern. In diesem Beispiel sind dies die beiden Tupel  $(t_2, \varphi(t_3))$  und  $(t_4, \varphi(t_1))$ , die die Berechnung einer Überdeckung der zur Zeit unbekanntenen Kanten  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$  einleiten. Daher kommt der Algorithmus auch mit solchen Situation zurecht, in denen Gleichung (6.15) nicht erfüllt ist.

Wie bereits oben erwähnt, hat Moritz Baer auch stückweise  $C^2$ -stetige Randkurven zugelassen. Er benutzte hierzu einige plausible Annahmen über das Verhalten der Medialen Achse im Fall der Existenz von Ecken, die vorne bereits angesprochen wurden. Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, daß das Auftreten von Ecken in der Randkurve auch die Berechnung Medialer Kurven bezüglich der Kombination aus Flächenkurve und -punkt und evt. sogar bezüglich zweier Flächenpunkte nötig werden läßt. Daher ist es wesentlich, daß wir mit Hilfe der in Kapitel 4 erzielten Ergebnisse auf alle diese Fälle vorbereitet sind.

Als erstes Beispiel der Berechnung einer Medialen Achse mit Hilfe des Programms von Moritz Baer betrachten wir das Gebiet aus Abbildung 6.16. Die Randkurve  $\partial A$  besteht hierbei aus einer geschlossenen,  $C^2$ -stetigen BSpline-Kurve, deren Form an ein Stück eines Puzzles erinnert. Die zugehörige Parameterraumkurve in Abbildung 6.17) besitzt eine horizontale Symmetrieachse. Würde man die Mediale Achse des berandeten Gebiets in der Euklidischen Ebene berechnen, ergäbe sich daher (neben den 12 Fokalen Startpunkten) zwei Verzweigungspunkte, die jeweils den Grad vier besäßen. Die Randkurve von  $A \subset S$  wurde sowohl im  $uv$ -Parameterraum als auch

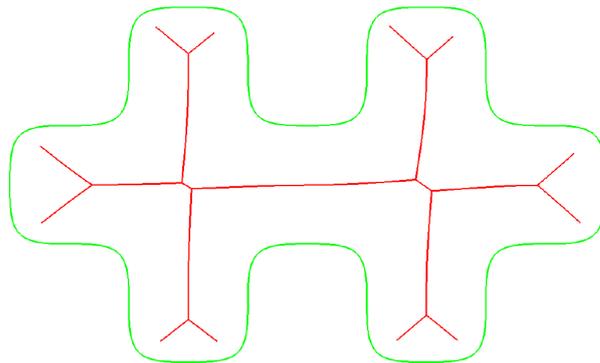


Abbildung 6.17: Parameterraumkurven der Medialen Achsen aus Abbildung 6.16

als Flächenkurve in grüner Farbe dargestellt. Bei der betrachteten Fläche handelt es sich um ein Teilstück eines hyperbolischen Paraboloiden.

Die Gaußkrümmungen der Punkte des behandelten Flächenstücks sind zwar alle positiv, haben aber alle einen relativ kleinen Wert, so daß sich die Geometrie dieser Fläche nicht wesentlich von der Euklidischen Ebene unterscheidet. Das Ergebnis der Berechnung der Medialen Achse in der gegebenen Flächengeometrie ergibt trotz dieser geringen Abweichung gegenüber der Euklidischen Situation einen Graphen, der sich aus topologischer Sicht von der medialen Achse der ebenen Geometrie (ohne Abbildung) unterscheidet. Die rote Kurve in Abbildung 6.16 bzw. 6.17 stellt das durch das Programm ermittelte Ergebnis dar. Sie besitzt 12 Fokale Startpunkte und 10 Verzweigungspunkte. Alle Verzweigungspunkte besitzen den Grad drei.

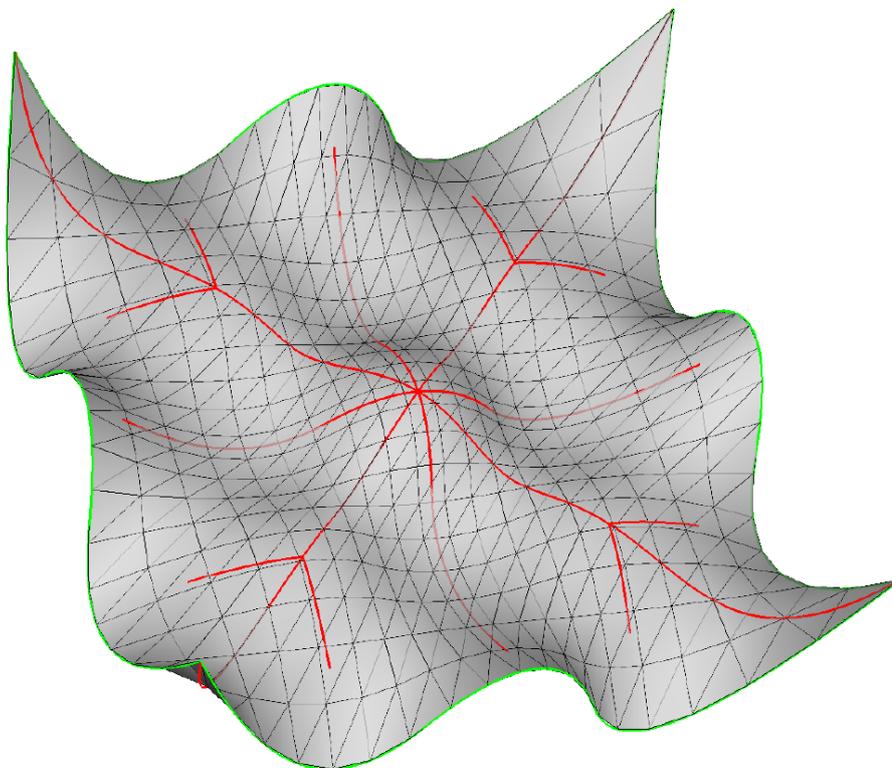


Abbildung 6.18: Mediale Achse eines Vierecks auf einer wellenförmigen Fläche

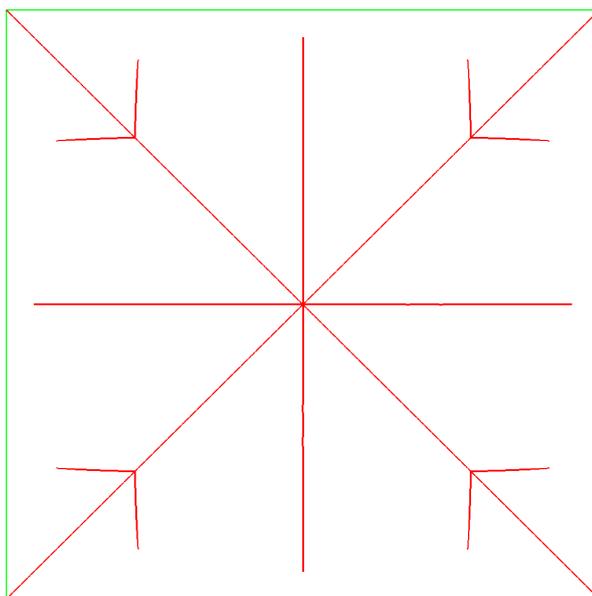


Abbildung 6.19: Parameterraumkurven der Medialen Achsen aus Abbildung 6.18

Daß die Geometrie der betrachteten Fläche erheblichen Einfluß auf die Struktur des Graphen der Medialen Achse haben kann, werden wir auch im nächsten Beispiel erkennen. Die Randkurve des betrachteten Gebietes ist hier durch ein Quadrat im  $uv$ -Parameterraum der Fläche gegeben (vgl. Abbildung 6.19). Damit behandeln wir gleichzeitig ein Beispiel eines Gebietes  $A$ , dessen Rand lediglich aus einer *stückweise*  $C^2$ -stetigen Kurve besteht. Nach der oben erläuterten Behauptung erwarten wir in den vier Eckpunkten jeweils einen Startpunkt der Medialen Achse. Ansonsten erscheint die Wahl dieses Gebietes eher langweilig zu sein, da  $\mathcal{M}(A)$  im Euklidischen Fall lediglich aus den beiden Diagonalen des Quadrats (präziser: Aus den vier Eckstartpunkten, dem Schwerpunkt des Quadrats als Verzweigungspunkt vom Grad vier, sowie aus den vier verbindenden Kanten) bestehen würde.

In Abbildung 6.18 wird die tatsächlich behandelte Flächengeometrie gezeigt. Die gegebene parametrische Fläche ist eine wellenförmige Bezier-Fläche. Als Kontrollpunkte wurde ein  $5 \times 5$  Gitter gewählt, deren  $x$ - und  $y$ -Koordinaten äquidistant im Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  verteilt wurden. Die Wellenform der Fläche wurde durch eine alternierende Wahl von 0 und 0.5 für die  $z$ -Koordinaten erreicht. Die Randkurve des viereckigen Gebietes wurde sowohl in Abbildung 6.18 als auch in 6.19 grün eingezeichnet. Die zugehörige Mediale Achse des Gebietes erkennt man anhand der roten Farbgebung.

Deutlich sind die vier erwarteten Eckstartpunkte von  $\mathcal{M}(A)$  zu erkennen. Daneben gibt es insgesamt 12 weitere Startpunkte der Medialen Achse, die nach den Ergebnissen aus Abschnitt 6.4 Fokalfunkte der Randkurve sind. Die zugehörigen Abstandswerte stellen lokale Minima der Funktion des Fokalen Abstands dar. Für die Existenz von Fokalfunkten ist natürlich das Krümmungsverhalten der betrachteten Fläche verantwortlich. Schließlich findet der Algorithmus insgesamt fünf Verzweigungspunkte, wobei der zentrale den Grad acht besitzt. Weitere Beispiele zur Berechnung Medialer Achsen findet man in [Bae98], Seite 63 ff.

Bereits anhand der hier vorgestellten Beispiele kann man erkennen, daß die präsentierte Methode zur Berechnung der Medialen Achse eines kompakten Gebietes  $A$  der parametrischen Fläche  $S$  gute Ergebnisse liefert. Durch die in den Abschnitten 6.2, 6.3 und besonders 6.4 erzielten

theoretischen Resultate kann die Korrektheit der hier präsentierten Methode gesichert werden. Ferner besitzt das Konzept des eigentlichen Grades von Ecken der Medialen Achse das Potential, auch die Situation *stückweiser*  $C^2$ -stetiger Randkurven zu bearbeiten, so daß ein Beweis der Korrektheit des Algorithmus auch für diesen Fall zu erwarten ist. Die zur Bearbeitung von Ecken der Randkurve benötigten Varianten der Medialen Differentialgleichung wurden alle in Kapitel 4 bereit gestellt.

# Literaturverzeichnis

- [Bae98] BAER, MORITZ: *Berechnung medialer Achsen von einfach berandeten zusammenhängenden Teilstücken parametrisierter Flächen*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover, Hannover, Dezember 1998.
- [Ban82] BANGERT, V.: *Sets with Positive Reach*. Archiv der Mathematik, 38:54–57, 1982.
- [BG92] BRUCE, J. W. und GIBLIN, P. J.: *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 Auflage, 1992.
- [BL73] BLASCHKE, W. und LEICHTWEISS, K.: *Elementare Differentialgeometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Blu64] BLUM, H.: *A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape*. In: WATHENDUNN, W. (Herausgeber): *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, Seiten 362–381. MIT Press, November 1964.
- [Blu73] BLUM, H.: *Biological Shape and Visual Science (Part I)*. Journal of Theoretical Biology, 38:205–287, 1973.
- [Bus55] BUSEMANN, H.: *The Geometry of Geodesics*. Academic Press, New York, 1955.
- [dC76] CARMO, M. P. DO: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [DH93] DUTTA, D. und HOFFMANN, C. M.: *On the Skeleton of Simple CSG Objects*. Journal of Mechanical Design, ASME Transactions, 115(1):87–94, März 1993.
- [Die96] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*. Springer, Berlin, 1996.
- [Fle80] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*, Band 1: Constrained Optimization. John Wiley and Sons, Chichester, 1980.
- [Fri98] FRIESE, K. I.: *Effiziente Algorithmen zur Innen- und Außenerkennung in der Ebene*. Studienarbeit, Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover, Hannover, Oktober 1998.
- [GM74] GILL, P. E. und MURRAY, W. (Herausgeber): *Numerical Methods for Constrained Optimization*. Academic Press, London, 1974.
- [GP91] GURSOY, H. N. und PATRIKALAKIS, N. M.: *Automated Interogation and Adaptive Subdivision of Shape Using Medial Axis Transform*. Advances in Engineering Software, 13(5/6 (kombiniert)):287–302, 1991.

- [Gru97] GRUMBKOW, P. VON: *Berechnung der medialen Achse von einfachen Polygonen in der euklidischen Ebene*. Studienarbeit, Lehrstuhl für Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover, Hannover, Juni 1997.
- [Gur89] GURSOY, H. N.: *Shape Interrogation by Medial Axis Transform for Automated Analysis*. Doktorarbeit, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, November 1989.
- [HA92] HANSEN, A. und ARBAB, F.: *An Algorithm for Generating NC Tool Paths for Arbitrarily Shaped Pockets with Islands*. ACM Transactions on Graphics, 11:152–182, 1992.
- [Har50] HARTMAN, P.: *On the Local Uniqueness of Geodesics*. American Journal of Mathematics, 72:723–730, 1950.
- [Har51] HARTMAN, P.: *On Geodesic Coordinates*. American Journal of Mathematics, 73:949–954, 1951.
- [Hel91] HELD, M.: *On the Computation Geometry of Pocket Machining*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Heu94] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. B. G. Teubner, Stuttgart, 11. Auflage, 1994.
- [Heu95] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 9. Auflage, 1995.
- [HW76] HALL, G. und WATT, J. M. (Herausgeber): *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [KAB95] KIMMEL, R., AMIR, A. und BRUCKSTEIN, A. M.: *Finding Shortest Paths on Surfaces Using Level Sets Propagation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 17(6):635–640, Juni 1995.
- [Kam38] KAMPEN, E. R. VAN: *The Theorems of Gauß–Bonnet and Stokes*. American Journal of Mathematics, 60:129–138, 1938.
- [Kle80] KLEINJOHANN, N.: *Convexity and the Unique Footpoint Property in Riemannian Geometry*. Archiv der Mathematik, 35:574–582, 1980.
- [KWR97a] KUNZE, R., WOLTER, F.–E. und RAUSCH, T.: *Geodesic Voronoi Diagrams on Parametric Surfaces*. In: VINCE, J. und F. VAN REETH (Herausgeber): *Computer Graphics International 1997*, Seiten 230–237, Hasselt, Belgium, Juni 1997. Computer Graphics Society, IEEE Computer Society Press.
- [KWR97b] KUNZE, R., WOLTER, F.–E. und RAUSCH, T.: *Geodesic Voronoi Diagrams on Parametric Surfaces*. Welfen Laboratory Reports 2, Lehrstuhl Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover, Hannover, Juli 1997.
- [Mae96] MAEKAWA, T.: *Computation of Shortest Paths on Parametric Free-Form Surfaces*. Journal of Mechanical Design, ASME Transactions, 118(4):499–508, März 1996.
- [Mil73] MILNOR, J.: *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 5. Auflage, 1973.

- [MP93] MAEKAWA, T. und PATRIKALAKIS, N. M.: *Computations of Singularities and Intersections of Offsets of Planar Curves*. Computer Aided Geometric Design, 10:407–429, 1993.
- [NAG89] NUMERICAL ALGORITHMS GROUP, Oxford, England: *NAG Fortran Library Manual*, Mark 13 Auflage, 1989.
- [OR70] ORTEGA, J. M. und RHEINBOLDT, W. C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York, 1970.
- [Per78] PERSSON, H.: *NC Machining of Arbitrarily Shaped Pockets*. Computer Aided Design, 10:169–174, 1978.
- [PG90] PATRIKALAKIS, N. M. und GURSOY, H. N.: *Shape Interrogation by Medial Axis Transform*. In: RAVANI, B. (Herausgeber): *Proceedings of the 16th ASME Design Automation Conference: Advances in Design Automation, Computer Aided and Computational Design, Vol. I*, Seiten 77–88, Chicago, September 1990. ASME.
- [Pow70] POWELL, M. J. D.: *A Hybrid Method for Nonlinear Algebraic Equations*. In: RABINOWITZ, P. (Herausgeber): *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Gordon and Breach, London, 1970.
- [Roh98] ROHMFELD, R. F.: *IGB-Offset for Plane Curves — Loop Removal by Scanning of Interval Sequences*. Computer Aided Geometric Design, 15(4):339–375, April 1998.
- [RWS96a] RAUSCH, T., WOLTER, F.–E. und SNIHOTT, O.: *Computation of Medial Curves on Surfaces*. In: GOODMAN, T. und MARTIN R. (Herausgeber): *The Mathematics of Surfaces VII*, Seiten 43–68, Dundee, Scotland, September 1996. Institute of Mathematics and its Applications, Information Geometers Ltd.
- [RWS96b] RAUSCH, T., WOLTER, F.–E. und SNIHOTT, O.: *Computation of Medial Curves on Surfaces*. Welfen Laboratory Reports 1, Lehrstuhl Graphische Datenverarbeitung, Universität Hannover, Hannover, August 1996.
- [SB90] STOER, J. und BULIRSCH, R.: *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin, 3 Auflage, 1990.
- [Sch75] SCHUBERT, H.: *Topologie: eine Einführung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 4 Auflage, 1975.
- [SH82] STUMMEL, F. und HAINER, K.: *Praktische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 2 Auflage, 1982.
- [She95] SHERBROOKE, E. C.: *3-D Shape Interrogation by Medial Axis Transform*. Doktorarbeit, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, April 1995.
- [Spa95] SPANIER, E.: *Algebraic Topology*. Springer, New York, 2 Auflage, 1995.
- [Spi79a] SPIVAK, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Band 1. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 2 Auflage, 1979.
- [Spi79b] SPIVAK, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Band 4. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 2 Auflage, 1979.

- [SPW96] SHERBROOKE, E. C., PATRIKALAKIS, N. M. und WOLTER, F.-E.: *Differential and Topological Properties of Medial Axis Transforms*. Graphical Models and Image Processing, 58(6):574–592, November 1996.
- [Sto69] STOKER, J. J.: *Differential Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [SZ94] STÖCKER, R. und ZIESCHANG, H.: *Algebraische Topologie: eine Einführung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2 Auflage, 1994.
- [TA91] TAM, T. K. H. und ARMSTRONG, C. G.: *2D Finite Element Mesh Generation by Medial Axis Subdivision*. Advances in Engineering Software, 13(5/6 (kombiniert)):313–324, 1991.
- [Ver94] VERMEER, P. J.: *Medial Axis Transform to Boundary Representation Conversion*. Doktorarbeit, Purdue University, Mai 1994.
- [Wal93] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Wol85] WOLTER, F.-E.: *Cut Loci in Bordered and Unbordered Riemannian Manifolds*. Doktorarbeit, Technical University of Berlin, Department of Mathematics, Dezember 1985.
- [Wol89] WOLTER, F.-E.: *Distance Computations for Curves and Surfaces*. Mini-Symposium on Engineering Geometry, SIAM Conference on Geometric Design, Tempe, Arizona, 1989.
- [Wol92] WOLTER, F.-E.: *Cut Locus and Medial Axis in Global Shape Interrogation and Representation*. Memorandum 92-2, Cambridge MA: MIT Ocean Engineering Design Laboratory, Januar 1992.
- [Wol95] WOLTER, F.-E.: *Geodesic Offsets, Computations and Applications*. International Symposium on Freeform Curves and Surfaces 95, Mathematical Research Institute Oberwolfach, 1995.
- [Wol96] WOLTER, F.-E.: *Geodesic Offsets and Medial Curves*. Dagstuhl-Seminar on Geometric Modeling at the International Conference and Research Center for Computer Science, Dagstuhl, 1996.

---

## Lebenslauf

22. August 1965	geboren in Frankfurt/Main als Sohn meiner Eltern Werner Rausch und Marga Rausch, geb. Dutine
Aug. 1971 – Juni 1975	Friedrich–Fröbel–Schule, Hausen (Grundschule)
Juli 1975 – Juli 1977	Waldschule, Hausen (Förderstufe)
Aug. 1977 – Juni 1981	Hermann–Hesse–Gesamtschule, Obertshausen (Sekundarstufe I, gymnasialer Zweig)
Juli 1981 – Juni 1984	Friedrich–Ebert–Gymnasium, Mühlheim/Main (Sekundarstufe II)
Juni 1984	Abitur
Okt. 1984 – Juli 1992	Studium an der Johann Wolfgang Goethe–Universität, Frankfurt/Main
3. Juli 1992	Studienabschluß als Diplom–Mathematiker
Aug. 1992 – März 1994	Diplom–Mathematiker und Systemanalytiker bei Fa. START Btx, Frankfurt/Main
April 1994 – Sept. 1994	Wissenschaftlicher Angestellter an der Universität Hamburg, Institut für Angewandte Mathematik
Okt. 1994 – Sept. 1999	Wissenschaftlicher Angestellter an der Universität Hannover, Institut für Informatik